

HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS, CIVISQVE BONONIENSIS, PHILOSOPHI, MEDICI ET Mathematici clarissimi,

OPVS NOVVM DE PROPORTIONIBVS NVMERORVM, MOTVVM, PONDERVM, SONORVM, ALIARVMQVE RERVM

mensurandarum, non solùm Geometrico more stabilitum, sed etiam uarijs experimentis & obseruationibus rerum in natura, solerti demonstratione illustratum, ad multiplices usus accommodatum, & in V libros digestum.

PRAETEREA.

ARTIS MAGNÆ, SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, LIBER VNVS, ABSTRVSISSIMVS

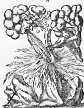
& inexhaustus plane totius Arithmeticæ thesaurus, ab authore recens multis in locis recognitus & auctus.

ITEM.

DE ALIZA REGVLA LIBER, HOC EST, ALGEBRAICAE

logisticæ suæ, numeros recondita numerandi subtilitate, secundum Geometricas quantitates inquirentis, necessaria Coronis, nunc demum in lucem edita.

Opus Physicis & Mathematicis inprimis utile & necessarium.



corregido conforme al expurgat.o Real año de 1632; y cõforme al de 1640 = +
Fidel Marmol

Cum Cæs. Maiest. Gratia & Priuilegio.

BASILEÆ.



IN LIBRVM DE PROPORTIONIBVS HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS, CIVISQVE Bononienſis, Medici, Præfatio ad M. A Amulium Venetum Card. Illuſtriſsimum.



BENE Dictum eſt meo iudicio à Platone M. A. Amuli optime, beatas fore Reſpub. ſi uel illarum domini ſapientiæ amatores eſſent, aut qui ſapientiæ eſſent amatores dominarentur, hoc ipſum clarè intelligens, ſtudio ſapientiæ nihil eſſe utilius humano generi: quo ſimul & pietas, & iuſtitia, & mutuus amor hominum inter ſe & eorum commoda continerentur. Nempe hiſce quatuor tota noſtra felicitas comprehenditur. Si quidem pietate in Deos nihil niſi ſanctum, & purum, & illuſtre ſapimus; hoc ipſo primum quod ſupra nos eſt, intelligimus, Deos ueneramur, gratias agimus, timor cum ueneratione noſtros animos ſubit, & de futura uita cogitamus, hæc ipſa mortalia ſi non negligentes ſaltem paruifacientes. Iuſtitiam autem adeò neceſſariam humano generi eſſe ſcimus, ut ſine illa neq; eſſe, nedum benè eſſe poſsimus, ut neq; latronum cœtus abſq; ea diu ſtare poſſint. Porrò quid dicam de concordia, & mutua hominum beneuolentia, in quibus omnis uitæ humanæ dulcedo repoſita eſt: nec quis ſuſtineat uiuere, qui ſe omnibus odioſum eſſe ſentiat. His ipſis filios in ſpem alimus, parentes fouemus, fratres tuemur, & adiuuamus, amicis opitulamur, cum hominibus hilarem & iucundam uitam ducimus. Si quis ſerpentem in lecto haberet, nunquam ſomnum caperet: ita nihil moleſtius eſt in hac uita, quàm eſſe cum quo nolis, & priuari conſuetudine eorum cum quibus maximè uiuere cupias. Quid enim habent Principes præcipuum cum tota illa potentia quam habent, niſi hoc unum, quod ſuis quos amant bene facere poſsint? nam reliqua omnia exerceri, uenari, edere, bibere, dormire, iter agere, loca amæna inuiſere multis alijs conceſſum eſt, maioreq; commodo qui in uita priuata degunt. Si ergo principatum cum tot laboribus, curis, periculis, & meritò omnes appetunt: nec eſt in eo quicquam præcipuum præter hoc, cui dubium eſt quin hoc non ſit ſummum huius uitæ hominibus bonum? propter cuius uel dubiam ſpem eorum, quæ habent obliti mortales periclitantur. Succedunt inde tot commoda, non ſolum utilia, ſed pleraq;

etiam necessaria, quæ nos sapientia docet: huiusmodi ergo omnia cùm libris continentur, meritò optimus quisque librorum bonorum perpetuitati atque incolumitati fauere debet. C. Caligulam execramur solum ob id quod Vergilij, & T. Liuij scripta delere cogitauerit. Quid facturi essemus, si fecisset quod cogitauerat? Est in sapientum monumentis bonum sine malo, mens sine corporea labe: Virtutes absque uitijs, gratiæ & iucunditas sine sorde, & immunditia, uoluptas sine dolore, conuersatio absque tædio, delitiæ absque miseria nuda, omnia bona præstant, atque laudabilia ab omnibus mortalitatis exuuijs libera, tantum commodi afferunt libri. Sed & in eorum electione ac studijs modus, ac mediocritas quædam seruanda est, quæ si quis neglexerit non leui incommodo afficietur: eam antiqui rationem alij proportionem appellarunt, non equidem etiam in peritis tam facillimã, ut rentur homines: nam in alijs rebus perobscuram esse fatentur, ego difficillimam puto undique, & magis forsan ubi non existimamus. Vnde plures decidere uidemus magnis cum auxilijs, & euidenti spe: quid aliud est in causa quàm ignota mensura rerum? quam tamen plerique tenere se putant. Ergo, cùm summum bonum in hac mensura situm esse cernerem, ut clarè ostendunt musicæ uoces, quæ non nisi indiuiduo (ut ita dicam) spacio seu loco stare possunt, ita & in figuris picturarum & statuarum, & diebus decretorijs, & negocijs ciuilibus operæprecium me facturum existimaui, si omnia hæc quæ latè patebant breuiter in unum redegissem, nõ tantum ne lectorem tædio afficerem, quàm ut quòd aliàs docui, breuibus tractationibus, & plura continerentur, & facilius docerentur. Cum uerò bona fortuna quædam effecisset, ut tibi libellum dedicassem de Prouidentia ex constitutione temporum, longe meliore occasione nominis tui typographi obliti sint, indignum fore putaui, ut non ærea (quemadmodum cum Glauco Diomedes) cum aureis commutarem. Itaque infinitis licet circumuentus negocijs totus huic operæ incubui, atque adeò ut præter spem unius anni penè spacio liber absolueretur. Qui cum tibi (ut dixi) iam iure deberetur, eò tamen magis dedicandum putaui, quod non ego solum quanquam id maximè, sed communis consensus hominum existimet, te singulari uirtute omnibus studiosis plurimum fauere.

Vale.

TABVLA

TABVLA PROPOSITIONVM DE PROPORTIONIBVS.

Proportio-

TABVLA PROPOSITIONVM

quartæ

ßi

uel

F I N I S.

HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS, CIVISQVE BONONIENSIS, MEDICI, de Proportionibus, seu Operis Perfecti LIBER QVINTVS.

Prima diffinitio.

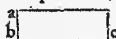


PROPORTIO ab Euclide sic describitur, Quòd sit duarum quantitatum eiusdem generis, quod ad magnitudinem attinet, comparatio certa.

Secunda diffinitio.

Proportiones per similitudinem dicũtur, cùm quantitas quantitati comparatũ alterius generis, cui fingitur æqualis esse potestate.

Velut si a b fingatur monas in comparatione ad b c erit rectangulum a c æquale lineæ b c.



Tertia diffinitio.

Proportio æqualis proportioni est, cùm eodem modo termini se habent inuicem in utraq;

Quarta diffinitio.

Proportiones secundum genus notæ dicuntur, cùm nouimus, quod sint maiores, aut minores. Nam cùm æquales sunt, simul necesse est, ut cognoscamus genus, & speciem.

Quinta diffinitio.

Datum positione est: quod necessariò ex positis certam habet quantitatem.

Sexta diffinitio.

Datum simpliciter dicitur, quod ex propositis cognosci potest, quantum sit.

Septima diffinitio.

Proportiones potestate dicunt̃, quæ sub comparatione aliarum quantitatũ necessariam habentium cõnexionem solũ cognoscunt̃.

Hæ autem sunt aliquando eiusdem generis, cum primis ut numeri: aliquandò alterius, ut linearum & superficierum, angulorum, & arcuum: aliquando eiusdem generis, & diuersarum specierum, ut arcuum per sinus, qua utuntur Astronomi.

Octaua diffinitio.

Proportio homonyma dicitur duarum quantitatum diuersi generis, sed alterius a b altero dependentium, uelut motus ad tempus. Cor^m.

pus. Dicimus enim motum tardum, uel uelocem in comparatione ad tempus.

Nona diffinitio.

Proportionum aliæ dicuntur rhetæ, aliæ alogæ, rhetæ quæ sunt ut numeri ad numerum, alogæ quæ non sunt numeri ad numerum.

Decima diffinitio

Proportio rhete alia æqualis, alia multiplex, uel submultiplex: alia unius partis excessus, aut defectus, alia plurium, quam superpartientem, aut subpartientem uocant.

Vndecima diffinitio.

Cum diuiso denominatore per numeratorem exit quantitas aloga, proportio dicitur aloga: si autem numerus integer, aut pars numeri nota dicitur rhete.

Duodecima diffinitio.

Proportionem in proportionem duci est, quoties recto ordine tres quantitates in eisdem collocantur: ut sint tres quantitates a b c dicetur proportio a ad c producta ex proportione a ad b & b ad c, & similiter proportio c ad a producitur ex proportione b ad a, & c ad b.

a
b
c

Tertiadecima diffinitio.

Proportionem per proportionem diuidi est, quoties ad eandem quantitatem duæ quantitates comparantur, tunc illarum proportio est, quæ prodit una per alteram diuisa.

Sint proportiones a & b ad c & interponatur b inter a & c, dico proportionem a ad c diuisam per proportionem a ad b, & prodire proportionem b ad c, constat ex conuersa præcedentis.

Quartadecima diffinitio.

Additio proportionum intelligitur quotiens duarum quantitatum ad unam tertiam, proportiones per aggregatum ipsarum quantitatum ad eandem coniunguntur.

Velut si comparentur a b & b c ad d, inde tota a c ad d dicemus proportionem, ac ad d esse con iunctã ex duabus pportionibus a b ad d & b c ad eandẽ d. Hoc & duo sequentes sicut & duæ antecedẽtes demonstrabitur esse. nunc solum quomodo intelligendũ sit proponimus.

a b c
d

Quintadecima diffinitio.

Detractionem proportionis à proportione intelligimus fieri per detractionẽ minoris quantitatis à maiore, comparatam ad eandem quantitatem.

Velut in exemplo superiore detracta proportione b c ad d ex propor-

proportione a c ad d, relinquetur proportio a b ad d, & probatur ex conuersione præcedentis.

Sextadecima diffinitio.

Extractio radicum alicuius proportionis fit per extractionem radicum quantitatum illius iuxta unam, & eandem rationem.

Velut quadratæ, uel cubæ, uel pronicæ, uel uniuersalis, uel alterius modi.

Decimaseptima diffinitio.

Cùm fuerint duæ proportiones similes in tribus terminis continuatæ, dicetur proportio primæ quantitatis ad tertiam ueluti primæ ad secundam duplicata. Et si sint tres proportiones similes in quatuor terminis, dicetur proportio primæ quantitatis ad quartam triplicata ei, quæ est primæ ad secundam.

Decimaoctaua diffinitio.

Confusa proportio dicitur simplicis, aut compositæ quantitatis ad compositam in comparatione ad proportiones ad partes.

Decimanona diffinitio.

Quantitates quę in continua sunt ꝓportione Analogæ uocantur.

Dictum est hoc ad fugiendum nomen barbarum, etiam ut breuiter tamen possemus sententiam explicare.

Vigesima diffinitio.

Reflexa proportio dicitur cum trium quantitatum aggregatum primæ, & tertiæ se habet ad secundam uelut secunda ad tertiam.

Vigesima prima diffinitio.

Trium quantitatum analogarum aliæ quidem Geometricæ, cùm proportio similis est. Aliæ Arithmeticæ, cum fuerit æqualis excessus hucindè: Aliæ musicæ cum fuerit proportio primæ ad tertiam multiplex, aut simplex, aut composita excessus quæ simplici iuncta sit ad multiplicis perfectionem: eadem autem sit proportio excessus primæ, & secundæ ad excessum secundæ supra tertiam.

Velut proportio 6.4.3 dupla est utrinque, & 6.3.2 tripla. & 28. 24. 21, & 45.40.36. Geometrica uerò & arithmetica facilius continuantur in quotquot quantitatibus, sed & musica uelut 12. 8.6. 4.3. & proportio 8 ad 5 musica est: quia proportio 5 ad 4 musica est, & bene sonans, igitur constitutis 8.5.4. cum 8 ad 4 bene sonet, & 5 ad 4, & 4 sit extrema non media inde 8. & 5 bene sonat. nam in medijs nõ est uerũ, ut in 9.6.4 bis diapente, & 16. 12. 9 bis diatessaron.

Vigesima secunda diffinitio.

Quantitates quæ similem habent proportionem non continuatam, omiologæ appellantur.

Vigesima tertia diffinitio.

Prima operatione consistere dicuntur proportiones, cùm inter primo conflatas quantitates constiterint.

PRIMA Animi communis sententia.

OMNIS Proportio est, aut æqualitatis, aut maior inæqualis, aut minor.

Secunda animi communis sententia.

Quilibet numerus tantus dicitur, quanta est illius proportio ad monadem.

Dicimus enim quatuor, quod monadem quater contineat. Et duo cum dimidio cùm monadem bis & semis contineat.

Tertia animi communis sententia.

Proportionem defectus, seu detractæ quantitatis ad defectum esse posse, ut quantitatis ad quantitatem dicuntur communes animi sententiæ, quæ ex intellectu solo terminorum, quod ueræ sint, cognoscuntur. Si ergo defectus est quantitas, & quantitas eiusdem speciei, quia detrahitur, & defectus non est simplicitur, sed detracto ergo per quartam petitionem: uel primam diffinitionem erit proportio inter illas. Sunt enim ambæ detractæ.

Quarta animi communis sententia.

Inter quantitatem, & defectum minorem quantitate, cuius est defectus, est proportio, quatenus est quantitas. Sit a b linea, & detracta quantitas b c, non maior a b & d sit alia quæuis quantitas eiusdē generis, dico quòd inter d & b c est proportio quatenus b c est quantitas, quia sunt eiusdem generis ideo sunt in aliqua proportione per primam diffinitionem. Sed ut b c est defectus, nulla est proportio: quia quanto b c augetur, tanto augetur proportio d ad b c, & hoc est contra demonstrata ab Euclide.

a b c

d

Quinta animi communis sententia.

Cum proportio producitur ex proportionibus quælibet illarum dicetur producta diuisa per alteram.

Sexta animi communis sententia.

Æqualium quantitatum seu proportionum ad tertiam comparabilium eadem est proportio atque uicissim. Hæc etsi demonstretur ab Euclide, est tamen hic generalior: & satis per se nota. Vt sit propior animi communi sententiæ, quàm rei demonstrandæ.

Septima animi communis sententia.

Ad quod quantitas proportionem habet infinitam, id in genere illius quantitatis non comprehenditur.

Nam proportio est duarum quantitatum eiusdem generis comparatio certa: at hæc comparatio certa non est: non igitur quantitates ambæ sunt, aut non eiusdem generis.

PRIMA Petitio.

SI fuerit primi ad secundum, ut tertij ad quartum, & ex primo in secundum producatur æquale, aut maius, aut minus primo, uel secundo, producetur eodem modo ex tertio in quartum æquale aut maius, aut minus tertio, uel quarto eadem ratione & ordine.

Secunda petitio.

Proportiones possunt duci, diuidi, iungi, & auferri, & sumi radix in eis cuiuscunque generis, atque earum quantitatis, ut libet, posse transponere.

Tertia petitio.

Proportionis cuiusuis nomen à denominatore suprà scripto, & numeratore infrà scripto sumitur.

Quarta petitio.

Diuisa quauis quantitate per aliam eiusdem generis, quod exit proportio dicitur.

Quinta petitio.

Quælibet proportio est uel inter duas quantitates, uel per unam significatur.

Nam per tertiam petitionem si sint duæ quantitates, quæ non habeant unius rationem, nomen sumit proportio à duobus numeris, sin autem sit altera monas, erit per secundam animi communem sententiam, proportio numerus ipse. Ideò patet, quod dicitur.

Sexta petitio.

Proposita proportione quacunque, & monade quantitatem inuenire, quæ se habeat ad monadem in proportione proposita.

Nam cùm per quartam petitionem diuisa quantitate per quantitatem exeat proportio, & numerus ad monadẽ se habeat, ut proportio, ideò sumpta monade secundum illum numerum, ille numerus est quantitas quæsita.

Septima petitio.

Quamlibet quantitatem per aliam eiusdem generis diuidere posse.

Octaua petitio.

Proportionem in proportionem ducere posse: quamuis sint inter quantitates diuersi generis.

Quod dicitur de multiplicatione intelligendum est de alijs operationibus suprà enumeratis.

Nona petitio.

Monadem semper sumere in quocunque genere posse proposita proportione.

Nam licet diuidere per septimam petitionem quantitatem per quantitatem proportionis: & quod exit, est proportio per quartam petitionem, & per secundam animi communem sententiam illa proportio est numero æqualis: ergo diuisa proportione, per similem numerum statuetur monas.

Decima petitio.

Duodecima sexti Elem. In quouis genere quantitatum sumere posse quantitatem, quæ se habeat ad monadem in proportione data. Similem huic proponit Euclides in lineis generaliter: nos autem contrà generaliter in omnibus quantitatibus, sed de monade tantum.

Vndecima petitio.

Monadem in quancunque quantitatem ductam æquale ipsi producere. Similiter & proportionem æqualem.

Nam cum aliqua quantitas augeat ducta aliqua minuat, necesse est aliquam esse, quæ nec augeat, nec minuat, & hæc est monas. Idem dico de diuisione. Aequalitas etiam ducta, uel diuidens non Secunda animi cõ munis sententia. mutat proportionem: nec quantitatem ipsam, igitur monas æqualitatem refert. Quod etiam est perspicuum ex supradictis.

Duodecima petitio.

Cum fuerint quatuor quantitates & ad primam, & tertiam æquè multiplicibus assumptis, itemque ad secundam & quartam, & si multiplex primæ maius est multiplici secundæ, multiplex tertiæ sit maius multiplici quartæ, & si minus minus, & si æquale æquale, idque semper quouis modo assumptis his proportionibus ad primam & tertiam, & ad secundam & quartam erit proportio primæ ad secundam, ut tertiæ ad quartam. Hæc etiam assumitur ab Euclide. Et per Quinto Ele. diff. 6. hanc intelligimus etiam conuersam.

Tertiadecima petitio.

Quantitates æquales, atque proportiones in quasuis quantitates ductæ eandem seruant rationem. Euclides hanc demonstrat, Quarta quinti Elem. nos autem ad uitandum tædium petimus concedi, sub qua includuntur diuisio etiam additio, detractio, laterum omnium inuentio.

Quartadecima petitio.

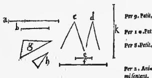
Cùm termini alicuius quantitatis eandem seruant rationem in omnibus, & firmi sunt ac stabiles eiusdem rationis comparatione contentæ partes æqualem seruant excessum, seu proportionem.

PROPOSITIO prima.

Proportionem in proportionem duci est superiores numeros atque inferiores inuicem ducere.

Sit proportio lineæ a ad lineam b, ut anguli c ad angulum d, statuatur e monas in genere a b, & fiat f ad c, ut c ad d, & ducatur a in f & b in e, & producantur g & h. Quia ergo f est proportio ipsa, erit g ad a ut c ad d, sed h est æqualis b, igitur a ad h ut a d b. Ducta ergo dicetur proportio a ad b in proportionem c ad d ducendo terminos proportionis, seu quantitatis recta scilicet superiores cum superioribus, & inferiores cum inferioribus. Nam si rursum constituantur f ad e ut a ad b cum f sit proportio, & k ad f ut c ad d, erit k ad e, ut g ad h, k autem fit ex ductu proportionis a ad b, quæ est f in proportionem c ad d, liquet igitur propositum.

Cor^m. Per 9. Petit. Per 10. Pet. Per 8. Petit. Per 2. Antimi sentent. Per 11. Pet. Per 8. Petit

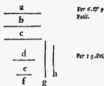


Propositio secunda.

Proportio extremorum producitur ex intermedijs.

Sint a b c quantitates dico proportionem a ad c, produci ex proportione a ad b & b ad c, statuantur totidem à monade d e f, erúntque ex demonstrantis ab Euclide in quinto Elemẽtorum in eadem proportione, statuatur ergo d prima quantitas e secunda & tertia f quarta. eritque per præcedentem proportio productorum ex d in e & sit g, & in f & sit h, producta ex proportionibus d ad e & e ad f, quare ex proportionibus a ad b & b ad e, sed ex dictis cum e sit eadem, erit proportio d ad f ut g ad h & proportio, d ad f per æquam proportionem ab Euclide demonstratam, ut a ad c, igitur proportio a ad c producitur ex proportionibus a ad b & b ad c, & est proportio ipsa a ad c d numerus, ut ostensum est.

Cor^m. Per 6. & 9. Petit. Per 13. Pet. Per 13. Pet.



Ex hoc sequitur, quòd cùm fuerit quantitas tertia monas ex proportionibus inuicem ductis producetur prima quantitas. Cor^m. 2.

Ex hoc sequitur, quòd conuersa proportio producitur ex conuersis proporoonibus. Cor^m. 3

Propositio tertia.

Si proportio ex duabus proportionibus in quatuor terminis producatur, ipsa uerò proportio inter duas alias quantitates fue-

rit constituta: consurgent trecenti sexaginta modi productionis proportionis.

Cor^m. Hęc propositio ut præcedens & sequẽtes tres ab Alchindo sumptæ sunt, & ab eo demonstrantur. Sit ergo proportio a ad b, producta ex proportione c ad d & e ad f, constat quòd cum sint sex quantitates, quòd fieri poterunt quindecim coniugationes, quas posui à latere facilitatis gratia, quibus respondent totidem conuersæ: erunt ergo triginta. Singulæ autem harum produci possunt duodecim modis: ductis duodecim in triginta, fiunt trecenti sexaginta modi. Et hoc est clarum per se, modo demõstremus, quod singuli horum modorum possint produci duodecim modis, & capiamus a b primam quę potest produci ex c d & e f: Item ambabus conuersis d c & f e: & rursus altera recta altera conuersa: & hoc bifariam c d & f e, & d c & e f, sunt ergo iam quatuor modi. Totidem ex c e & d f, totidemq; ex c f & d e, igitur erunt duodecim modi, quibus produci posse intelligitur proportio a ad b.

a	b
c	d
e	f

a b	b a
a c	c a
a d	d a
a e	e a
a f	f a
b c	c b
b d	d b
b e	e b
b f	f b
c d	d c
c e	e c
c f	f c
d e	e d
d f	f d
e f	f e
direc.	conuer.

Propositio quarta.

Si fuerit proportio primi ad secundum producta ex proportionibus tertij ad quartum, & quinti ad sextum, producetur etiam ex proportione tertij ad sextum, & quinti ad quartum.

Sit proportio a b producta ex proportionibus c ad d, & e ad f, dico quod etiam erit producta ex proportionibus c ad f, & e ad d, disponantur ut in figura & fiat ex c in e g, & ex d in f h, ergo per primam harum g ad h ut a ad b, sed per præsupposita in secunda productione etiam prodeunt g & h, igitur per primam propositionem harum a ad b proportio producitur ex proportionibus c ad f tertiæ scilicet ad sextam, & e ad d quintę ad quartam, quod fuit propositũ.

Per 8. petit.

In 13. petit.

a	b	
c	e	g
d	f	h
c	e	g
f	d	h

Propositio quinta.

Si fuerit proportio primi ad secundum producta ex proportione tertij ad quartum, & quinta ad sextum: erit proportio tertij ad sextum producta ex proportionibus primi ad secundum, & quarti ad quintum.

Sit

Sit proportio a ad b producta ex proportionibus c ad d, & c ad f, dico quod proportio c ad f producitur ex proportione a ad b, & d ad e. Interponam d e inter c & f, eritque ex secunda propositione repetita proportio c ad f producta ex tribus proportionibus c ad d, d ad e, e ad f, sed proportiones c ad d, & e ad f producunt proportionem a ad b, igitur proportio c ad f producitur ex proportionibus a ad b, & e ad f. Corm.

a	b
c	e
d	f

c

d

e

f

Propositio sexta.

Ex trecentis sexaginta modis producendarum proportionum triginta sex tantum esse necessarios.

Per quartam enim proportio a ad b producitur bifariam, & ex c ad d, & e ad f, & ex c ad f, & e ad d. & per præcedentem c ad f producitur ex a ad b, & d ad e, & per quartam rursus ex a ad e, & d ad b. Et per præcedentem rursus a ad e ex c ad f & b ad d, igitur per quartam eadem producetur ex c ad d & b ad f. Quare per præcedentem c ad f ex a ad e, & d ad b, & ita disponemus hos modos in tabula. Vides etiam aliquos modos non produci, ut primi ad quartum nec ad sextum, & liquet, quod cum sint quindecim omnes modi qui produci posse intelliguntur, & nouem tantum producantur sex esse, qui non producuntur, quos seorsum in tabula coniunxi. Et constat etiam, quod totidem conuersi scilicet decem octo producũtur, de quibus diximus, ut sint omnes triginta sex, qui constat ex duabus propositionibus præmissis, & hac tertia, quã adiungemus scilicet, quod proportio primi ad tertium producatur ex proportionibus secũdi ad quartum, & quinti ad sextũ. Hoc enim ex præcedentibus non liquet: bene liquet permutatis ordinibus, quod si proportio primi ad tertium producitur, Corm.

c	f
a	d
b	e

Primi ad secundum.
1 tertij ad quartũ, & quinti ad sextum.
2 tertij ad sextum, & quinti ad quartum.
Primi ad tertium.
3 secundi ad quartum, & quinti ad sextum.
4 secundi ad sextum, & quinti ad quartum.
Primi ad quintum.
5 secundi ad sextũ, & tertij ad quartum.
6 secundi ad quartum, & tertij ad sextum.
Secundi ad quartum.
7 primi ad tertium, & sexti ad quintum.

quod

quod etiam proportio primi ad quintū. Nam tertium, & quintum, itemq́; quartum, & sextum non differūt nisi ordine uoluntario. Ergo interposito e inter a, & c per secundam propositionem proportio a ad c producitur ex proportionibus a ad e, & e ad c, ut ex demonstratis in præsenti proportio a ad c producitur ex c ad f & b ad d. Proportio ergo a ad c producitur ex proportionibus e ad e & c ad f & b ad d, at e ad c & c ad f producunt eam, quæ est e ad f per secūdam propositionem. Igitur proportio a ad c producitur ex proportionibus b ad d secundi ad quartum, & e ad f quinti ad sextum. Hæc Alchindus in suo libello: sed licet ingeniosa ualde; parum tamē utilia olim erāt necessaria ad intelligendum magnam cōpositionem Ptolemei, nunc postquam Heber has sex quantitates traduxit ad quatuor, prorsus hæc scientia ulli usui esse desijt.

Modi qui nō producuntur
pri. ad quartū
pri. ad sextum
sec. ad tertiū
sec. ad quintū
tert. ad quint.
quart. ad sext.

8 primi ad quintum, et sexti ad tertium.
Secundi ad sextum.
9 primi ad quintū, & quarti ad tertium.
10 primi ad tertiū, & quarti ad quintum.
Tertij ad quartum.
11 primi ad secundum, & sexti ad quintum.
12 primi ad quintum, & sexti ad secundum.
Tertij ad sextum.
13 primi ad secundum, & quarti ad quintum.
14 primi ad quintum, & quarti ad secundum.
Quarti ad quintum.
15 secundi ad primum, & tertij ad sextum.
16 secundi ad sextum, & tertij ad primum.
Quinti ad sextum.
17 primi ad secundum, & quarti ad tertium.
18 primi ad tertiū, & quarti ad secundum.

a	e c	a e	e c
		c b	e
		f d	c
			f

Propositio septima.

In modis qui necessarió producuntur ex duabus proportionibus, cum duę quantitates ex illis, quę modos conficiunt, æquales fuerint; proportio producta ad quatuor quantitates omiologas reducetur.

a	b
c	e
d	f

Cor^m. Sint sex quantitates a b c d e f, & producatur ꝓportio a ad b ex proportione c ad d, & e ad f, tu scis, quòd modi recepti sunt prima cum secunda, tertia uel quinta, & secunda cum quarta, & sexta, & tertia similiter cum eisdem, & quinta eodem modo cum eisdem: si igitur duę quantitates ex his, quę faciunt proportionem

portionem productam inter se fuerint æquales reducetur hæc proportio ad quatuor quantitates omologas, scilicet abiectis ambabus æqualibus. Sit gratia exempli prima æqualis quintæ: & quia in octauo modo proportio secũdi ad quartum producitur ex proportione primi ad quintum, & sexti ad tertium, ergo per exposita proportio secundi ad quartum, ut sexti ad tertium, & ita permutando, & conuertendo secundi ad sextum, ut quarti ad tertium, & tertij ad quartum, ut sexti ad secundum. *Vndecima petitione.*

Propositio octaua.

Si duarum proportionũ superiores numeri alternatim cum inferioribus multiplicentur, atq; coniungantur: erit proportio aggregati ad productum ex inferioribus inuicem proportio ex primis proportionibus composita.

a c h
b d
e f g

Sit proportio una a ad b, alia c ad d, ducatur b in c, fiatq; e & a in d, & fiat f, iunganturq; e & f & fiat h, & ducatur b in d et fiat g: dico proportionẽ h g compositam esse ex proportione a ad b, & c ad d. Quia enim ex b in c fit e, & ex b in d fit g, erit proportio e ad g, ut c ad d, & similiter, quia ex d in a fit f, & ex d in b fit g, erit f ad g ut a ad b. Sed e & f componunt h, igitur proportio h ad g est composita ex proportionibus e & f ad g, igitur per communem animi sententiam, & diffinitionem compositæ proportionis, proportio h ad g compoſita est ex proportionibus a ad b, & c ad d, quod est propositum. *Corm.* *Ex 13 petitione.* *Per 14 diffinitionem.*

Propositio nona.

Si duarum proportionum superiores numeri alternatim cum inferioribus multiplicentur, minusq; productum ex maiore detrahatur, erit residui ad productum ex inferioribus proportio uelut illa, quæ relinquitur detracta minore proportione ex maiore.

Hæc eodem modo probatur, ut præcedens, nisi quod h fit detracto e minore: gratia exempli ex f, & ita ex diffinitione patet propositum. *Corm. 15a*

Propositio decima.

Si fuerit alicuius quantitatis ad unam partem proportio uelut alterius partis ad secũdam quantitatem erit proportio cuiusuis quantitatis eiusdem generis ad secundam composita proportio ex proportionibus eiusdem quantitatis assumptæ ad utranq; partem primæ quantitatis seorsum.

a c b
e d

Sit a b quantitas diuisa in c, & sicut a b ad a c, ita b c ad d: eritq; iterum permutando a b ad b c, ut a c ad d, & sumatur quædam quantitas e eiusdem *Corm.*

dem tamen generis, cum illis dico quòd proportio e ad d est composita ex proportionibus e ad a c, & e ad b c. Posita ergo e tanquam superiore numero, & a c & c b inferioribus, erit ex octaua propositione huius proportio productorum ex e in a e, & coniunctorum, & ex consequenti per primam secundi Elementorum producti ex e in a b ad productum ex a c in c b composita ex proportionibus e ad a c, & e ad c b: at quod fit ex a c in c b, est æquale ei quod fit ex a b in d, eo quòd a b, a c, c b & d sunt omiologæ per decimamsextam sexti Elementorum: Proportio igitur producti ex e in a b ad productum ex d in a b est composita ex proportionibus e ad a c, & e ad c b: At proportio producti ex e in a b ad productum ex d in a b, est uelut e
13. Petit. ad d, per suppositā igitur proportio e ad d est composita ex proportionibus e ad a c, & e ad b c, quod fuit demonstrandum.

Propositio undecima.

Proportio aggregati quarumlibet duarum quantitatum ad aggregatum duarum æqualium quantitatum est composita ex proportionibus primis, & diuisa per duplam.

Cor^m. Sit proportio a ad c, & b ad d, & sint c & d æquales, dico quod proportio a b ad c d est composita ex proportionibus a ad c, & b ad d diuiso composito per duplam. Quia enim
Ex sexta Anim. com. sententia. e & d sunt æquales, erit b ad e, ut b ad d, quare ex diffinitione cùm proportio a b ad c d
Decimaquarta sit composita ex proportionibus a ad c, & b ad c, erit etiam composita ex dictis ex propositione e ad c, & b ad d,
13. Petit. statuatur ergo e æqualis c d media inter a b & c. Et erit per secundam propositionem proportio aggregati a b ad c producta ex
Per 2. Petit. proportione aggregati a b ad c, & e ad c, igitur proportio a b ad e erit proportio a b ad c, diuisa per proportionem e ad c, sed e ad c est
Per quintam Anim com. sententiam. dupla: igitur proportio a b ad c d est proportio a b ad c diuisa per duplam.

a	b
e	
c	d

Propositio duodecima.

Propositis duabus proportionibus unam alteri iungere absque multiplicatione.

Cor^m. Sint propositæ proportiones a ad c & b ad d, & assumo e ad c, iuxta ea quæ Euclides demonstrauit, ut b ad d, erit igitur
10. Petit.
Ex generali com. anim. sententia. proportio a e ad c, composita ex proportionibus a ad c, & e ad c, sed proportio e ad c est, ut b ad d, igitur proportio a e ad c composita est ex proportionibus a ad c, & b ad d.

e	a	b
	c	d

Aliter ex b in c fiat f ex a in d, g ex c in d h coniunctum ex f g, k.

Quia

Quia ergo ex c in b fit f, ex c in d h, erit f ad h, ut b ad d, igitur ut e ad c, sed a ad c, ut g ad h igitur a e ad c, ut k ad h, sed k ad h componitur ex proportionibus a ad c, & b ad d. Ex octaua harum igitur proportio a c ad c composita est ex eisdem. Forsan quis dicat hanc eandem esse octauae sed nõ est, in illa enim proportio comparatur ad productum, in hac ad unam ex quantitatibus. Per 13. Pet.



Ex hoc sequitur quod: Quaelibet duae quantitates quarum aggregatum est idem ad eam quantitatem, componunt eandem proportionem. Cor^m.

Propositio tertiadecima.

Proportio confusa aggregati primae & tertiae quatuor quantitatum omiologarum ad aggregatum secundae & quartae, est uelut composita ex eisdem diuisa per duplam.

Sint a ad b, ut c ad d, dico, quod erit confusa proportio a c aggregati ad aggregatũ b d, composita ex his proportionibus diuisae per duplam aequalis. Erit enim aggregati ex a c ad aggregatum ex b d, uelut a ad b per 18 quinti Elementorum. Sed proportiones a ad b, & c ad d componunt proportionem producti a in d, & c in b per octauam harum, ad productũ ex b in d, productum uerò ex a in d est aequale producto ex b in c per decimamsextam sexti Elementorum, & proportio producti ex b in c ad productum ex b in d est ue lut c ad d, quare ut aggregati a c ad aggregatum b d, igitur proportio composita ex a ad b, & c ad d, est uelut confusa bis sumpta. Igitur confusa est uelut composita diuisa per duplam per modum undecimae huius. Cor^m.

a	c
b	d

Propositio quartadecima.

Proportiones confusae, & coniunctae in tribus quantitatibus inuicem commutantur.

Sint tres quantitates, dico, quod proportio c ad a b confusa est, conuersa coniunctae a & b ad c. Nam per dicta proportio a b ad c efficit coniunctam ex a b ad c: sed c ad a b conuersa est eius, quae est a b ad c, & proportio c ad a b est confusa eius, quae est c ad a & b. Igitur proportio confusa in tribus quantitatibus est contraria coniunctae in eisdem. Cor^m. 14. diff.

a	b
	c

Ex quauis ergo illarum data, data erit & reliqua. Per 18. diff.

Propositio quintadecima.

Si fuerint quatuor quantitas proportio confusa aggregati primæ & tertiæ ad aggregatum secundæ, & quartæ erit ut monadis addito prouentu, qui fit diuisa differentia differentiarum primæ & secundæ, atque quartæ & tertiæ per aggregatum tertiæ, & quartæ ad ipsam monadem.

Cor. Sint quatuor quantitates a b, c, d, e f, & sit a b maior c in a h, & e f maior d in f g, & differentia f g & a h sit a k: dico proportionem a b, & d confusam ad c & e f, esse ut monadis addito prouentu, uel detracto a k diuisæ per aggregatum c & e f ad ipsam monadem, & manifestum est, quòd potest contingere pluribus modis: Primus ut a b sit maior c & e f minor d, & tunc differentiæ coniungentur, & prouentus, addetur monadi. Idem faciendum erit si a b sit maior c, & e f sit minor d, sed excessus superet defectum. At si uel a b sit minor c, & e f maior d, uel ita minor, ut c excessus supra b a sit maior defectu, detrahemus prouentum à monade. Alia cautio est quòd si fuerint utrinque excessus, aut defectus, minuemus minorem de maiore: si autem unus sit excessus alter defectus, iungemus illos, & post diuidemus. uno ergo demonstrato ut pote primo intelligentur reliqui. Quia ergo b h est æqualis c & e g æqualis d & h k æqualis g f, erit ex communi animi sententia aggregatum ex d & k b æquale aggregato ex c & e f, igitur per dicta proportio aggregati ad aggregatum est unum. at uerò diuisa k a per c & e f sit quantum diuisa eadem per b k, & d, sed diuisa k a per b k, & d iunctas, exit proportio a k ad aggregatum b k & d: igitur diuisa a k per aggregatum e f & c, exibit eadem proportio, igitur a b & d ad aggregatum c & e f est coniuncta ex monade & proportione a k ad aggregatum c & e f, quod erat demonstrandum.

d a k h b
e g f c

Cor. Ex hoc patet quod proportionum confusio fit iunctis denominatoribus numeratoris: multiplicatio multiplicatis: additio multiplicatis decussatim in numeratores ad productum ex denominatoribus, ut in exemplis.

Confusio

$\frac{7}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{12}{10}$

Multiplicatio

$\frac{7}{2}$—$\frac{5}{8}$ $\frac{35}{16}$

Additio

7 ╳ 5 66
2 8 —— 16

Propositio sextadecima.

Omnium quatuor quantitatum proposita prima, quæ non minorem habet proportionem ad suam correspondentem, quàm alia ad aliam erit proportio confusa illarum, ut producti ex aggregato primæ & tertiæ in tertiam,

d a f b
e c

tertiam, ad productum ex aggregato tertiæ & omiotatæ ad secundam in ipsam quartam.

Hæc magis reducit confusam proportionem ad notitiam, quàm præcedens, quia reducit ad proportionem productã, quę operatio est simplicissima, siue per multiplicationem quantitatum fiat; duæ sunt tantum multiplicationes, siue per eundem terminum sufficit alium addere. Summatur ergo a b, c, d & e, & non sit maior proportio d ad e, quàm a b ad c, & statuatur tunc prima a b, secunda c, tertia d, quarta e, & postquam non est minor ratio a b ad c, quàm d ad e, sumatur a f ad c, ut d ad e. licet enim hoc facere. Dico quod proportio confusa a b & d ad c & e est uelut producti ex aggregato a b & d in d ad productum ex aggregato a f & d in e. Statuatur aggregatum a b & d linea a d prima quantitas, & aggregatum a f & d; a d secunda quantitas, & d tertia, & c quarta, & ex a b in d fiat g, ex a d in e fiat h, erit ergo per primam propositionem g ad h producta ex proportionibus a b d ad a f d, & d ad e. Sed proportio a f d ad aggregatum c e, est uelut d ad e. Proportio uerò a b d ad a f d, & a f d ad e c producunt proportionem a b d ad c & e per secundam propositionem, harum igitur confusa a b ad c, & d ad e, & est proportio a b d ad c & e, producuntur ex proportionibus a b d ad a f d, & d ad e. Ergo proportio g ad h est confusa ex a b ad e, & d ad e, quod erat demonstrandum.

Per 10. Pet.





Per 13. Pet.

Propositio decimaseptima.

Omnes duę proportiones conuersæ producunt æqualem proportionem.

Sint duæ proportiones a ad b & b ad a conuersa, dico, quòd producunt proportionem æqualem. fiat enim b ad c, ut b ad a, erit igitur a æqualis c & b c conuersa eius quæ est a ad b, sed per secundam harum proportiones a ad b, & b ad c producunt proportionem a ad c, igitur proportiones etiam a ad b & b ad a producunt eandem.

Com.

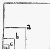
Per 6. Animi communem sententiam.

Propositio decimaoctaua.

Si fuerint quotlibet quantitates in continua proportione multiplici præter ultimam: proportio uerò penultimæ ad ultimam qualis residui primæ ad secundam, erit primæ ad aggregatum reliquarum uelut penultimæ ad ultimam.

Corr. Sint quantitates a b c d in continua proportione multiplici, sed d ad e sit uelut residui a & b ad b, dico proportionem a ad b c d e esse ut d ad e. Quia enim est gnomonis c ad quadratum d, ut d ad e ex supposito erit per coniunctam proportionem c & d ad d & e, ut

18. Propos. quinti Elem. d ad e, sed e gnomo cum quadrato d efficit quadratum e, igitur ut c quadrati ad d & e iuncta, ita d ad e. Rursus, quia b quadrati ad c quadratum,



Per 19. quinti Elem. ut c ad d erit gnomonis b ad quadratum c, ut gnomonis c ad quadratum d, & ita d ad e, igitur

Per 12. quinti Element. gnomonum b c cum quadrato d ad aggregatum c d e quadratorum, ut d ad c, sed c gnomo cum d quadrato perficit c quadratum, & c quadratum cum gnomone b perficit quadratum b, igitur proportio quadrati b ad quadrata c d e, ut d quadrati a d e. Et ita repetendo de quotuis quantitatibus in infinitum usque. Hæc proponitur ab Archimede in libro de quadrato æquali parabolæ, & minus generaliter & pluribus demonstratur. Ego tamen quia est generalis, describam illam per corrolarium: adda mque aliud quod ex hoc sequitur.

c gnom.	d
d quad.	e

b gnomo	c quad.
c gnomo	d quad.
d quad.	e quad.

Corm. 1. Si fuerint quotlibet quãtitates omnes analogæ præter ultimam, sit autem penultima ad ultimam qualis residui primæ & secundæ ad secundam, erit proportio primæ ad aggregatum omnium aliarum ueluti penultimæ ad ultimam.

Corm. Hæc enim est euidens, quia conuenit ei demonstratio proposita. exemplo autem innumeris à latere posito uides declarationem. nam proportio 16 ad 32 est uelut 27 residui primæ & secundæ ad ipsam secundam scilicet ad 54.

81	54	34	24	16	32
27	54			81	162

Corm. 2. Ex hoc patet etiam quòd assumptis omnibus, sub multiplicibus analogiæ usque in infinitum prima quantitas est multiplex aggregati omnium reliquarum numero 1 m: quo prima est multiplex secundæ.

Corm. 3. Si fuerint quotlibet quantitates in super particulari proportione analogæ, erit proportio primæ ad aggregatum omnium in infinitum iuxta proportionem multiplicem conuersam illius partis.

Corm. Velut collectæ in sesquialtera duplæ in sexquitertia triplæ in sexquiseptima septuplæ. Vt capio 512 448 392 343, & ita deinceps usque in infinitum aggregatum omnium earum erit 3584. Septu-

plum

plum 512, & aggregatum 18.12.8.5$\frac{1}{3}$, & ita deinceps in sexquialtera erit 54 duplum 27 primæ in eo ordine.

SCHOLIVM.

Ex quo patet genus demonstrandi nouum & pulchrum: nam supponatur 54, aggregatum duplum 27, primæ igitur addito 27 ad 54, cum sit dimidium, & addito 13$\frac{1}{2}$ dimidio 27 ad 27, nam ex supposito quantitas sequens est sexquialtera ad 27, igitur 81 est duplum ad 40$\frac{1}{2}$. Igitur conuertendo est proportio aggregati prioris ad 27 est dupla, ergo aggregatum est 54. Per 18. quinti Elem.

Ex hoc patet eandem generaliter quod proportio maioris quantitatis ad aggregatum reliquarum analogarum est, uelut eius quod prouenit diuiso quadrato maioris termini per differentiam eius, & sequentis maioris in eadem proportione ad ipsum maiorem. Cor^m. 4.

Exemplum sit proportio augens 25 & 35 duarum quintarum, uolo scire quantum sit aggregatum omnium citra 25, maximam accipio 35, ulteriorem ad 25, cuius differentia a 25 est 10, cum quo diuido 625 quadratum, exit 62$\frac{1}{2}$ aggregatum quantitatum. Et facile potest demonstrari. Si quis dicat in qua proportione sunt infinitæ quantitates analogæ cum 12, quæ iunctæ efficiunt 10, iunge 10 cum 12 fit 22, duc 22 in 12 fit 264, diuide 264 per 10, exit 26$\frac{2}{5}$, & in ea proportione erunt illæ quantitates, in qua sunt 26$\frac{2}{5}$ ad 12: duc per 5 fiunt 60, & 132 diuide per 12, exeunt 11 & 5, & ita erunt in proportione 11 ad 5 experiaris, & inuenies, & demonstratur ex prioribus. Com. Quæstio.

Propositio decimanona.

Si fuerint aliquot quantitates arithmeticæ omiologæ, quarum excessus sit æqualis minimæ, omnibus autem deficientibus supplementa ad æqualitatem maximæ adiungantur, erunt quadrata omnium quantitatum æqualium adiecto rursus quadrato primæ cum eo quod fit ex minima primi ordinis in aggregatū omnium quantitatum eiusdem tripla aggregato quadratorum omnium quantitatum primi ordinis pariter acceptis. Com.

Sint aliquot quantitates a b c d e f g h in continua pportione. Arithmetica dispositę ita ut minima earū quę sit h, sit ęqualis differentię quantitatum secundū ordinem dispositarū, uelut differentia a & b, & b & c, & c & d, et ita de alijs, addantur aūt supplemēta singulis harum, quæ sint i k l m n o p, ita ut oēs fiant ęquales cū suis supplementis ipsi lineę à maiori. Estq; idē ac si essent aliquot quanti-

i k l m n o p

a b c d e f g h

tates, & diuiderent singulę secundū numerum illarū, si quatuor in quatuor partes æquales, si quinq; in quinq;, si decem in decem, ea ratione ut ulnima diuideret, ubi est finis primæ partis, penultima ubi est finis secundæ partis, antepenultima ubi est finis tertiæ, & sic de alijs. Vocabo ergo primas quātitates ꝓpositas a b c d e f g h quantitates primi ordinis, sed quantitates æquales quæ constāt ex quantitatib. primi ordinis, & supplementis, appellabo quantitates secundi ordinis: ex quo patet quòd prima quātitas erit ex utroq; ordine, quia non est diuisa, reliquæ omnes differunt, quantitates uerò quas adiunxi nominabo supplemēta, & sunt una minus quā quantitates ordinum: ut si quātitates ordinum sint octo, erunt supplementa septem, & si quantitates ordinū, essent septem essent supplemēta sex, quia inter supplementa nō adnumerat̄ quantitas indiuisa. Erunt ergo supplementa i k l m n o p, quæ tanto erunt maiora quanto quantitates primi ordinis sunt minores, & contrà tanto maiora, quanto quātitates primi ordinis sunt maiores. quantitates aūt secundi ordinis appellabunt̄ a, b i, c k, d l, e m, f n, g o, & h p. Hæc uolui pluribus agere, ut dilucidior esset ꝓpositio. quæ licet nō sit difficilis, est tamē confusa ualde propter multitudinem quantitatū & ordinum. Dico ergo q̊d aggregatum quadratorū quantitatum secundi ordinis primo quadrato bis repetito, seu uno addito cū eo quod fit ex minima in aggregatum quantitatum primi ordinis est triplū aggregato ex quadratis omnibus quantitatū eiusdē primi ordinis, & ut res exemplo facilius innotescat, sint quātitates primi ordinis 8.7.6.5.4.3.2.1. quorum quadrata sint 64.49.36.25.16.& 9.4 & 1. quæ iuncta faciūt 204, dico quod si sumamus quadrata omnium quātitatum secundi ordinis, quæ sunt octies 64, & eis addiderimus unum quadratū ex his, ut fiant nouies 64, & erunt 556, simul iuncta & eis addamus, q̊d fit ex 1 quantitate minima primi ordinis in 36 aggregatum quantitatum omnium primi ordinis, & est tale productū 36, ut fiat totum 612, quod tale 612 est triplum 204, aggregati quadratorū primi ordinis unius demonstratio hęc est. Quia ex quarta secundi Element. Euclidis singula quadrata quantitatū diuisarū secundi ordinis constant ex quatuor partibus quarum duę sunt quadrata partium, reliquæ duæ sunt producta ex partibus inuicē bis, & quia h fuit æqualis i, & p ęqualis b, quia supplementa fuerūt ęqualia mutuò quantitatibus, & ita c æqualis o & k æqualis g & d, æqualis n & l, æqualis f, e aūt ęqualis m. Sequit̄ ergo quod sumptis duabus quantitatibus secundi ordinis habentibus supplemēta mutuò æqualia ipsis quantitatibus quod quadrata partium erūt dupla quadratis primarum quantitatum: ueluti capio b i secundam & h p ultimam, quarū quadrata

drata partium sunt quadrata b & i, & h & p, sed b est æqualis p, & h æqualis i. Ergo quattuor quadrata b i & h p sunt dupla quadratis b & h, & ita concludã de omnibus ubi duæ quantitates duabus com parantur: sed in e m quia est sola una quantitas, istud est etiam clarius, quia quadrata e & m sunt dupla quadrato e soli eo, quod & m sunt æquales. Igitur per demonstrata ab Euclide erit proportio omnium quadratorum b i, c k, d l, e m, f n, g o, h p, ad quadrata b c d e f g h, pariter accepta proportio dupla. at uerò addito quadrato a quadratis b c d e f g h, & erunt quadrata omnium quantitatum, & quadratis b i, c k, d l, e m, f n, g o, h p, duplo quadrati a scilicet semel, quia a est ex secundo ordine quantitatum, & semel, quia hoc fuit assumptum in Problemate. Sequitur ut quadrata omnia quãtitatum secundi ordinis, prout sunt diuisa in partes addito quadrato a, sint dupla quadratis primarum quantitatum, simul pariter acceptis. Reliquum est modo ut ostendamus dupla illorũ productorum, cum eo quod fit ex minima quantitate, scilicet h in aggregatum ipsarum quantitatum primi ordinis esse æquale quadratis, quantitatũ eiusdem primi ordinis pariter acceptis. Constat igitur, quod duplum i in b est æquale duplo h in ipsum b, quia h & i sunt æquales, & duplum k in ipsum c, est æquale quadruplo h in idem c, quia k est dupla h, & similiter duplum l in ipsum d est æquale sexcuplo, h in d, quia l est tripla h, & ita procedendo erunt illa dupla producta æqualia productis ex h in ipsas quantitates toties sumptis quantus est numerus, qui prouenit duplicato numero, secundum quẽ h continetur in illo supplemento, exemplum uolo duplum producti l in d bis, scio quòd supplementum l continet h ter, duplicabo tria & fient sex, igit duplũ l in d æquale est sexcuplo h in ipsum d. Quo constituto, cum suppositum sit producta illa duplicata cum ꝓducto h in aggregatum primarum quãtitatum esse æqualia quadratis ipsarum quantitatum, igitur addemus productũ ex h in singulas quantitates productis illis prioribus, & fiet productum h in a semel, in b ter, in c quinquies, in d septies, in e nouies, in f undecies, in g tredecies, & in h quindecies æquale duplo producti uniuscuiusq; quantitatis in suum supplementum cum producto h in aggregatũ ipsarum quantitarum, at quadratum a est equale producto ex h in eam, quę talem habet proportionem ad ipsum a, qualẽ habet a ad ipsum h per demonstrata ab Euclide, & pariter de quadrato b, quod est ęquale ei quod fit ex h in eam quæ toties continet b, quotiens b continet h, & ita quadratum c æquale est ei, quod continetur sub h, & habente proportionem ad b eandem, quam b ad h, & similiter de quadrato c & omnibus reliquis, usq; ad h ipsum. Gratia ergo exem

In 5. Elem. Prop. 12.

Lib. 6. Ele. Prop. 17.

pli quadratum a, erit æquale producto ex h in omnes quãtitates secundas, quia quotus est numerus quantitatum, totus est numerus secundum quem a continet h, & similiter quotus est numerus quantitatum incipiendo à b, & quotus est numerus quantitatum incipiendo à c, toties b uel c cõtinet h, & ita de alijs, quadrata ergo omnium quantitatum simul iuncta sunt æqualia productis ex h in singulas illarum toties sumptis, quoties illæ cõtinent h, seu quotus est numerus illius quantitatis, incipiendo ab h, & numerãdo uersus a. Rursus dico, quod productum multiplicis cuiuslibet quãtitatis in minimam, seu quadratum eiusdem quantitatis æquale est producto eiusdem quantitatis, & dupli omnium sequentium primi ordinis in ipsam minimam quantitatem, uelut quadratum a est æquale producto ex h in a, & in duplum b c d e f g h, hoc autẽ facile est probare in his quantitatibus, quia si quadratum a est æquale producto h in omnes quantitates secundi ordinis, & omnes quantitates secundi ordinis simul sumptæ sunt æquales ipsi a, & duplo reliquarũ primi ordinis, quia tales quantitates sunt æquales suis supplementis uicissim, ut h cum i, k cum g, f cum l, e cũ m, ergo tam supplementa, quàm quantitates primi ordinis sunt dimidium quantitatum secundi ordinis, ergo duplum quantitatum primi ordinis est dimidium quantitatum secundi ordinis, uerũm de b dico idem accidere, quia quadratum b est æquale producto ex h in b, & in duplum reliquarum à b, scilicet duplum c d e f g h, & hoc est ostendere, quod istæ quantitates sunt dimidium totidem quantitatum æqualium b, nam c est minor b in h, & supplementum p quod est æquale ipsi b, si tota h p fiat æqualis ipsi b, ut pote h q erit ipsa q dempta h æqualis ipsi c, ergo quantitates primi ordinis semper sunt æquales supplementis non ueris, sed prioris quantitatis assumptæ, seu in comparatione ad illam, quadratum igitur b est æquale ꝑducto ex h in b, & in duplum c d e f g h, & similiter per eadem, quadratum c est æquale producto ex h in c, & in duplum d e f g h, & sic de alijs. Habemus ergo, quod quadrata a b c d e f g h simul iuncta sunt æqualia producto ex h in a, & in duplum reliquarum, & ex h in b, & in duplum reliquarum sequentium, & producto ex h in e semel, & in duplum sequentium usq; ad h, & ita de reliquis. hoc enim est, quod nuper demonstrauimus. Antea quoq; demõstratum est, quod duplum b in i, c in k, d in l, e in m, f in n, g in o, h in p, cũ producto h in aggregatũ a b c d e f g h erat æquale productis ex h in a semel, & in b ter, & in e quinquies, in d septies, in c nouies, in f undecies, in g tredecies, in seipsam h quindecies, detractis ergo ꝑ ordinẽ, q̃d fit ex h in a ab utroq; aggregato, & ex h in b c d e f g h bis relinquetur ex una parte, q; fit ex h in b semel

cum

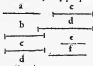
cum suis duplicatis sequentibus, & in c, & in d, & in reliquis pariter conduplicatis suis sequentibus ex altera, quod, fit ex h in b semel, in c ter, in d quinquies, in e septies, in f nouies, in g undecies, in h tredecies. detractis ergo rursus quod fit ex h in b semel, & ex h in c d e f g h bis relinquetur, quod fit ex h in c, & duplo sequentium, & d & duplo sequentium, & e & aliarum pariter: & ex alia parte, quod fit ex h in e semel, & in d ter, & in e quinquies, in f septies, in g nouies, in h undecies. Ab his rursus detractis, quod fit ex h in c semel, & in sequentes bis, relinquetur h in d semel cum suis sequentibus bis, & in e semel cum suis sequentibus & in f, & in g & in h pariter, & ex alia parte, quod fit ex h in d semel, in e ter, f quinquies, g septies, h nouies, ab his rursus detraho, quod fit ex h in d semel, & in sequentes bis, relinquetur ex una parte, quod fit ex h in e f g h cum duplo sequentium ex alia, quod fit ex h in e semel, f ter, g quinquies, h septies, & similiter ab his detractis, quod fit ex h in e semel, & bis in sequentes, relinquetur ex una parte, quod fit ex h in f semel, & in g h bis, & in g semel, & in h bis, & in h semel, & ex alia, quod fit ex h in f semel, in g ter, in h quinquies. Iterum detractis, quod fit ex h in f semel, & in g h bis communiter relinquetur, quod fit ex h in g semel, & in h bis, & in h semel, & ex alia parte quod fit ex h in g semel, & ex h in h ter. Sed ista, quæ relicta sunt iam, sunt manifestè æqualia, ergo etiam prima aggregata ab initio fuere æqualia, ergo & æqualia illis quadrata a b c d e f g h his, quæ fiunt ex h in easdem quantitates cum duplo producti b in i, c in k, d in l, e in m, f in n, g in o, h in p, sed iam his quadratis a b c d e f g h demonstrata sunt esse dupla quadrata h p, g o, f n, e m, d l, c k, b i, cum duplo quadrati a, ergo quadrata omnium quantitatum secundi ordinis cum quadrato a rursus repetito, & producto h in aggregatum quantitatum primi ordinis sunt tripla quadratis quantitatum primi ordinis pariter acceptis, quod fuit propositum, & fuit Archimedis in libro de lineis spiralibus, & ego adieci hic propter modum demonstrandi, qui est elegantissimus, & procedit ex principijs arithmeticis, & diuersis à communibus, & ideo non reuoluitur, ut solent reliquæ quæstiones.

Propositio uigesima.

Cùm fuerint quatuor quantitates, fueritque secunda æqualis tertiæ, aut primæ æqualis quartæ, erit proportio primæ ad quartam, aut tertiæ ad secundam producta ex proportionibus primæ ad secundam, & tertiæ ad quartam.

Cùm enim quantitates hæ non fuerint æquales, cõstat per secun- Corr.
dam

dam harum, quod proportio primæ ad quartã producitur ex proportione primæ ad secundam, secundę ad tertiam, & tertię ad quartam: ergo non ex solis proportionibus primæ ad secundam, & tertiæ ad quartam, & similiter ex prima harum proportio primę ad secundam, & tertiæ ad quartam producunt proportionem producti primæ in secundam ad productum tertiæ in quartam. Et in multiplicatione proportio, quæ solet esse inter producta illa, & est quasi duplicata est inter ipsas quantitates. Sint igitur quantitates a b c d, & sit b æqualis c, ponantur ergo recto ordine a b c d, critq; proportio a ad d producta ex proportionibus a ad b, b ad c, & c ad d, producantur igitur ex proportionibus a ad b, c ad d, proportio c ad f, erit igitur proportio e ad f, si multiplicetur per proportionem b ad c eadem quæ prius, &

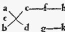


Per 16.Pet. producta iam est eadem ei, quæ est a ad d, ergo proportio a ad d erit producta ex proportionibus a ad b, c ad d per primam propositionem. Quod uerò diximus de prima & quarta si sint æquales, manifestum est, quòd res redit ad idem solum transmutato ordine, ut tertia, & quarta præmittantur primę, & secundæ. Hæc igitur propositio nihil aliud innuit, quàm quod in hoc casu productio, quæ solet fieri ex tribus proportionibus fiat ex duabus tantum.

Propositio uigesimaprima.

Cùm decussatim ducta fuerit prima in quartam, & secunda in tertiam, productumq; primæ in quartam diuisum fuerit per productum secundæ in tertiam erit proportio primæ ad secundam diuisa per proportionem tertiæ ad quartam. Et similiter interposita omiologa.

Cor^m. Primum exponamus secundam partem, sit a ad b, quam uolo diuidere per proportionem c ad d, facio e ad b. ut c ad d, erit



Per 10.Pet. ergo per secũdam harum proportio ad b producta ex proportione a ad e, & e ad b, quare ex a ad e, & c ad d, ergo diuisa proportione a ad b per proportionem c ad d exit proportio a ad e, & hic est secundus modus. Primus autem modus ducatur a in d & fiat f, & b in c & fiat g, dico proportionem f ad g esse prouentum proportionis a ad b, diuide per proportionem c ad d, ducatur igitur c in f & fiat h, & d in g & fiat k, quia igitur h producitur ex c in f, & f producitur ex a in d, ergo h producetur ex producto c in d, in a, & similiter quia k producitur ex d in g, & g producitur ex b in c, ergo

c,ergo k producetur ex c d in b,ergo ex c d in a fit h, ex c d in b fit k, erit a ad b ut h ad k,igitur ex prima harum cum ex c in f producatur h,& ex d in g k,& dicatur produci proportio h ad k ex proportione c ad d,& f ad g, & proportio h ad k sit eadem, quæ a ad b, ergo proportio a ad b producitur ex c ad d,& f ad g,ergo diuisa proportione a ad b prodibit proportio f ad g,quod fuit propositum.

Propositio uigesimasecunda.

Cùm fuerit proportio primæ ad secundam maior, quàm tertiæ ad quartam,erit confusa ex his maior quàm tertiæ ad quartam, minor autem quàm primæ ad secundam.

Sit proportio a ad b maior quàm c ad d, dico, quod confusa ex a c ad b d est maior, quàm c ad d, et minor quàm a ad b,ut enim c ad d ita fiat e ad b, eritq; per tertiamdecimam harum e c ad b d confusa minor quàm a c ad b d,nam e est minor a, quia proportionem habent minorem ad b quam a eo quòd e habet proportionem ad b,quam c ad d,quæ autē c ad d minor, quàm a ad b,ut suppositum est,igitur e c ad b d minor,quàm a b ad c d,e b autem ad c d est,ut demonstratum est qualis c ad d, ergo c ad d minor,quàm confusa a b ad c d, quod est secundum per idem probabitur,& primum posita f ad d,ut a ad b, eritq; a maior c, igitur maior proportio a f ad b d,quàm a c ad b d, sed a f ad b d, ut a ad b per eandem tertiamdecimam huius ergo proportio confusa a b ad c d est minor, quàm a ad b. Com. Per 1 a. Pet.

Propositio uigesimatertia.

Omnis motus naturalis ad locum suum est; ideo per rectam lineam fit.

Motus naturalis est,ut conseruetur corpus, & conueniat locus corpori,igitur fit ad suum locum. Locus autem dicitur in comparatione ad uniuersum.ideo omnis motus naturalis est à centro mundi sursum,uel ad centrum deorsum.Et quia quanto natura celerius suum finem potest assequi(quia finis bonus est aliter non illum appeteret)eum quærit,cùm sit sapientissimæ uitæ ministra:at linea recta breuissima est Euclide teste à puncto ad punctum,igitur omnis motus naturalis est sursum aut deorsum per rectam lineam. Com. Diff. tertia primi Elem.

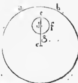
Propositio uigesimaquarta.

Omnis motus circularis uoluntarius est.

Sit motus in circulo seu per circulum in orbe cuius sit centrum, sit c mundi centrum:igitur ex diffinitione circuli tantum distabit a, quantum b ab ipso c:sed in motu naturali per pręcedentem necesse est,ut recta feratur ad c,uel recedat, igitur motus a est uoluntarius,

non

non naturalis, nam si uiolentus esset, non esset perpetuus. Omnia ergo astra feruntur circa centrum mundi. Sit modo rota efg, dico e non moueri motu circulari nam linea e c lõgior est g c, ergo recta mouetur ad centrum non circa centrum. Indicio etiam id est: quòd si in e ponatur frustum aliquod insigne plumbi in motu ad g per f descendet raptim: at dum ex g in e magna cum difficultate, igitur motus hic non est naturalis, nec circularis. nihil etiam hoc modo sponte mouetur. Sed cum non moueatur per rectam naturaliter, nec æquidistans à centro per circulum relinquitur, ut moueatur motu uiolento, aut misto, sed non ex uoluntario, cum nullo modo moueatur æquidistans à centro, sed semper ab e lineæ ad centrum fiant breuiores, liquet esse motum uiolentum: aut mistum ex naturali, & uiolento.



Propositio uigesimaquinta.

Tres sunt motus omnino simplices naturalis, uoluntarius & uiolentus.

Cor^m. Tres sunt modi, quibus possunt moueri in comparatione ad centrum scilicet uel recta cum centro, uel æquidistando à centro, uel neutro modo, igitur tres motus. Rursus uel à principio interiore non intelligente, & est naturalis, uel intelligente & est uoluntarius: uel exteriore & est uiolentus. Hæc autem diuisio est solum propria non prima. Nam est uiolentus in recta ad centrum: ideo omnis, qui non est in recta ad centrum, nec æquidistat, uiolentus est: non tamen omnis uiolentus est extra rectam. Attractio autem, quæ fit ob raritatem corporum, seu, ut dicunt, à uacuo, uiolenta est non naturalis nisi ratione finis, non agentis. Sunt enim quatuor genera mo-
7. Phys. cap. 2. tus uiolenti ab Aristotele posita, uectio, tractio, pulsio, & uolutio: quanquam his non opus sit in demonstratiua scientia. cõstat enim uolutionem ex tractione, & pulsione apud illum consistere.

Propositio uigesima.

Motus ergo compositi quatuor necessariò sunt species.

Si tantum sunt tres species simplicium, constat ratione arithmetica quatuor esse compositorum. Disquiramus ergo an sint naturaliter tot species, forsan enim repugnabit aliquis alicui. Porrò uideamus primò, quot sint uiolentorum species: Prima erit cum non secundum rectam lineam fuerit: nec à centro æquidistantem. Secunda cum fuerit secundum rectam, sed non ad centrum. Tertia cum fuerit in recta ad centrum, sed contrario modo, uelut terræ sursum.

Quarta

Quarta cùm in recta ad centrum, secundum naturam, sed nõ à principio naturali. Velut cum quis proijcit lapidem rectà in terram è turri uiolentius, quàm ille sua grauitate descensurus esset: Hic igitur motus est compositus ex naturali, & uiolento. Animalium autem motus uoluntarius est, cùm sit à principio interiore cognoscente: & sit quatenus à principio in linea circulari æqualiter distante à centro: sed quia obstat grauitas, ideò mistus est ex naturali, & uoluntario. Sed circularis, & uiolentus soli esse non possunt: nam uiolentus est necessariò in corpore graui aut leui: sed omne corpus graue aut leue, cùm mouetur, naturaliter mouetur saltem in fine: & per totum motum, motu occulto, qui maximè in hoc libro dignus est consideratione, igitur motus uoluntarius, & uiolentus non possunt esse simul soli. Erunt ergo secundum naturam tantùm tres species. Velut cùm quis scandit, aut salit: Est enim motus naturalis saltem in fine, & uoluntarius, & uiolentus. Si quis autem uelit uiolentum cum uoluntario copulare dicemus constare eam compositionem in initio saliendi. Motum autem occultum uocamus grauitatem aut leuitatem.

Propositio uigesimaseptima.

Motus uoluntarius est in loco: naturalis ad locum: uiolentus ex loco.

Hæc est tertia differentia primarum specierum motuum. uoluntarius fit manente corpore toto in eodem loco, ideo proprius est cœlo, corpora autem animalium in eodem loco feruntur: quia in eodem orbe nata redire ad proprium locum. Et ideò, ut dixi, est motus mistus ex naturali, & uoluntario, qui si per se fieret, non fatigaret mobile, cùm ex utroque principio ab interiore ei procedat. Sed quia fit per musculos, qui trahuntur: hic autem motus est uiolentus, ideò per consequentiam fatigat. Qui uerò naturalis, est ut redeat corpus ad suum locum, igitur naturalis est ad locum. Sed uiolenti finis est, ut protrudatur ex loco in quo est, non habens certum finem. licet enim qui trahit, ad suum locum trahat, non tamen ad locum mobilis.

Propositio uigesimaoctaua.

Motus quilibet naturalis aut uiolentus in aliquo medio fit.

Cùm uacuum non detur, & omnis motus naturalis fit ad locum, Co^m. et uiolentus ex loco per præcedentem, igitur cùm non fit in medio, uacuum erit in aliquo corpore, uelut aëre, aqua, igne, ligno.

Propositio uigesimanona.

Omnis motus uoluntarius æqualis est semper; simpliciter etiam quilibet alius motus.

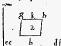
C Motus

Com. Motus uoluntarius non habet, quod fatiget, & summa perfectio est æqualitas, & natura quæ mouet non debilitatur, igitur perpetuo perseuerat æqualis. neque enim est, ut dixi, per medium corpus. Naturalis quoque, & uiolentus cum ratione proportionis mouentis supra mobile per se non uarientur, & ab æquali proportione æqualis uelocitas proueniat, igitur natura tales motus sunt æquales, nam in utroque mouens, mouet secundum ultimam suam uim.

Propositio trigesima.

In omni corpore mobili in medio, partes medij resistunt obuiæ, aliæ impellunt.

Co^m. Sit mobile a cui partes subiaceant directæ b, & sit graue. Et patet ne diuidatur b resistere, cum autem superauerit, partes b descendunt ante a, & trahunt partes c & d adhærentes secum, atque ita e e d f adiuuant ad descensum partes etiam laterales g & h cum a transit in b, ne detur uacuum, transeunt in k ueloci motu, ergo propellunt a maio reimpetu inferius.



Cor^m. Ex quo patet, quod in omni motu naturali, uel uiolento fit augumentum uelocitatis ab initio saltem usque ad aliquid.

Co^m. Et ideò etiam bellicæ machinæ cuiuscunque generis certam exigunt distantiam, ut uiolentius feriant.

Propositio trigesimaprima.

Omnis motus naturalis in æquali medio ualidior est in fine, quàm in principio: uiolentus contrà.

Com. Cùm enim ex præcedenti augeantur semper ob medium, & causa, quæ mouet, sit perpetua, & à principio æterno, quod per dicta æqualiter mouet, igitur motus ille fiet uelocior in fine quàm in alia parte temporis. In uiolento autem, cùm peruenit ad finem desinit
29. Propos. uis illa necessariò, quæ mouet, & superatur à ui naturali, quæ mouet in contrarium, igitur antequam cesset motus fiet tardissimus in fine.

Cor^m. Ex quo patet, quòd motus quadrifariam misti dicuntur, aut specie, ut cùm quis iacit lapidem è turri: uel ex occulto naturali, & uiolento manifesto: uelut cùm quis iacit lapidem, & descendit postmodum ex b in c motu utroque manifesto, sed ex a in b motu uiolento manifesto, & naturali occulto: uel ratione medij, & hoc modo omnis motus naturalis etiam non solum uiolentus est



mistus ex proportione uirtutis mouentis, cum motu medij, ad medium ipsum, uel si uiolentus sit ex proportione uirtutis mouentis.

& medij ad mobile, ac medium, quod resistit. Quarto ex motibus imperfectis natura sua, & non est uera mistio, & hoc apparet in motibus uoluntarijs animalium, qui non sunt neque æquales, neque perfecte circa medium: sed sunt potius similes uoluntarijs. Et ideo demonstrationes illæ Aristotelis quoad usum nihil iuuant nos.

Propositio trigesimasecunda.

Omne mobile naturaliter motum, seu uiolenter uelocius mouetur in medio rariore, quàm densiore. Maior quoque est proportio finis motus in corpore rariore ad finem motus in corpore densiore, quàm principij. In uiolento autem celeriùs perueniet ad finem motus in corpore densiore.

A mobile moueatur in b medio rariore, & in c densiore, igitur b minus resistit, quàm c & magis adiuuat, quia uelocius mouetur: igitur duplici de causa a mouebitur uelocius in b quàm in c: & quia per corrolarium trigesimæ, & præcedentis proportio finis (ubi æqualiter moueantur) ad sua principia maior erit in d, quàm in e: ergo per demõstrata à Campano posita d prima, b secunda, e tertia, c quarta, maior erit proportio d ad e, quàm b ad c quod fuit propositum in naturali.

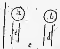
A	A
b	c
d	e

Com.

Propositio trigesimatertia.

Omnia duo mobilia æqualis undique magnitudinis, quæ æquali in tempore æqualia spatia pertranseunt in diuersis substantia medijs, necesse est, ut sit ponderis ad pondus, quemadmodum medij ad medium, proportio duplicata.

Sint duo mobilia a & b magnitudine, & forma omnino paria, & sint media c & d, exempli gratia: & pertranseant æquale spatium in utroque in eodem tempore, e dico proportionem ponderis b ad pondus a esse duplicatam ei quæ est raritatis c ad raritatem d. Quia enim feruntur æqualiter, nam in æquali tempore, seu eodem æqualia spatia pertranseunt, erit proportio potentiæ a cum suo auxilio ad id, quod resistit ex c ut b cum suo auxilio ad id, quod resistit ex d, permutando igitur d ad c, ut b ad a, sed c ad d proportio raritatis duplicat actionem, tum minus resistendo, tum adiuuando motum a, igitur proportio differentiæ motus est duplicata proportioni raritatis: sed proportio motus est æqualis proportioni ponderis uicissim per uigesimamsextam sexti Elementorum b ad a, igitur proportio b ad a ponderis est duplicata ei, quæ est raritatis c ad raritatem d. Com.



SCHOLIVM PRIMVM.

Ne tamen sine exemplo intelligas hanc duplicatam rationem, proponatur raritas quatuor, d unum, a pondus duodecim librarum, tunc resistit solum ex quarta parte, & efficit a quadruplo maioris actionis, scilicet ut quadraginta octo, tota igitur proportio, qua mouebitur a in c, erit centum nonaginta duorum, & hoc diuidemus per d, quod est unum, exibit podus b centum nonaginta duo. Proportio igitur b ad a est sexdecupla, & hæc est duplicata quadruplæ raritatis c ad raritatem d.

c	4	d.1.&.
a	12	b. 192.

Quod si quis neget tantundem augere c actionem a, quanto minus resistit, sed aut magis aut minus, & sit proportio b ad a dupli cata ipsi f, dico f esse proportionem c ad d, nam proportio b ad a est uelut actionis c ad d per decimamsextam sexti Elementorum, ergo ex auxilio c in proportionem a ad c fit proportio b ad a, sed ex fin se fit proportio b ad a ex diffinitione proportionis duplicatæ. Sed ex duabus proportionibus a ad c, & actionis ex c ad a producitur proportio b ad a, igitur per decimamseptimā sexti Elementorum proportio c ad d est media inter proportiones a ad c, & actionis a in c, quare æqualis f, igitur proportio b ad a duplicata ei, quæ est c ad d quod erat demonstrandum.

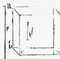
SCHOLIVM SECVNDVM.

Si autem media fuerint diuersarum rationum, ut aqua, & aër non demonstrat argumentum, quia pondera inter se non seruant rationem. Nam lignum centum librarum ex salicis arbore, non magis descendit, quam lignum libræ unius. Ideo nec in comparatione ad medium aëris.

Propositio trigesimaquarta.

Proportio corporis cubi ad suam superficiem quadratam, est uelut eiusdem superficiei ad latus, eiusdem uero ad monadem.

Com. Sit cubus a b c eius quadrata, superficies a c, latus a b, monas d, dico eas esse inuicem analogas. Quia enim proportio a b c ad a c est, ut quoties assumitur a c in a b c, & toties etiam assumitur a b in a c ex diffinitione Eucli



Prima ex Campano. dis secundo Elementorum, si ergo monas est in continua proportione, habeo intentum: si non ponatur e media inter a e & d, erit ergo per decimam noni Elementorum e latus a c, ergo æqualis a b, igitur cum a c, e & d sint analogæ, erunt & a b c, a b, & d analogæ, quod fuit demonstrandum.

Propositio

Propositio trigesimaquinta.

Vocum magnitudines excrescunt in acumine non in grauitate, finis autem est in utroque extremo, propter hoc minima facta uariatione in hypate acutæ uix ferunt.

Quoniam facta uariatione in hypate, quæ est in Diapason, uel bis Diapason maiore interuallo distat, ueluti ex a in b in grauiore, maius est interuallum ex c in d, igitur maior est b d, quàm a c ergo singulæ uoces inter b & d magis distant, quàm inter a & c, & quanto magis appropinquant ad d, igitur d maius est quàm b. Ergo magnitudo est ratione acuitatis, non grauitatis, cum supposuerimus d esse acutiorem b & cipso a. Ostenditur etiam idem quia uox grauis fit ex priuatione motus sicut acuta ex uehementia. Motus autem est res, quies, priuatio. Com.

Diapason
a————c
Diapason
b————d

Secundum sic: nam remissio mota non feriet aurem, ideò sonum non pariet ob nimiam tarditatem. At in uelocissimo motu oportet uel fidem uel arteriam contrahi, & non contrahitur nisi per musculos, igitur contentio illa finem habet. Si autem non sit necessarium habere, uel ualde procul posit extendi contentio, ut in machinis igneis strepitus fit maximus, nam motus, ut motus est etiam in aëre nullum finem per se habet nisi ratione instrumenti, ergo strepitus tantus esse potest, ut fermè obsurdescant, qui audierint, ut ferunt de Nili cataractis.

Tertium sic sit a b humilior uox, quæ excrescat semitonio minore solum in c, & sit d e dupla ad a b secundum naturam, ut in uocibus medijs fiet, ut si e debeat excrescere semitonio minore per decimamnonam quinti Elemẽtorum fe dupla c b, & in acutis ubi excreuerit ad diapason quadrupla: pueri autem uox, quæ iam diapason altior est d e, erit bis diapason, & ideò quadrupla b c, sed in acutioribus erit dupla, nullus enim puer est adeo fractæ uocis, qui supra humillimam non ascendat per diapason, igitur interuallum uocum erit octuplum a d, b c, sed communiter ascendunt ad bis diapason, igitur interuallum unius uocis etiam cum semitonio proportionem habentis est æquale fermè toti a b, cum autem in diapason sint duodecim semitonia, & duo comata, manifestum est, quod extensio illa erit maxima in cõparatione grauioris uocis a b. Et ideò minimum incrementum in humilioribus uocibus, ubi quis coga-

f e d
c b a

tur ascendere, maximum esse uidetur, adeò ut ægrè à pluribus feratur, à quibusdam non omnino feratur.

SCHOLIVM.

Ob hoc natura fecit, ut non quemadmodum in fidibus uoces ex breuitate intenderentur, sed ex constrictione ligulæ, ut dicunt, super asperam arteriam uox ad diapason acueretur addito impetu proportione, ut ex constrictione, & impetu cõsurgeret dupla proportio. Hoc autem manifestè experimur in elymis in quibus nulla prorsus facta mutatione instrumenti constantibus digitis omnibus præter pollicem sinistræ uocem exacuimus ad diapason, inde etiam ad bis diapason: sicut declarauimus in commentarijs Epidemiorum.

Propositio trigesimasexta.

Si proportio per proportionem minorem æquali ducatur, proportio minor producetur. Vnde manifestum est duas proportiones minores æqualitate inuicem ductas proportionem minorem unaquaq; illarum producere.

Com. Proportio a b ad c, qualiscunq; sit, ducatur in proportionem minorem æqualitate f ad g, dico quod producta proportio erit minor ea, quæ est a b ad c fiat d ad a b, ut f ad g, et erit per secundam huius d ad c producta ex proportionibus a b ad c, & f g. Itemq; per decimam quartam quinti Elementorũ erit d minor a b, igitur maior a b ad c, quàm d ad c. igitur quàm proportio a b ad c in proportionem f ad g. Sit autem utraq; minor æqualitate ea, quæ a b ad c, & ea quæ f ad g, dico productam unamquamq; earum esse minorem. Quod enim (manentibus his, quæ dicta sunt) minor sit d ad c, quam a b ad c ex prima parte ostensum est. Quòd uerò etiam minor sit d ad c, quàm d ad a b, & ex consequenti quàm f ad g demonstratur sic. Quia enim minor est a b ad c, æqualitate erit a b minor c, fiat ergo h æqualis a b, erit ergo d ad h, ut d ad a b per septimam quinti Elementorum, at d ad c minor quàm d ad h per octauam eiusdem, igitur minor d ad c, quàm d ad a b, igitur patet propositum.

Propositio trigesimaseptima.

Si plures homines, quorum nulli per se nauim mouere possint, aut pondus ferre simul iuncti eam moueant, aut pondus ferant, erunt illæ proportiones coniunctæ non productæ.

Com. Cùm enim primus non possit mouere nec secundus, erunt proportiones minores æqualitate, Ideo per secundam partem præcedentis multo minus mouerent duo, quàm unus. Et si quatuor mouerent

uerent unusquisque per se mouere non posset, adderetur si proportio produceretur, fieret minor, ergo minus mouerent quinque quàm quatuor ex ijsdem, quod est absurdum.

Propositio trigesimaoctaua.

Omne corpus tantùm resistit motui contrario suo naturali quantum mouetur occulto motu quiescendo.

Sit a corpus quiescens in pauimento b, & mouetur in eo occulto motu uersus centrum, ut suprà uisum est, contrarius illi sit motus ad c, si ergo a quiesceret in c moueretur ad b occulto motu certa ui, ergo eadem restitit, ne traheretur ad c. Manifestum est autem, quod hic motus occultus est minor manifesto. Com. In commen. 26. Propos. Per 30. Propos.



Ex hoc patet cur naues & currus ab initio tardè & difficulter moueantur, ubi moueri cœperint motus augetur: quoniam resistunt per motum occultum naturalem qui maximus est dum quiescunt, ut etiam docebat philosophus in mechanicis, nam motus ille naturalis est, & ideò contrarius uiolento: Ergo cum iam mouetur uiolenter minus, mouetur naturaliter, igitur minus resistit. Declarabitur enim infrà quod omne quod mouetur duobus motibus tanto minus uno mouetur quanto magis altero. Com. Quæst. 31. Propos. 59.

Propositio trigesimanona.

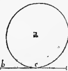
Ab æquali aut minore ui, quàm sit impedimentũ, non fit motus.

Sit a quod resistat, ne sursum trahatur per decem, dico, quod nõ sursum trahetur neque à decem, neque minore: nam si impedimentum non esset, moueretur infra ut decem, ergo si traheretur sursum per decem tantum moueretur sursum, quantũ deorsum, ergo quiesceret. Si uerò à minore moueretur à maiore ui deorsum, quàm sursum, ergo deorsum simpliciter non sursum. Com.

Propositio quadragesima.

Omne corpus sphæricum tangens planum in puncto mouetur ad latus per quancunque uim, quæ medium diuidere potest.

Sit corpus ad unguem sphæricum a tangens planum b in puncto c (est enim hoc necessarium ex demonstratis ab Euclide in decimasexta Propositione tertij Elementorum) dico, quod mouebitur à ui, quæ potest scindere aërem. Nam cum non ascendat, nec descendat, sed quasi in circulo ad centrum mundi moueatur, pondus non affert. Neque ratione magnitudinis contactus, cum sit in puncto solo, igitur remanet solum aëris impedimentum. Com.



Cor^m. 1. Ex hoc liquet, quod oportet b planum esse ex durissima materia, quæ nullo modo cedat, aliter tanget plusquàm in puncto.

Cor^m. 2. Vix fieri potest, ut in elementaribus sphæra tangat planum in puncto. Vel quia planum non erit exactè rectum, uel non durum, ut prorsus non cēdat, uel non ad æquilibrium positum, uel sphæra non erit exactè rotunda.

Propositio quadragesimaprima.

Si fuerint duæ quantitates sumaturq; totius aggregatum maioris & minoris, quoties aggregatum minoris, & maioris, erit proportio confusa maioris aggregati ad minus, minor quàm multiplicis maioris ad multiplex minoris.

a
b

Com. Sint duæ magnitudines a & b, & sit a maior b, & sumatur exempli gratia a quater cum b semel, & b quater cum a semel, dico, quod proportio (quam confusam esse liquet) aggregati primi ad secundum, est
Ex 18. diff. minor quàm quadrupla. Constat enim quod proporrio quadrupli a ad a est maior, quam b ad quadruplum b, cum una sit quadrupla, alia subquadrupla, igitur per uigesimamsecundam huius ag-
In 2. lib. de gregati quadrupli a cum b semel, ad quadruplum b cum a semel mi-
Atqui ponderan. nor, quàm quadrupli a ad a, & maior quàm b ad quadruplum b, &
est pro intellectu Archimedis.

Propos. 10. Propositio quadragesimasecunda.

Trahentium nauim, ut ferentium pondera proportiones in se inuicem, quomodo ducere oporteat considerare.

Com. Hoc quomodo non possit fieri suprà docuimus, nunc etiam ge-
Propos. 37. neraliter dicam, cum consistant hæc in duobus terminis, productio uerò præsupponit quatuor terminos, ut in prima propositione, aut saltem tres, atque in his medius habet rationem mouentis, & moti, ergo cum in huiusmodi nō sint quatuor termini, nec tres, è quibus unus sit mouens, & motum proportio non poterit produci. Illud etiam patet exemplo, nam si esset lapis, aut nauis obsistens ut sex, & essent homines uiribus singuli, ut quatuor cum dimidio, tres mouerent in proportione dupla sexquiquarta perdicta superius eodem loco, at si proportio duci posset aliquorum hominum numerus posset mouere in duplicata proportione ad unguem scilicet $5\frac{1}{16}$ ut esset uix hominum collectorum $30\frac{3}{8}$ at nullus est numerus hominum qui collectus faciat hunc numerum, nam sex homines explent numerum 27, & septem $31\frac{1}{2}$, & ideò non potest duci proportio. Et ideò maximus est error dicendo decem homines mouent nauim proportione tripla, ergo triginta alij additis illis similes roboremouebunt à proportione uiginti septupla scilicet ducta nonu-

pla

pla in triplam. Sed sumpta proportione alio modo producitur. Velut si dicam, homines decem mouent nauim, aut ferũt pondus proportione tripla, igitur quadraginta homines idem facient proportione duodecupla scilicet quadrupla in triplam ducta. Cum ergo addo triginta homines, qui mouent in proportione nonupla, non oportet ducere nonuplam in triplam, sed totum numerum accipere, & quam proportionem habet ad partem, tandem habet uis mouens ad uim mouẽtem. Vnde si duo moueant in proportione sexquialtera, & sex in proportione quadrupla cum dimidia, & iungantur, ut fiant octo, non oportebit ducere sexquialteram, in quadruplam sexquialteram, sed cum octo ad duo sit in proportione quadrupla, sumemus quadruplam ad sexquialteram, quę erit sexcupla, & octo mouebunt, aut pondus gerent in proportione sexcupla.

Propositio quadragesimatertia.

Productionem ad additionem retrahere.

Sit proportio a ad b dupla potestate licet sint quinque homines, & sint quindecim homines c, & habebunt ad b sexcuplam proportionem per præcedentem. Iuncta ergo a, & c per octauam huius mouebũt b proportione octupla, dico, quod si duxeris proportionẽ c ad a plus uno .i. quadruplam in proportionem a ad b, quæ est dupla, proueniet eadem octupla. Nam quia in coniunctione sufficit iungere c cum a, & sumitur secundum proportionem a ad b, igitur cum proportio a ad b comparata ad proportionem c & a ad b sit, sicut proportio c & a ad a, & proportio c & a ad a sit, sicut proportio c ad a, & a ad a, & proportio a ad a habet rationem unius, igitur proportio aggregati c a ad b est producta ex proportione c ad a plus monade in proportionem a ad b, quod erat demonstrandum. Com.

5 a		c 15	
	Dupla		Sexcupla
3 6		6 3	

20	
	Octupla
3	

Propositio quadragesimaquarta.

Si fuerit proportio motoris ad id, quod est maximum non mouens & spatium, & tempus, nota erit etiam reliquorum nota.

Sæpe contingit, ut quinque homines moueant nauim, & spatium ad tempus notum, & etiam cognitum maximum, quod mouere non potest. Sit ergo a numerus hominum, b nauis, c maximum, quod non mouere potest, d tempus, e spatium, f motor alius siue numerus hominum notus, & g tempus, dico, quod h spatium notum erit, seu notũ g tempus, & h spatium, dico, quod erit f motor, seu numerus

a	c	d	f	g
b		e		h

hominum

hominum notus. Quoniam ergo notum est a & c, quia est æquale b, igitur proportio a ad b nota est: sed iuxta illam a mouet b in d tempore per c spatium, igitur per præcedentem, ut f ad a ita spatij ad e in d tempore. Sed per eadem ut temporis d ad spatium illud ita g ad h, ergo cum nota sint d e f g erit etiam h, & ita conuertendo.

Propositio quadragesimaquinta.

Rationem stateræ ostendere.

Co^m. Archimedes nititur huic fundamento, quod pondera, quæ proportionem mutuam habent, ut distantiæ à libella a, quæ suspenduntur, æqualiter ponderant, sit ergo libella a b, & suspensa in a centrum mundi c, ad quod dirigitur pondus, & liquet, quod ipsum non se inclinabit ex uigesimatertia propositione. Si ergo ponantur loco lineæ b d in e & f, & sit proportio e b ad b f, ut g ad h, dico, quòd erit æquilibrium, per eandem enim h mouebitur in k, scilicet ut perueniat in rectam a d, si enim non esset suspensum h, moueretur in recta e h per eandem, quia ergo retinetur, mouetur per obliquam h k, & sumatur in propinquum punctum in b e, & n in æquali distantia in e f, quia ergo e b totum mouetur eadem ui in singulis partibus, quia a pondere h, & in h mouetur per h k in m per m p, ergo qualis est proportio magnitudinis h k ad m p, talis est uis in m p ad uim in h k, & ita in b erit penè infinita: quia quanta ui extenditur ex h in k tanta puncta b, se circumuertit ergo proportio hypomochlij ad spatium, uelut roboris ad robur, at eadem n o ad h k, est enim n o æqualis m p, & n b, & b m æquales, ut uerò g ad h, ita e b ad b f: ergo ut e b ad b f, ita uirium n o ad h k, ut igitur g ad h, ita uirium m p ad h k: ut etiam g l ad n o, ita uirium f b ad n b. nam idem pondus scilicet g mouet totam b f, igitur ut g se habet
Per 9. quinti Elem. ad n o, ita h ad m p, sed m p & n o sunt æquales, ergo tanta est uis g in f, quanta h in e.

Cor^m. 1. Ex quo patet, quod hypomochlion moueretur infinita ui, si posset esse punctus: sed quia in extrema superficie cylindri, ideò potest aliqua ui retineri.

Cor^m. 2. Et si quis posset capere hastam in extremo puncto, non posset eam mouere, etiam quod haberet robur infinitum, quia ab æquali non fit motus per trigesimamnonam propositionem.

Cor^m. 3. Et libella nihil retinet nisi quantum est pondus eius quod cu-

pit

pit ad centrum peruenire, & pondus ei appensum non prohibet motum, etiam si esset infinitum, nisi quatenus non uult recedere ex directo centri mundi: & ut grauat hypomochlion faciens impressionem.

Et si terra tota esset appensa polo, moueretur magna ui: quoniam uis eadem est in polo, quæ in circulo toto æquinoctij. Cor. 4.

Et rota, quanto uelocius mouetur in ambitu, tanto minorem habet uim: sed propter aërem, qui secum circumfertur, mouetur magno impetu, & magnas facit læsiones. Ideò hoc in cono non accidit. Cor. 5.



Ex quo patet ratio eleuandi pondera magna per trabem, ut à latere uides. Cor. 6.

Propositio quadragesimasexta.

An sit aliqua proportio, & qualis inter animam, & uitas, & sua corpora considerare.

Declarauimus motum cœli esse uoluntarium, obsequente cœlo per uirtutem in eo infusam: In animalibus autem, & præcipuè in homine notius est hoc experientibus nobis in ipsis: sed motus hic, ut dixi supra, mistus est, ille uerò cœlestis ignotior est. Certum tamen est plenè obsequi cœlum uitæ, nec prorsus repugnare. Solet Aristoteli imponi, quòd si adderetur astrum cœlo, quòd cœlum aut quiesceret, aut tardius moueretur: quod est, ac si diceremus, quòd homo paruus si fieret maior, non esset adeò agilis, tanquam motus ille esset ab externa causa. Imò perinde esset, ac si quis diceret, quod lapides magni minus uelociter descenderent, quam parui. Quin potius ut lapis magnus uelociùs mouetur: quàm paruus naturali motu, & tardius præternaturali, ita cœlum motu uoluntario, si ita dici posset æqualius & maiore cum efficacia, quanto densius. Et ita si Aristoteles illud dixisset, ostendisset magnam imperitiam. Ideò quale iudicium debemus facere de Alexandro, & Aueroe, qui hoc ei tribuunt. legit enim in textu Arabico tale quippiam. De Animalibus forsan posset hoc dici, quoniã, ut suprà diximus, motus ille mistus est. Remanet ergo difficultas, quoniã si motus iste non à proportione fit, quare non est infinitus? & dico q̃ in animalibus tres sunt causæ, una, quia est mistus, & habet repugnantiam: secunda, quia est de loco ad locum, motus autem cœli est in lo co: tertia est communis etiam cœlo, et est, quoniã non est ratio finis. Natura enim diuina non appetit mouere tã celeriter. Quid est ergo ꝓportio, cũ sit ultimũ uoluntatis uitæ, ut obtemperet primæ causæ, ideo illud est ultimũ, q̃ mouet. Est aũt idem uelle, & posse. In natura enim

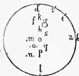
Cor. Propos. 27. Tex. 71. 2. de Cœlo.

enim cœli est ille appetitus, cuius principium est uita: & eius uolun tatis bonum ipsum. Et ideo hæc proportio nõ diuiditur. In animalibus autem non est uis illa nisi, cum proportione, quia primum instrumentum, quod recipit, & est spiritus uim habet determinatam, cum sit uirtus in materia: ideo nõ mouet nisi cum certa proportione, uelut lumen in medio in se non habet proportionem nisi ad lucem, sed ut est in illo, potest esse remissum, obscurũ & hebes. Quæritur ergo quantitas illius, si dicas, quòd est à luce: quæro quantitas lucis, unde sit? forsan dicendum, quòd uelut in motibus, quanto densiora sunt corpora tanto mouent maiore nixu, & robore. Nam calor in materia augetur iuxta illius quantitatem: idem in luce, & reliquis. Dico ergo proportionem esse infinitam: nam si corpus esset infinitum & optimè dispositum infinita ui moueretur & agilitate, ut enim maius est eo maiores uires habet.

Propositio quadragesima septima.

Si duo mobilia æqualiter in eodem circulo iuxta proprios motus mouerentur, productum temporis circuituum inuicem erit æquale producto differentiæ temporum circuitus ductæ in tempus coniunctionis primæ.

Com. Sint duo mobilia a & b in eodem puncto, quæ æqualiter uersus eandem partem moueantur æqualibus in temporibus, inui cem tamen inæqualiter, ita quod a in f & b in g temporibus absoluant circulum, & horum differentia sit h. Dum itaque a perficit circulum b perueniat in c, igitur c d b est differentia, quæ superanda est, & proportio circuli ad b c ut g ad f, quare reliqui ad reliquum, ut residui ad residuum, scilicet circuli ad c d b, ut g ad h, & b c ad c d b ut f ad h, coniungantur igitur in k tempore, eruntque k f g h homiologa, ut productum ex circulo in b c diuiso per certam quantitatem & cum circulo & b c & c d b differentia, & sit productum ex f in g, dico quod diuisa f per h exibit k tempus coniunctionis primæ, sit itaque d locus coniunctionis, dico igitur quod differentia spatij pertransiti a b, a & a, b in reditu ex con iunctione prima ad d est unus circulus completus, non enim possunt esse plures, nam sequeretur, quòd a aliquando pertransisset b, et sic non esset prima coniunctio, nec potest esse minus, nam sic cum a & b sint in d ultra perfectas circulationes uterque eorum pertran siuit arcum b c, igitur nullo modo differentia potest esse minor circulo, neque maior, ut declaratum est, igitur est unus circulus ad unguem



guem. Hoc declarato ponatur m spatium compositum ex circulis pertransitis a b a cum spatio b d, etenim spatium, quod pertransit b a coniunctione in a, ad coniunctionem primam in d, & erit ex demonstratis horum differentia circulus qui uocetur o, & sit p spatium, quod pertransit b in tempore eodem, in quo a pertransit o, & sit q differentia o, & p quę in circulo est c d l b, quia igitur in eodem tempore a pertransit m & b, n, erit m ad n, ut a ad b, & eadem ratione a ad b, ut o ad p, igitur ex undecima quinti Euclidis m ad n, ut o ad p, quare cum o sit differentia m & n, & q, differentia o & p erit ex decimanona quinti Euclidis, m ad o, ut o ad q, & ita circulus est analogus inter spatium pertransitum à motore ueloci ori, & inter differentiam spatij quæ accidit, dum uelocior motor pertransit circulum, id est quòd circulus a c d est analogus inter c d l b, & circulos pertransitos a b a cum portione b d. Reuertor igitur ad propositum, cum sit m ad o, ut o ad q, & m ad o, ut n ad p, ex sextadecima quinti Euclidis, erit ex undecima eiusdem n ad p, ut o ad q, quare ex sextadecima sexti Elementorum ducto o, id est circulo, seu maiore numero in p spatium pertransitum a b, seu ducto f in g, & diuiso per q differentiam spatiorum, seu per h exibit n, seu spatium quod pertransit b ab una coniunctione ad aliam quod erat demonstrandum.

Ex hoc patet, quod proportio temporis coniunctionis ad tempus tardioris motus circuitionis est ueluti temporis circuitus uelocioris motoris ad differentiam temporis motus tardioris, & uelocioris motoris in uno circuitu. Corm.

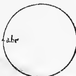
Propositio quadragesimaoctaua.

Si tria mobilia ex eodem puncto discedant, fuerintque duorum, ac duorum coniunctiones in temporibus commensis illa tria mobilia denuò coniungentur in tempore producto ex denominatore diuisionis temporis maioris per minus in minus, aut numeratore in maius.

Sint tria mobilia a, quod circuat in duobus annis b in quinque, Com. c in septem. Dico quod primum redibunt in numero producto ex septem quinque & duobus, qui sunt numeri primi, & erit ille numerus septuaginta annorum. Nam in septuaginta annis a perficiet trigintaquinque retrolutiones b quatuordecim, c decem: ergo redibũt per perfectos circuitus ad idem punctum. Ostendo modo quod non ante: nam si sic: sit, ut in trigintaquinque annis igitur b & c perficient perfectos circuitus, ergo redibũt ad idem punctum, a autem non redibit, quoniam eius circuitus non numerat trigintaquinque aliter non fuisset septuaginta minimus numeratus ab a b c, cum

D ergo

ergo iam supponatur numerari a b & c non numerabitur a b a, ergo a non perficiet circuitus, ergo non redibit ad primum locũ, ergo non erit iunctus cum b & c. Quod si dicas a b c coniungi in decem septem annis numero non numerato ab aliquo illorum temporum, auferantur perfectæ circulationes, & remanebũt dimidium ex a, duæ quintæ ex b, tres septimæ ex c, igitur oportebit ut hæ portiones sint æquales, ut post perfectas circulationes in idem punctum, cõueniant, ergo $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{7}$ æquiualebunt, quare proportio 7 ad 3 & 5 ad 2 & 2 ad 1, est una, quare permutando 3 ad 2 ut 7 ad 5, sed 7 & 5 sunt contra se primi, ergo in sua proportione minimi per dicta in septimo Elementorum: ergo tria, & duo non sunt



Propos. 23 in eadem proportione. Rursus dicantur conuenire in annis quatuordecim cum dimidio, ergo in uiginti nouem conuenient iterum: ergo per secundam partem erit septem ad unum, ut duo ad unum, igitur permutando unius ad unum, ut septem ad duo, sed unum est æquale uni, ergo duo erunt æqualia septem. Rursus dicamus, quod in tempore annorum ℞ quadrata decem similiter auferam integras reuolutiones, quas potero, & erunt ℞ $2\frac{1}{8}$ m: 1, & ℞ $\frac{2}{7}$ & ℞ $\frac{10}{49}$ æqualia. Hic uides infinita sequi inconuenientia, quæ longum esset numerare, nam septem esset æquale quinque, & proportio recisi ad potentia rethe, ut numeri ad numerum. Igitur non conueniunt ante septuaginta annos.

Coro. 1. Ex hoc sequitur, quòd nullibi conuenient præterquàm in eodem puncto, scilicet in quo ab initio coniuncti fuerunt.

Coro. 2. Sequitur denuo ex propositione ipsa repetita, & primo cortolario, quod nullibi alibi conuenient quàm in dato primo puncto, in quo coniuncti fuerant ab initio etiam usque in æternum.

Sit rursus ut a circuat in annis duobus cum dimidio, b in tribus cum tertia parte, c in quatuor cum quarta parte ducam per suos denominatores, & erit ut a in quinque annis, b in decem, c in decemseptem circuant, & redeant ad idem punctum, & quia quinque numerat decem, & decem, & decemseptem sunt numeri inuicem primi, ducam decem in decemseptem fiunt centum septuaginta. Constat igitur c quadragies, b quinquagies semel, a sexagies octies circumuerti, & redire ad idem punctum: ergo rursus coibunt post tot annos in eo, dico modo, quod non ante: nam si non sit, ut in triginta tribus annis, gratia exempli, aufero decemseptẽ, decem, & quinque, & relinquentur sexdecim tria & tria, & rursus ex sexdecim tres

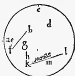
cir cuitus

circuitus c, & relinquentur $3\frac{3}{4}$ sequetur igitur, ut sit proportio 17 ad 13, & $2\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$ & $3\frac{2}{3}$ ad 3 eadem, & ita $\frac{17}{13}$, $\frac{5}{1}$ & $\frac{10}{9}$ eadem si iam supponimus 17 & 10 esse primos inuicem, ut in secunda demonstratione, Igitur sequuntur eadem corrolaria, quæ dicta sunt.

Propositio quadragesimanona.

Proposito mobilis in circulo circuitus tempore, dataque ratione distantiæ ab illo mobilis circuitum inuenire, quod ex eodem puncto discedens cum alio mobili in dato puncto conueniat sub quocunque numero circuituum tempus quoque coniunctionis.

Sit in circuli peripheria a pũctus, qui circuat æquali motu (hoc enim semper intelligitur) in b tempore: & sit datus punctus c in quo discedens e mobile ex coniunctione cum a post certos circuitus proprios, aut etiam sine ulla circuitione perfecta debeat conuenire. Volo scire tempus circuitionis e: & etiam tempus coniunctionis. Com.



Sit ergo primum ut absque circuitione ulla e, a debeat comprehendere e in c post numerum circuitionum ipsius a, qui sit f. nam si a occurrit e in prima circuitione ipsius e, igitur a mouetur uelocius quàm e, cum ergo debeat attingere ipsum e, necesse est ut a pertranseat prius per punctum ex quo discessit antequam redeat ad coniunctionem e: ergo perficiet saltem unam circuitionem. Ducemus ergo f in b, & fiet g tempus circuitus aut circuituum a, & quia spatium a c datum est, sit b temporis circuitus a ad h, uelut circuli totius ad a c, & iungatur g cum h & fiat k. Fiat quoque, ut monadis ad h, ita l ad monadem, & ducatur l in k, & fiat m: dico m esse tempus circuitus e. Constat enim ex supposito, quod k est tempus totum in quo a peruenit post b circuitiones in c, si ergo e moueretur per m tempus totum ex supposito perficeret circuitum, at quia circuitus ad a c, ut monadis ad h, igitur etiam ut l ad monadem, ergo proportio circuitus ad a c, ut m ad monadem: ergo si in m transit totum circuitum in monade transit a c: sed monas ducta in k facit k, igitur e in tempore k perueniet in c, quod erat demonstrandum. Per 20. Pet.

Proponatur modo tempus reuolutionum e ipsum d: eodem modo agemus ducendo f in b fit g, addatur h & fiat k, diuidatur k per aggregatum d & a e, & exeat m, (idem enim est diuidere per aggregatum d & h, & multiplicare per l) dico ergo ut in demonstratione priore, quod m est tempus circuitus e. Nam cum k sit tempus, in quo a post circuitus f peruenit ad c, ergo diuiso ipso toto tempore Per 21. Pet.

per numerum reuolutionum d, & partem reuolutionis exibit tempus unius reuolutionis.

Exemplum primi in re pauló obſcuriore: ſit f 4 & b $2\frac{1}{2}$ & a c $\frac{4}{5}$, ducemus 4 in $2\frac{1}{2}$ fit 10, adde $\frac{4}{5}$ 6 quod eſt 2 fit 12, diuide per $\frac{4}{5}$ ſeu multiplica per $\frac{5}{4}$ quod idem eſt, fit 15 circuitus e, in quatuor ergo circuitibus, & $\frac{4}{5}$ qui ſunt duodecim anni perueniet a ad c, & in duodecim annis e perueniet ad c, nam 12 ſunt $\frac{4}{5}$ ipſius 15. Similiter in ſecundo caſu ſit f 4 ut prius b $2\frac{1}{3}$ a c $\frac{2}{7}$, ducemus 4 in $2\frac{1}{3}$ fit $9\frac{1}{3}$, addemusq́ʒ h portionem b qualis a c eſt totius circuitus, id eſt $\frac{1}{7}$, eſt autem $\frac{1}{7}$ $2\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ fient $9\frac{2}{3}$, ſimiliter ponatur d 5, & quia a c eſt $\frac{1}{7}$ erunt $\frac{35}{7}$, diuide ergo $9\frac{2}{3}$ id eſt $\frac{29}{3}$ per $\frac{35}{7}$ exeunt $\frac{203}{105}$ tempus reuolutionis e. Quinque ergo reuolutiones e erunt $\frac{1015}{105}$ addita ſeptima parte, quæ eſt $\frac{29}{105}$ fient $\frac{1044}{105}$ ſeu $\frac{261}{27}$, & ſunt anni $9\frac{18}{27}$ ſeu $9\frac{2}{3}$, ergo in tanto tempore a faciet quatuor circuitus, & ſeptimam partem, & e quinque circuitus, & ſeptimam.

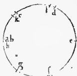
Cor^m. Ex hoc patet, quod non coniungentur in alio loco, neq; alio tempore ante prædictum tempus.

Propoſitio quinquageſima.

Omnes circuitum portiones in eiuſdem temporibus repetunt.

Sint in circulo a b c d e f g: a & b iuncta, & in primo congreſſu iungartur in c, in ſecundo in d, in tertio in e, in quarto in f, in quinto in g, in ſexto in h, in ſeptimo in k, in octauo in l. Et ſic deinceps cūq; tempora ſint æqualia, erunt & circuitus totidem numero, & exceſſus æquales etiam a c, c d, d e, e f, f g, g h, h k, k l. Et ſi aggregatum a ſcilicet circulorum, & portionis fuerit commenſum circulo, & ita de b erunt omnia cōmenſa ad circulum, & etiam inter ſe. Et ſi inter ſe aggregata, uel portiones erunt, & eodem modo reliqua. Et quoniam circuli circulis commenſi ſunt: ſi portiones erunt inuicem commenſæ erūt, & toti circuitus cum partibus commenſi, & ſi non commenſi, neque erunt inter ſe, neq; ad circulum. Et ſi totum ſpatium cum circuitibus erit unius generis, erunt duplicata, & triplicata, & quadruplicata eiuſdem generis: quare cum ſpatia ipſa detractis circuitibus uelut rhete habeant naturam reciſi, & ſpatia ipſa tota ſint eiuſdem generis, erunt ſpatia, quæ relinquuntur eiuſdem generis. Erunt tamen incommenſa neceſſarió, ſi partes fuerint incommenſæ toti. Ponatur a c incommenſa toti circulo dico, quod a k etiā eſt incommenſa toti circulo: & etiā a k, & k c. Quia enim a c eſt incommenſa circulo, & k a cum toto circulo ſemel eſt commen-

Per Cor^m. præcedentis.



ſa a

sa a c, quia multiplex ei, igitur cum circulus, & a k diuidantur in circulum et a k, & circulus sit incommensus circulo, cum a k erit aggregatum ex circulo, & a k incommensum ipsi a k, & a k pariter incommensa circulo. Rursus quia a k est incommensa circulo cum a k, & circulus cum a k sit multiplex ad a c, erit a k incommensa a c, quare erit c k incommensa a k & a c, & circulo addita a k. Si ergo a c sit commensa circulo, erunt omnes portiones e genere numeri, & si potentia rhete erunt omnes, uel potentia rhete, uel circulis detractis, ut a k & a l recisa: & a c sit potentia secunda rhete, id est radix cubica erunt omnes c d, d e, e f, potentia secunda rhete, et radices cubicæ numeri, seu latera corporum rhete, a k uero & a l, & huiusmodi in infinitum recisa potentia rhete. *Per 14. decimi Element.* *Per 17. eiusdem.* *Per 14. rursus.* *Per 17. rursus.*

Ex hoc patet, quod cum circulus possit diuidi in infinita genera quantitatum, quæ non sunt inuicem commensæ cumque coniunctiones hæ semper in eodem genere maneant, quod infinita puncta, & infinitis in speciebus quantitatum remanebunt in quibus a & b in perpetuum nunquam conuenient. Velut si coniunctio prima fiat in ℞ cu. $\frac{1}{2}$ alicuius circuli, nunquam conuenient, neque in medietate, neque in quarta parte, nec octaua, nec tertia, nec sexta, nec nona, nec quinta, nec decima, & sic de singulis in genere commensarum toti circulo. Neque in ℞ quadrata $\frac{1}{2}$ uel $\frac{1}{3}$ uel $\frac{2}{7}$ neque ℞ $\frac{1}{6}$ uel $\frac{1}{20}$, neque in ℞ 3 m: 1, nec 2 m: ℞ 3 nec in ℞ ℞ 2 aut 3 aut 7 nec in ℞ relata alicuius numeri, nec in 2 m: ℞ ℞ cub. 3 nec 2 m: ℞ cub. 4, & sic de alijs. *Cor^m.* *Per penultimam uigesimi Element.*

Propositio quinquagesimaprima.

Operationes dictas exemplo declarare.

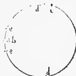
Supponamus in circulo prædicto a c ℞ 7 constat, quod esse non potest, quia ℞ 7 est maior monade, ideo toto circulo, quare non poterit esse pars circuli, sed referetur ad quantitatẽ certam, uelut quod circulus sit 10, semper ergo diuidemus ℞ 7, seu eam portionem per 10 quantitatem circuli & exibit ℞ $\frac{7}{100}$, & hæc erit portio circuli, & ita si portio sit ℞ cub. 16, diuidemus ℞ cub. 16 per 10 exibit ℞ cu $\frac{2}{125}$, & ita de alijs. *Cor^m.*

Sed cum ex repetitione crescat portio illa, donec exuperet monadem, aut aliquem quemuis numerum detracta monade aut numero circuituum habebit rationem recisi. Velut ℞ $\frac{7}{100}$ quater sumpta efficit ℞ $\frac{112}{100}$. Et hoc est potentia rhete, sed si quis auferat monadem fiet ℞ $\frac{112}{100}$ m: 1, & hoc est recisum 1, scilicet 1 p: ℞ v: $\frac{23}{25}$ m: ℞ $\frac{28}{25}$, sed tamen uere est linea media.

Quod uero non contingat coniungi in alio loco, neque tempore sit, ut a b iunganturin c, & sit reuolutio a triplex integra, & b

 sexcuplex,

ſexcuplex, & tempus totum decem annorum: ita ut a c ſit tertia pars circuitus, & a circuitus tres anni, & quia circuitus b ſunt ſex cum tertia, diuidemus decem per $6\frac{1}{3}$ exit $1\frac{11}{19}$, dico quod non prius, neque in alio puncto. Si enim primum in eodem puncto, &, gratia exempli, in quatuor annis congruit enim, & b dicamus quod peregerit duas reuolutiones cum tertia, hoc enim eſt neceſſarium, ſi debet peruenire ad c, & erunt anni tres, & $\frac{11}{19}$, non ergo anni quatuor. Cum enim tempora diuerſa diuiduntur per numeros habentes proportionem erunt, qui prodeunt numeri in eadem ratione. Diuiſo ergo 10 per $1\frac{11}{19}$ exit $6\frac{1}{3}$, & diuiſo 4 per $1\frac{11}{19}$ exit $2\frac{8}{15}$, igitur $6\frac{1}{3}$ ad $2\frac{8}{15}$, ut 10 ad 4, igitur $\frac{8}{15}$ non poteſt eſſe æquale $\frac{1}{3}$. Si enim per præcedentem repetuntur, ergo non poſſunt redire, donec iterum coniungantur in ipſo a. Si enim aliter ſit ut ex e, igitur e c eſt æqualis a c pars toti, quod contingere non poteſt. Sin uerò coniunctio fiat in d, igitur per præcedentem d e eſt pars a c ſubmultiplex quomodolibet, quare non fuerunt aſſumpti primi numeri. Veluti in exemplo conſtituimus, quod a, & b conueniunt in c in decem annis, & a c eſt tertia pars circuitus: ergo in triginta annis conueniunt in a, & in quadraginta rurſus in c. ſi ergo quis aſſumpſiſſet quadraginta annos ab initio pro congreſſu, & diuiſiſſet per $1\frac{11}{19}$ exiret $25\frac{1}{3}$, & ſi per 3 exiret $13\frac{1}{3}$, & manifeſtum eſt, quod uterque numerus poteſt diuidi per eundem numerum, utpote 4 & exit numerus cum eadem parte ſcilicet $6\frac{1}{3}$ & $3\frac{1}{3}$ ergo conuenient ante, non ergo aſſumpſiſti minimos in ea proportione. Illi autem nequaquam amplius diuidi non poſſunt eodem modo.



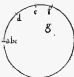
Decem		Quatuor
3	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{11}{19}$ $2\frac{8}{19}$
$1\frac{11}{19}$	$6\frac{1}{3}$	

Propoſitio quinquageſimaſecunda.

Tria mobilia coniuncta in eodem puncto, quorum duo, & duo conueniant in partibus incommenſis inter ſe, in perpetuum in nullo unquam puncto conuenient.

Co[m]. Sint a b c iuncta, & primo iungantur a & b, iterum in d & b, & c in e, & ſint a d, a e incommenſæ, dico quod a b c nunquam conuenient in aliquo puncto, ſeu primo, ſeu alio à primo: ſi non conueniant

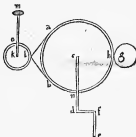
ueniant in f, erunt ergo in g tempore reuolutiones integræ, & portio a f insuper. Et quia hæc constituuntur per congressus b cum a, & sunt spatia a d, & b cum c, & sunt spatia c f, igitur spatium a f erit ex genere quantitatis a d, & a e per quinquagesimam, harum ergo erunt commensæ: quod est contra suppositum. Et harum propositionum principium est traditum à Campano Nouariensi Euclidis expositore, in quodam libello non edito qui diligentia patris mei Facij ad me peruenit.



Propositio quinquagesimatertia.

Circulorū se in aduersum mouentium proportionem declarare. Com.

Sit orbis a b cuius centrum c, manubrium c d f e, seu uero tangat circulum g, seu riore gemmas sculpentium aligetur alteri orbi funiculo a l b, & sit in uertice axis k m orbiculus solidus auri semicirculari forma m, dico quod proportio motus a b ad motum m est producta ex duabus proportionibus c n semidimetientis, & semidimetientis m ad k o, quare ut rectanguli c n in dimidium dimetientis



m ad quadratum o, ut enim a b ad o l orbem, id est peripheriarū ita c n ad o k, quoniam o l mouetur toties in una circuitione a b, quoties peripheria o l continetur in peripheria a b, ergo quoties o k continetur in c n toties in una circuitione a b o l circumuertitur, sed quoties circumuertitur o l, toties etiam m, quia uterq; mouetur eodem circuitu k m axis, ergo quoties m circumducitur in circuitu a b toties o k continetur in c n, ergo si fiat comparatio semidiametri m ad c n, erit producta proportio circuitus a b ad circuitum m ex ꝓportione c n ad o k, et semidimetientis m ad idē o k, ergo per 26 ꝓportio numeri circuitus unius ꝑ alterū est, ut rectanguli sub c n, & semidimetiente m ad quadratum k o, quod erat demonstrandū.

Manifestum est autem ex ipsa sola constitutione, quod si a b mo- Cor^m. 1.

D 4 uetur

uetur sursum à dextro in sinistrum in inferiore parte, mouebitur à sinistro in dextrum, & utercp circulorum g & k in superiore parte, & in inferiore mouebitur contrario motu, scilicet in superiore à sinistro in dextrum, & inferiore à dextro in sinistrum, illi uerò duo orbes simili motu mouebuntur tam in parte superiore, quàm inferiore, & proportio motuum eorum inter se erit uelut dimetientium eorundem.

Cor^m. 2. Rursus cum a b circumuertatur cum manubrio c d f e, tanto uelocius circumuertetur, & in ea proportione, qua d f continetur in e n, & in eodem tempore, in quo manubrium circumuertitur in eodem axis circumuertitur, & orbis, ut dictum est, ergo in eodem tempore, in quo axis circumuertitur in eodem orbis: ergo tanto tardius uidebitur moueri axis ipso orbe, quanta est proportio minoris in æqualitatis ipsius axis, seu ambitus, seu semidimetientis ad ambitum, seu semidimetientem orbis.

Propositio quinquagesimaquarta.

Proportio circuli ad suum diametrum per similitudinē est quarta pars peripheriæ. Rursusq; eiusdem circuli ad peripheriam diametri quarta pars.

Co^m. Quoniam enim superficies circuli, ut ab Archimede demonstratum est, fit ex dimidio diametri in dimidiū peripheriæ erit, ut eadem fiat ex tota peripheria in quartā partem diametri, & ex tota diametro in quartam partē peripheriæ. ergo proportio areæ circuli ad diametrum per similitudinem est quarta pars peripheriæ, & proportio areæ ad peripheriā est quarta pars dimetientis, quod erat probandum.

Per 16. sex ti Element.

Per 2. diff.



Propositio quinquagesimaquinta.

Proportionem medicamentorum per ordines suppositā æquali proportione in ordinibus per quantitates, & proportiones demonstrare.

Co^m. Galenus libro quinto de Simplicibus medicamentis, quem secap.ult. quuti sunt alij medici, ponit quatuor ordines medicamentorū iuxta qualitates calidi, frigidi, sicci, & humidi, & primus est cum medicamentū non sentitur quale sit licet operetur, uelut camemelon, absynthium, & oriza: secundus est, cum sentitur, sed non lædit, ut nux myristica, saluia, ozimum: tertius est cum sentitur, & lædit, sed non destruit, neque corrumpit corpus, uelut assarum apium staphisagria, cappares, myrrha, ruta: quartus est, cum destruit uelut pyrethrum, piper, euphorbium cæpe aggreste, & sinapis, cinamomum

momum autem, & gingiber numerantur inter medicinas calidas tertij gradus, & hoc opus comparatur ad corpus sicut dicit Galenus, & Serapio non ad linguam, ut medici nostri temporis interpretantur. Ex quo patet, quod aliqua medicina poterit esse quarti ordinis, & non lædere linguam in gustu, & alia tertij ordinis, quæ non solum lædit linguam, sed sensum eius corrumpet, et destruet, quod contingit propter substantiam tenuem crassæ mistam cum siccitate pari ipsi calori. Sed non oportet hęc nunc tractar, e non solum quia non sit locus, sed etiam quòd confusa sit per seipsa materia absque eo, quod difficultatem difficultati addamus, solum ergo eas dubitationes adiungemus, quas uolẽtes declarare propositionem præsentem, neque superfugere, neque declinare possumus. Nam de sicco, & humido, cum sint longè minoris actionis, quàm calidum, & frigidum, & præcipuè humidum, non uideo quomodo posit Galenus statuere medicinam humidam tertij gradus, nedum quarti, cum non posit inueniri medicina, quæ destruat corpus nostrum propter humidam qualitatem. Et licet Serapio posuerit gingiber & enulam & zelim in tertio ordine calidorum & humidorum: & inter frigidas, & humidas in tertio portulacam, aizoum, & uirgam pastoris, & fungos. Primum non ausus est ponere medicinas ullas calidas, aut frigidas in quarto ordine, quę sint humidæ. secundùm, quando dicit medicinas calidas, aut frigidas, atque humidas in tertio ordine, intelligit solum de qualitate actiua scilicet caliditate, uel frigiditate, & non de humida qualitate, quod ostendit de gingibere, & enula, dicens, quod sunt calidæ in tertio ordine, & humidæ humido crudo, non ausus addere ordinem, quia non uidit rationem, qua possent dici humidæ in tertio. Et clarius in capite de zeilen, quem statuerat inter medicinas calidas, & humidas in tertio, dicit quod est calida in tertio, & humida in primo, ergo non intelligit per medicinas calidas & humidas in tertio ordine, quod sint humidæ in tertio ordine. Clarius etiam de frigidis & humidis, nam portulacam dicit esse frigidam in tertio, humidam in secundo, & quod maius, est cum collocasset aizoum inter medicinas frigidas, & humidas in tertio ordine, dicit, quod est frigidum in tertio ordine, addit, quod est siccum parum, & de uirga pastoris nihil dicit de humido, sed dicit, quod astringit, ex quo concludo, quod secundum mentem Serapionis nulla est medicina humidior portulaca, etiam uidetur innuere de fungis, satis est quod non excedunt secundum ordinem in humido neque calida neque frigida, sed frigida sunt humidiora, ut fungi, & portulaca, quia frigiditas in generatione humidum magis admittit, quàm caliditas, & calida magis humectant,

Cap. 336. 337. & 338.

mectant, quia magis penetrat uis medicamenti, & hæc regula de humido, & ficco eſt generalis apud Serapionem, quod non intelligitur ordo in paſsiuis, niſi ſpecialiter exprimatur, nam de ſiccitate non nego, quin inueniantur medicinæ ſiccæ in tertio, & forſan in quarto ordine, ſed de hac Galeni oſcitantia, quæ in illo peculiaris eſt dum uult ſequi ſuas methodos ſine alio diſcrimine, medicis conſiderandum relinquo.

Secunda difficultas eſt maior, & magis pertinet ad nos, & eſt, quòd non declarauit an iſti ordines inter ſe aliquā proportionem ſeruarent, an omnino nullam, ſi enim nulla proportio ſeruatur, fieri nullo modo poteſt, ut per cognitionem temperaturæ ſimplicium medicamentorum cognoſcamus temperaturam compoſitorum ex illis ratione ulla, ſed oportebit ſolum experiri. Sed ſi ordines ſeruant proportionem, adhuc relinquitur dubium, an illa proportio ſit Arithmetica, uel Geometrica, uel Muſica, & nihil mirum eſſet, quòd eſſet Muſica, ut aliàs docuimus, ubi tractauimus de differentiainter ſenſum auditus, et uiſus. Sed quia de hac nullus medicus uidetur intellexiſſe, omittam hanc tractationem. Et quanquàm Galenus poſsit uideri non exiſtimaſſe, quòd hi ordines non ſeruent proportionem ullam, quia non auſus eſt tractare de temperamento medicamentorum compoſitorum per rationem temperamenti ſimplicium, nihilominus ſuppoſito quod ita eſſet, quod ſeruetur altera proportionum, uolo oſtendere rationem componendi in utraque proportione & Arithmetica, & Geometrica. Ex quo ſequitur, quod Auerroes quàm oſcitanter tractauerit in quinto ſuorum collectaneorum de hoc, & non diſtinguit, neque docet primum an ſit aliqua proportio, deinde ſi qua ſit, cuius generis ſit, & cum in re tam clara pugnet prorſus, ut cœcus ictus maximos edendo, ſed in caſſum pleroſque, quàm malè agant qui ei in arduis tantum tribuunt fidei, & authoritatis, ſed hæc eſt infelicitas noſtra, & ira Deorum. Suppoſito ergo quod primò ordines diſtinguantur per proportionem arithmeticam, ſit ſuperficies a b pro quantitate, & a ſit calida in primo gradu, & b in tertio, erit ergo perinde ac ſi duo corpora eſſent unum altitudinis unius cum baſi quadrilatera rectangula a, aliud altitudinis trium, baſi autem quadrilatera ſuperficie rectangula b, hoc igitur erit totum miſtum, & quia quantitas medicamenti non mutatur quæ eſt a, b, ergo talia corpora æquantur uni corpori, cuius baſis eſt a b, cum ergo talia corpora producantur ex a in unum, & b in tria, ergo diuiſo



diuiso aggregato per a b prodibit altitudo, seu ordo qualitatis totius medicamenti, iuxta quod constituitur regula prima libri artis medendi paruæ huiusmodi, & reliquæ, traduxi autem illas ad hunc locum, quia pendent ex demonstratione hac: duc numerum ordi« nis singulorum medicamentorum in numerum quantitatis, similia « iunge, dissimilia detrahe, quod fit, diuide per aggregatum, quanti« tatum, exibit numerus ordinis compositi. Sic miscendo calidum in « secundo ordine cum duplo pondere temperati conflabit calidum « in besse. Secunda si ex pluribus diuersarum, qualitatum, & ordi« num temperatum efficere uelis, duc quæ sunt eiusdem qualitatis in « suas quanitates, & iunge, quod fit, diuide per numerum ordinis « medicamenti contrarij, exibit quantitas illius, sub qua si iungatur, « fiet medicamentum temperatum. Tertia cum nolueris ex tempera« to, & alio cuiuscunque ordinis medicamen conficere ordinis re« « misisionis, detrahe numerum ordinis eius, quod conficere uis ex nu « mero ordinis eius, quod habes, & cum residuo diuide numerum « medicaminis, quod conficere uis, quod exit est numerus quantita« « tis medicamenti non temperati in comparatione ad temperatum. « Ex his potes propositis quibuscunque medicamentis conficere antidotum sub quocunque ordine remissiore potentissimo ex illis. Quarta in compositione, quæ non fermentescit calida, calidis iuncta semper opus augent, ut mel cum pipere. Quæ autem sub minore quantitate exhibentur non sub remissiore ordine agant, sed uel facilius impediuntur, uel minorem corporis partem, uel leuius inmutant.

Quod si statuamus proportionem esse Geometricam, modus erit idem in omnibus, & quo ad numerum etiam in primo, & secundo ordine, quia in proportione dupla Geometrica secundus ordo tantundem distat à primo, quantum primus ab æqualitate, quia unum & duo seruant proportionem, & æqualem distantiam, sed in cæteris ordinibus non ita erit, quia qui esset trium in Arithmetica, scilicet totius ordo est, quatuor in Geometrica, & quartus ordo, qui esset quatuor in Arithmetica, esset octo in Geometrica, ideo scribemus ordines hoc modo, & operabimur cum numeris loco ordinum, exemplum ergo primum sit medicina calida in tertio ordine quatuor unciarum, & medicina frigida in secũdo ordine duarum unciarum, duco quatuor in tria, si proportio sit Arithmetica, fit duodecim, duco duo in duo fit quatuor, detraho quatuor in duodecim, quia omnis medicina tantum retondit de contrario, seu minuit relinquuntur octo scilicet caliditatis, diuido per sex aggregatum

1	1
2	2
3	4
4	8

gregatum unciatum exit unum,& tertia, ergo erit calida in principio secundi ordinis. Secundum exemplum sint eædem medicinæ, & sit proportio Geometrica, ducemus ergo quatuor in quatuor, & fiunt sexdecim, & duo in duo fiunt quatuor, detrahe quatuor ex sexdecim, & remanent duodecim, diuide per sex, ut prius, exeunt duo, ergo erit calida in fine secundi gradus, uides ergo discrimen. rursus sint ambæ medicinæ calidæ, & ducemus, ut prius in tertio exemplo, ubi proportio sit Arithmetica iungendo duodecim cum quatuor, & fient sexdecim, diuide per sex, exeunt duo, & duæ tertiæ, ergo erit calida in medio tertij gradus, rursus in quarto exemplo iungemus sedecim cum quatuor, & fient uiginti, diuide per sex exibunt tria & tertia, & ita erit in medio tertij gradus, ut prius, sed si ille quatuor unciæ essent calidæ in quarto gradu, & illæ duæ unciæ in secundo gradu, ut prius ducendo quatuor in quatuor fiunt sexdecim, & duo in duo fiunt quatuor, iunge, & fient uiginti, diuide per sex exeunt tria cum tertia, ergo erit calida in principio quarti gradus secundum proportionem Arithmeticam, sed secundum Geometricam duc quatuor in octo, fiunt triginta duo, adde quatuor ut prius, scilicet productum duorum in duo fiunt triginta sex, diuide per sex, exeunt sex, & quia sex ad quatuor maiorem habent proportionem, quàm octo ad sex ideo hæc medicina erit calida ultra medium quarti gradus, iam ergo uides rationem, & differentiam horum.

Quod si quis dicat, an debeat attendi Geometrica proportio in medicamentis, an Arithmetica, respondeo, quòd uerisimilius est de Arithmetica, quia illa proportio etiam quod sit minor quatuor ad trium, quàm trium ad duo, & multò minor quàm duo ad unum nihilominus longè plus operatur, quia tertius ordo iam incipit esse præter naturam, & uidemus, quod læsio facta in uulnerato, etiam quòd sit quadruplo minor, plus nocet longè, quàm in sano quadruplo maior: quia termini præter naturam sunt ualdè angusti in comparatione ad latitudinem naturalem, sicut etiam uidemus in tendendis chordis scorpionum, quod ultima pars est breuis & tamen homini tantam difficultatem adijcit. Notandum est etiam, quòd ob hoc diuiserunt ordines in tres partes, uelut gingiber est calidum in fine tertij ordinis, origanum in medio, cinamomum in principio, & ita euphorbium est calidum in principio quarti gradus, sed in fine principij piper, in principio principij aqua separationis in medio quarti ordinis, sed oleum chalcanthi factum ea arte, ut exurat paleas, sicut ignis est calidum in fine quarti ordinis, & ita sufficiet diuidere propter eandem causam primum, & secundum

dum ordinem in duas tantum partes non ratione latitudinis, quæ
est æqualis, uel etiam forsan maior, sed ratione uarietatis operatio-
nis quæ minus sentitur, & maximè in primo ordine.

Propositio quinquagesimasexta.

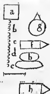
Proportio cuiusuis binomij ad suum recisum, uel ei commen-
sum est duplicata ei, quæ ad numeri latus.

Cum enim proportionis medium sit latus numeri eo quod ex bi- Com.
nomio in recisum suum fit numerus ex his, quæ demonstrata sunt
generaliter in tertio Arithmeticæ de omnibus binomijs cum suis
recisis, uel in quadratis lateribus erit ℞ numeri media proportione Per 6. Præ-
inter binomium, & suum recisum, igitur cum proportio producto- pos lib. de
rum ex binomio in commensa reciso sit, ut commensorum ad reci- Aliza. Per 17. sex
sa erunt omnia producta ex binomio in commensa reciso suo ℞ nu- ti Element.
meri, igitur proportio binomij ad recisum suum, & omnia com- Per 17.
mensa illi, est duplicata ei quæ ad ℞ numeri. septimi eiusdem.

Propositio quinquagesimaseptima. Per 6. deci-

Motus rationem ad pondus inuenire. mi Element.

Ostensum est antea, quod motus naturalis uelocior fit in fine, ac Com.
magis augetur ob aëris motum, ubi uerò hæret est ac si quiescat.
Eadem autem est ratio in motis uiolenter, & naturaliter dum æqua-
li impetu feruntur. Sed subitò post etiam, quod motus æqualiter
augerentur minus tamen crescit proportio uiolenti scilicet ob im-
pedimentum naturale. Sed si uis mouens fuerit
adeò ualida ut proportio incrementi ex aëre sit
maior, quàm impedimentum, & incrementum al
terius mobilis naturaliter moti, motus ille uelo-
cior fiet naturali, ut in sphæris ferreis ex machina
igne excussis, quod ergo attinet ad præsentem
motum ratio est eadem. Quicunque ergo motus
minoris grauis cogit descendere lancem ex ad-
uerso proportionem habet eandem ad suum mo
bile quam habet graue æquiponderans. Sit ergo
ut a ex b, c, d, e, eleuet eodem ordine pondera e, f,
g, h, erit ergo ponderum h, g, f, e, ad se inuicem, & ad a qualis mo-
tuum ob distantiam intentorum. Experimentum ergo docet, quòd
dimidium ponderis æquilibrium facit ex palmo minoris dimidio
motum manifestum, & ex palmo quarta pars ponderis, ergo se ha-
bent prope portionem.



Propositio quinquagesimaoctaua.

Quæ ex alto descendunt cur non eandem pro distantia motus ra
tionem in libero aëre seruent considerare.

Aër in sublimiore eius regione semper naturali motu fertur ex Oriente in Occidentem, sed & infra uerum minus manifestè. At casu plerunque contingit, ut moueatur longè uehementius, seu ad eandem partem, seu aliam. Qui uerò naturalis est, debilis est, quoniam in tenui ualde substantia est: nec cōtinuus sed instar motus aquæ maris fluit ac refluit: aliter necesse esset, ut singulis horis per mille milliaria procederet, ut sic neque latere posset, quandoquidem fortuiti motus, qui sunt multo tardiores non latent nos. Nam tardiores illos esse cōstat, cum in hora sint pulsus arteriarum, quatuor millia ictuū in homine prope temperamentum: si igitur motus naturalis aëris esset continuus, in hora aër procederet ob ambitum terræ millies mille passus, igit in ictu pulsus superaret passus 250. At experimur nullum uentum aut procellam superare quinquaginta passus, cum etiam continuus esse nunquam soleat, imò ne possit quidem, itaque cum hic multo tardior etiam in sublimi, dum est, nos latere non queat, multo minus posset naturalis latere, si adeò uelox & in eadem parte aëris esset atque continuus. Præterea tantus impetus nunquam à minore motu, aut causa superaretur, adeò ut semper flatum aëris orientalem sentiremus. Quotidie etiam aduenire ad nos aërem ex Illyrico, Macedonia, Mysia, Ponto, Bythinia, Capadocia, Syria, Babylonia, Hyrcano mari, Bactrianis, Sacis, Scythis, ac Seris, toto præterea Oceano orientali tam uasto, & Gallica noua, terraque florida non solum res est admirabilis, & incredibilis, sed etiam aliena à sensu, & ab his, quæ eueniunt. A' sensu quidem, quoniam nebulæ, quæ in aëre mouentur, primum non in eandem partem semper mouentur, nunquam autem adeò celeriter: at si aër sic circumuolueretur, mouerentur & illa, quæ in eo continentur, quotidieque aërem experiremur & nubilosum, & madidum propter mare. Nec his, quæ eueniunt hoc satis respondet, nec nobis id contingeret, ut si pestis aliqua in regione nostra directa sæuiret, ut aër singulis diebus labe ea infectus ad nos defferretur. Moueri uerò aërem semper manifestissimum est tum experimento, tum ratione: ratione siquidem, quòd aqua & cœlum naturaliter perpetuò mouentur, quare etiam aër. Experimento, quòd ubi hiant ostia, & ianuæ, ibi perpetuus sentitur flatus. Ergo si a pondus descendat in c, ex alto fertur rectà, sed si ex sublimi transferetur in b, & indirectà, & ad latus, unde ex hoc sequitur.

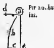
Propositio quinquagesimanona.

Con. Omne mobile motum duobus motibus non ad idem tendentibus, utroque seorsum tardius mouetur simili motu.

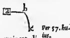
Sit a

Sit a mobile, quod moueatur per a b c impulsu uenti aut uiolen- Com.
to cum naturali coniuncto: & sit terminus naturalis e, & uiolenti d: uterque in directo c, dico, quod tardius perueniet ad c quam d, uel e. De e manifestum est, quoniam motus aëris, qui intendit motum a, diuiditur in partem, quæ iuuat motum ad d, & partem, quæ mouetur ad e, igitur fit minor adiectio. Et etiam quia a c est longior a e ex diffinitione rectæ: quare tardius perueniet ad c quàm ad e du plici ratione. Dico etiam, quod tardius ad c quàm d. Quia enim uis, quæ fert ad d repugnat ei, quæ fert ad e, & uis, quæ fert ad e, repugnat ei quæ fert ad d, igitur tardius perueniet ad c, quàm d. Nec potes dicere, quòd uis, quæ fert ad c adiuuet ad motum e regione d, nam cum unus motus non possit perfici sine altero, igitur quantum motus ad c retardabit motum ad d, tantò motus a c erit tardior absolutè motu ad d. Verum etiam est, quod c e breuior erit a d, quia motus ad e semper contrahit motum ad d naturalis uiolentum ob causam dictam. Vtrùm uerò motus ad c absolutè sit tardior, quàm ad d, non supposito, quod c e sit æqualis a d, sed minor, nunc non est locus determinandi.

Per 20. huius.



Ex hoc patet, quod motus æquidistantis mobilis, finis est minimus omnium: quoniam mobile quasi quiescit in illo. Velut si a moueatur ad b, inde deflectat ad c minimus motus erit in b, ubi incipit naturalis: nam cum incipiat, erit debilissimus, quia non est motus actu: uiolentus autem æqualis est naturali, dum minimus est: ergo cum ex distantia medij palmi duplicetur, naturalis erit motus in b minimus, nisi b c esset minor dimidio palmi. Et etiam quòd esset minor, quia ut dictum est, uterque simul iunctus est æqualis uni eorum non impedito uel minor. Com.



Per 57. huius.

Propositio sexagesima.

Omne mobile motu naturali descendens parte, descendit grauiore secundum grauitatis centrum.

Sit a mobile, grauitatis centrum b, cuius pars ei proximior sit c a, dico quod descendat motu naturali c a, parte tangendo terram, quia enim totum a non potest descendere ad centrum descendit b, quia eadem est natura partis, & totius: totius autem terræ natura est ut centrum, totius sit centrum grauitatis, quare b breuiore uia fertur ad centrum, ergo per c d proximiorem partem ipsi b. Sed pars proximior necessariò est grauior, quia centrum est in medio grauita- Com.



Per 23. huius.

 tis,

tis, ergo omne mobile descendit motu naturali per sui grauiorem partem.

Cor^m. Ex hoc sequitur, quòd graue habens partes inæquales, seu substantia, seu forma, si ita excutiatur, ut pars grauior nō sit, infrà oportet, ut circumuoluatur.

Propositio sexagesimaprima.

Proportionem ictus ad pondus rei, & distantiam generaliter considerare.

Co^m. Dictum est superius de proportione descensus ad grauitatem:
Propos. 57. & quòd si graue descendat ex alto impeditur à motu aëris: & quòd
Propos. 58. res, quæ mouetur duobus motibus non ad idem tendentibus tar-
Propos. 59.
Propos. 60. dius mouetur, quam motus sit unusquisque. Demùm quòd graue descendens circumuoluitur, si pars grauior non sit, deorsum: & antea ubi egimus de proportione motus ad grauitatem, quod hęc intelligenda sunt prout possunt intelligi de motu etiam uiolento. Cum ergo uideamus duo hæc, quod res acuta frangit caput, si ex alto incidat, sed non concutit, lata concutit, sed non diuidit, premit tamen carnem subiectam: nec hoc accidit merito ponderis: nam ut usum est semilibra lapidis, uel ferri cadens ex alto contundit caput, & uulnerat, & non eleuat in æquilibrio, ut potè ex alto cadens loco per spatium octo palmorum pondus sexdecim librarum, & à pondere sexdecim librarum homo non læditur, nec uulneratur, ergo id accidit ex alia causa, & est, quod aër interceptus inter graue, & corpus nostrum non potest dilabi tam citò, ergo ne corpus penetret, cogitur ingredi locum, cui est obuius, atque ita concutere, & diuidere. Ex quibus sequuntur omnia hæc.

Cor^m. Primùm si quod incidit, molle fuerit, non uulneratur caput, uel pars subiecta, quia resilit in corpus molle: nec à molli, quia retunditur, potest uulnerari: ergo nullo modo. Sed neque adeò concutit, quia aër rediens, & receptus in molli corpore pro parte, non uerberat locum.

Cor^m. Secundum in omni collisione seu duri, seu mollis, sed magis duri, dilabuntur partes aëris ad latera, ideo quod partes mediæ premuntur. Et quanto motus est tardior.

Cor^m. Tertium in motu ueloci fit maior ictus & læsio, & maiora omnia quam pro proportione motus: quoniam ob uelocitatē minus diffugit aëris. Et ideò fiunt grauia uulnera ex modico incremento uelocitatis motus.

Cor^m. Quartum res latæ, duræ concutiunt, & non uulnerant nisi sint cum magno impetu, aut ualde graues: acutæ autem uulnerant, sed non concutiunt, nisi parti acutæ lata succedat.

Quintum

Quintum, corpora dura magis læduntur à latis, quia scinduntur, mollia autem à tenuibus, quia diuiduntur: nam mollitie excipiunt aërem, & ita à latis non adeò patiuntur, & etiam, quoniam nec franguntur, nec sponte scinduntur. Com.

Sextum, etiam in duris penetrat aliquid aëris, aliter tota frangerentur. Constat etiam omnem lapidem marmoreum, aut siliceum esse porosum, ut dicunt. Et etiam quia recipitur in mollioribus, ergo etiam in durioribus & in durissimis: quod si non recipiant ut uitrum, & gemmæ tota franguntur. Hoc etiam uidetur sensisse Philosophus, qui uult, quòd res franguntur ob poros. Com.

Propositio sexagesimasecunda.

Proportionem motoris in plano ad motorem, qui eleuat pondus iuxta id, quod mouet inuenire.

Constitutum est inuenire proportionem uirium, quæ eleuant pondus ad uires, quæ ipsum in plano leui trahere possunt. Vires enim, quæ eleuant pondus a sunt eædem puta b, quæ uero trahunt c, sed hæ possunt uariari, nam quanto uinculum altius, aut decliuis locus magis, aut aspera superficies seu ponderis seu plani, tanto difficilius trahitur, & maiores exposcit uires: hoc enim experimento deprehenditur. Duæ uerò postremæ causæ etiam per se perspicuæ sunt, nec demonstratione indigent: nisi quod si planum sit durissimum, ac leuissimum, quod est asperum facilius trahitur, quia minore sui parte planum tangit. Nos prætereà supponimus planum æquale undique leue durum, & corpus undique sibi simile, id est cubi formam referens, & uinculum in imo: Demonstrare igitur expedit primum, quòd in hoc casu b est duplum ad c. Quia enim cum a eleuatur b uires superant motum obscurum seu occultum, seu pondus a, & si permitteretur fine eo, quod sustineret, descenderet iuxta pondus suum, quod sit d: nititur ergo per pondus d, at quia trahendo ducitur circa medium, nam plana superficies parum differt à rotunda terræ ob terræ magnitudinem, media erit repugnantia: in eo enim quod mouetur, grauitatem habet d in eo, quod nō remouetur nullam habet grauitatem, mediam ergo retinet grauitatem, quare ut b ad d, ita c ad dimidium, grauitatis a, at b est primum, quod potest mouere d, igitur c est primum, quod potest mouere dimidium a, ut ergo dimidium a ad d, ita c ad b, est igitur c dimidium b. Com.

Propositio sexagesimatertia.

Omne graue quanto proximius alligatum plano, tanto facilius trahitur.

Com. Sit graue a b c alligatum funibus in d e f, dico, quòd facilius trahetur per f e quàm c b & e b, quàm d a, quia si debet trahi ex a uel b, aut cadet, aut uis ex a & b communicabitur c, igitur erit minor quàm in c, & hoc naturaliter. Mathematica autem ratione quoniam ex a trahetur c, quasi per lineam d c at attractio recta est ualidior obliqua: igitur attractio c per d est debilior, quàm per f. Rursus si e trahitur per d cùm à peruenerit in d, erit perinde ac, si attractum esset per lineam c d, sed linea c d mouet duobus motibus, uno ad superiora, altero ad latus, ergo lentius ad f per d c quàm f c, quod erat demonstrandum.



Per 59. huius.

Propositio sexagesimaquarta.

Omne mobile quantò latius tanto tardius mouetur in plano.

Com. Propos. 40. Demonstratum est superius quòd si mobile sit sphæricum, & tangat planum in puncto, quòd mouetur per quancunque uim aptam diuidere medium. Quia ergo si tangat in puncto facillime mouetur, si in linea paulò difficilius, si per superficiem adhuc difficilius, igitur cum fiat attritio in motu quanto latius est mobile eo difficilius mouetur. Sit ergo mobile a b, quod moueatur uersus c, & quia pars b seu dimidium mouetur iuxta rationem medietatis, & pars a eodem modo, ergo conduplicata difficultate, quia medietas b impedit medietatem, a quanto latius est, & longius a b, tanto difficilius



Propos. 62. mouetur. Et hoc intelligitur de corporibus ualde latis propter dicta superius.

Propositio sexagesimaquinta.

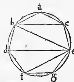
Proportionem duorum mobilium inter se cum auxilio medij inuenire.

Com. Graue descendit naturaliter quatuor causis: prima est ponderis magnitudo, unde quod grauius est celerius descendit. Secundò ob paruam medij repugnantiam, ideo quanto medium est rarius & mobile tenuius, tanto celerius descendit: contrà uerò tardius. Tertiò ob impetum aëris subsequentis: & ideo mobile quod ex eadem Propos. 30. materia constat, semper descendit parte acutiore suprapofita, ne aër cogatur celerius ferri: & quanto diutius descendit, tanto magis intenditur motus, atque augetur, ut suprà declaratum est. Quarta causa est, quod non impediatur ab aëre transuersim moto, et à latere: ideo leuia mobilia & magna non solum lentius descendunt, quoniam Propos. 59. paruam uim habeant, & magnam repugnantiam, sed quia transuer Propos. 62. sim impulsa minus mouentur motu recto, ut supra usum est. Porrò pro-

rò proportio ratione descensus aucta, declarata est paulo antè, quare cum medium supponatur eiusdem generis, & figura non eiusinodi, nec leuitas, ut prorsus non impellat, nedum ut moueat la tus: figura quoque eadem ambobus relinquetur proportio motus ad motum producta ex proportionibus incrementi in proportio- Per 42. har- nem ponderum, & iam habuimus proportionem incrementi ex in 61. har motu aëris, ergo proportio unius motus producti ad alteram no- rum. ta erit.

Propositio sexagesimasexta.

Proportionem laterum eptagoni, & subtensarum considerare, & quæ à reflexa proportione pendent.



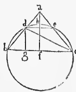
Sit eptagonus a b d f g e c, & subtensæ b c, & f e duobus lateribus, tribus autem d c d e, & erunt (quia intelligitur eptagono æquilatero, & æquiangulo) b c & e f inuicem æquales: & item d c, & d e æquales: & si du- Cum. centur b e & c f inuicem æquales: & ad a c & d g: quare cum angulus c b d consistat in arcu c e g f d, & angulus b d c in arcu b a c, Per 28. & 29. tertij Elem. & angulus b c d in arcu b d, & sit arcus c e g f d duplus arcus b a c, quia c e g f d subtendit quatuor latera epta- goni, & arcus b a c duo, & ita arcus etiam b a c duplus arcui b d erit angulus d b e duplus angulo c d b, & angulus c d b duplus an- Per ult. sexti gulo b c d, quare per demonstrata à nobis proportio laterum b d, Elem. b c, c d, est reflexa, igitur proportio d b & b e, ad d c, ut d e ad b e, & De Sub. lib. rursus proportio b d & d e ad b e, ut b e ad b d. Quare supposita 16. d b 1, b e 1 positione, erit d c latus 1 quad. p: 1 positione. Proportio Per 20. diff. uerò, ut dictum est b d & d c ad b c, id est p: ℞ 1 quad. p: 1 pos, ad 1 pos est, ut b c ad b d, id est 1 pos ad 1, igitur 1 p: ℞ v: 1 quad. p: 1 pos æquatur quadrato b c, quod est 1 quad. igitur 1 quad. m: 1 æquatur ℞ v: 1 quad. p: 1 pos quare 1 quad. quad. m: 2, quad. p: 1 æquatur 1 quad. p: 1 pos. Additis igitur communiter quatuor quadratis fient 1 quad. quad. p: 2 quad. p: 1 æqualia 5 quad. p: 1 pos. Et reducitur ad 1 cu. æqualem 1 $\frac{3}{4}$ pos p: $\frac{7}{8}$.

Aliter stante suppositione ut Ludouicus Ferrarius ex demon- stratis à Ptolemæo quadratum b c, & est 1 quad est æquale produ- cto ex b d in c e, quod est 1, & a b in d c, igitur detracto 1, produ- cto b d in c e ex 1 quad. quadrato c b, relinquitur productum ex a b in c d 1 quad. m: 1, ergo diuiso eo per a b, quæ est 1, relinquitur c d 1 quad. m: 1 huius uerò quadratum per eadē demonstrata à Pro-

lemæo, æquale est rectangulis ex b c in d e, & b d in c e, igitur 1 quad. quad. m: 2 quad. p: 1 est æquale 1 producto b d in c e, & producto b c in d e detracto 1 communi, relinquetur productum ex b c in d e 1 quad. quad. m: 2 quad. igitur diuiso 1 quad. quad. m: 2 quad. per 1 pos, exit 1 cu. m: 2 pos æqualia d e, & d e est æqualis d c, ut ab initio demonstrauimus, & d c fuit 1 quad. m: 1, igitur 1 cu. m: 2 æquantur 1 quad. m: 1, igitur 1 cu. p: 1 æquantur 1 quad. p: 2 pos.

Aliter ut Pacciolus, concurrant latera eptagoni b d, c e in a, & ducantur perpendiculares a f, d g & c d, & sit c e i c a 1 pos, & quia ut

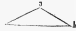
Per 42. primi Element. a e ad a c, ita d e ad b c, erit ergo b c $\frac{1 \text{ pos p: } 1}{1 \text{ pos}}$ quare b f $\frac{\frac{1}{2} \text{ pos } \frac{1}{2}}{1 \text{ pos}}$, & quia d h est dimidium d e, erit d h, & g f $\frac{1}{2}$, cum ergo b f sit $\frac{\frac{1}{2} \text{ pos p: } \frac{1}{2}}{}$ erit ergo diuisa $\frac{1}{2}$ pos per 1 pos, & exit $\frac{1}{2}$, b f $\frac{1}{2}$ p: $\frac{\frac{1}{2}}{1 \text{ pos}}$ igitur detracta g f relinquetur g b $\frac{\frac{1}{2}}{1 \text{ pos}}$, & eius quadratum $\frac{\frac{1}{4}}{1 \text{ qua}}$ igitur cum quadratum b d sit 1, erit quadratum g d 1 m: $\frac{\frac{1}{4}}{1 \text{ qua}}$ g e autem est composita ex e f, quæ est $\frac{1}{2}$ p: $\frac{\frac{1}{2}}{1 \text{ pos}}$ & f g quæ est $\frac{1}{2}$, erit igitur e g 1 p: $\frac{\frac{1}{2}}{1 \text{ pos}}$, & quadratū eius 1 p: $\frac{1}{\text{pos}}$ est $\frac{\frac{1}{4}}{1 \text{ quad.}}$ quare q̄dratū e d q̄d. est



Per 32. primi Element. compositum ex quadratis e g & g d erit 2 p: $\frac{1}{\text{pos}}$ c a uerò est æqualis c d, quia, ut demonstratum est angulus d c e est septima pars duorum rectorum, & angulus b e c ei duplus, quare cum c f a sit rectus erit ex trigesimasecunda primi Elementorum f a c tres septimæ unius recti, ergo d a c $\frac{6}{7}$ unius recti, d c a uerò $\frac{2}{7}$ unius recti, quia

Per sextam eiusdem. est septima pars duorum rectorum, igitur a d c est $\frac{6}{7}$ unius recti: igitur c d est æqualis c a, ergo quadratum quadrato: igitur 1 quad. p: 2 pos p: 1, æquatur 2 p: $\frac{1}{1 \text{ pos}}$ igitur 1 quad. p: 2 pos, æquantur 1 p: $\frac{1}{1 \text{ pos}}$. Quare 1 cub. p: 2 quad. æquatur 1 pos p: 1.

Sit etiam angulus a duplus b, & b c dupla b a: & erit per eadem proportio a c, & a b ad c b, ut c b ad c a. Ponamus ergo a b 1, erit b c 2, & a c 1 pos, & a c, a b 1 pos p: 1, & ducta in a c fit 1 quad. p: 1 pos, & hoc est æquale 4 quadrato b c per reflexæ proportionis diffinitionem. Igitur a c est ℞ 4$\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & ita de alijs.



Propositio sexagesimaseptima.

Si fuerint aliquot quantitates ab una quantitate, aliæq́ totidem ab eadem

ab eadem analogæ, erit proportio tertiæ unius ordinis ad tertiam alterius, ut secundæ ad secundam duplicata, & quartæ ad quartam triplicata, quintæ ad quintam quadruplicata, atque sic de alijs.

Sint quantitates b c d e f, ab a in continua proportione, & aliæ totidem g h k l m, dico quod proportio h c est duplicata ei, quæ est g ad b, & k ad d triplicata, & l ad e quadruplicata, & sic deinceps, sumatur enim unum, & ab o o p q r s in proportione b ad a, & t u x y z in proportione g ad a, erit igitur p quadratum o, & u quadratum t, & q cubus o, & x cubus t, & ita de alijs: ergo proportio u ad p duplicata ei, quæ t ad o, & x ad q triplicata ei, quæ t ad o, & potest etiam demonstrari generaliter ultra quadratum, & cubum: nam si ducatur t in o, fiatque α erit, proportio enim ad α eadem quæ t ad o, & proportio a ad p, ut t ad o, igitur per diffinitionem proportionis duplicatæ positam in quinto libro ab Euclide u ad p duplicata ei, quæ t ad o, & similiter ex t in p fit β ex o in u, γ eruntque q β γ x in continua proportione per eandem. Quia ergo proportio q ad β est ut o ad t, patet, quod x ad q est triplicata ei, quæ est t ad o, & ita de reliquis, cum ergo proportio p ad o sit, ut c ad b, & o ad n, ut b ad a, & n ad t, ut a ad g, & t ad u, ut g ad h, sequitur ut sit t ad a, ut g ad b, & u ad p, ut h ad c, igitur cum sit ut u ad p duplicata ei, quæ est t ad o erit h ad c, duplicata ei quæ est g ad b, & ita de reliquis, & non refert, seu dicas u ad p duplicatam ei, quæ est t ad o, seu dicas p ad u duplicatam ei, quæ est o ad t. Aliter & euidentius in duabus soleo demonstrare: cum enim sit c & h duplicata ei quæ est b & g ad a, ut supra, & quadrati b ad quadratum a, & quadrati g ad quadratum a duplicata his quæ b & g ad a erunt b & g quadratorum ad quadratum a, uclut c & h ad a. Et conuertendo quadrati a ad quadratum g, ut a ad h, constituantur ergo hic & erit quadrati b ad quadratū g, ita c ad h: sed quadrati b ad quadratum g, ut b ad g proportio duplicata igitur c ad h, ut b ad g duplicata.

Coni

Per 8. noni Ele. & 22. & 23. octaui.

Vide per 23. Petit.

Per 23. sexti Elem. & 33. undecimi.

Per 17. septimi Elem.

Diff. 10.

Per 24. quinti Elem.

Per 10 diff. quinti Elem.

Per 20. sexti Element.

		a		
b				g
c				h
d				k
e				l
f				m
		n		
o				t
p		α		u
q	β	γ		x
z				y
s				z

q̄d.	b	e
q̄d.	a	a
q̄d.	g	h

Propositio sexagesimaoctauas collectorum ab Euclide & Archimede.

Omnis cylindrus cono habenti basim, & altitudinem eandem 1
triplus est. Omnis cylindrus sphæræ habenti eundem magnum 2
circulum, & altitudinem sexquialter est. Omnis sphæra dupla est 3
cono, cuius basis est eius circulus magnus, & altitudo eadem, quæ
sphæræ ipsius. Omnis superficies sphæræ quadrupla est maiori 4
suo circulo. Superficies portionis sphæræ est æqualis circulo, cu 5
ius

ius semidiameter est linea ducta à uertice portionis ad finem illius.

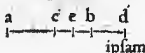
Quilibet sector sphæræ æqualis est cono, cuius basis est circu-
lus æqualis superficiei eiusdem portionis, altitudo uerò sphæræ se-
midiameter. Proportio sphæræ ad sectorem datum, est duplica-
ta ei, quę est dimetientis, ad lineam, quæ à uertice portionis ad lim-
bum. Cum enim sphæra sit æqualis cono, cuius basis est maior cir-
culus, altitudo uerò dupla dimetienti per tertiam harum, quæ hic
Per 14. & 15. duodecimi Ele. Eucl.
proponuntur: erit sphæra æqualis cono basim habenti circulum,
cuius semidiameter sit æqualis diametro sphæræ, altitudo uerò se-
midiameter sphæræ. At per sextam harum sector sphæræ est æqua-
lis cono habenti altitudinem semidiametrum sphærę, basim autem
Per 11. duodecimi Ele.
ipsam portionis superficiem: igitur proportio sphæræ ad secto-
rem, uelut circuli cuius diameter est dupla dimetienti sphæræ ad
circulum æqualem superficiei portionis: at superficies portionis
per quintam harum est æqualis circulo, cuius semidiameter est li-
nea à uertice portionis ad limbum eiusdem: ergo proportio sphæ-
ræ ad suum sectorem est uelut circuli, cuius dimetiens est duplus di-
metienti sphæræ, aut semidimetiens est æqualis dimetienti sphæræ
ad circulum, cuius semidimetiens est linea à uertice portionis ad
limbum. Sed proportio talium circulorum est duplicata propor-
Per 2. duodecimi, & 20. sexti Elem.
tioni semidimetientium, igitur proportio sphæræ ad suum secto-
rem est ueluti dimetientis sphæræ ad lineam, quæ à uertice portio-
8 nis ad limbum duplicata. Cuicunque portioni sphæræ conus ille
habetur æqualis, qui basim habeat eandem cum portione, altitudi-
nem uerò lineam rectam, quæ ad altitudinem portionis eandem
habeat proportionem, quam semidiametros sphæræ unà cum alti-
tudine reliquæ portionis habet ad eandem reliquæ portionis alti-
9 tudinem. Earum sphæræ portionum, quæ æqualibus superfi-
10 ciebus continentur medietas sphæræ maxima existit. Proportio
superficiei sphæræ plano diuisæ ad reliquæ portionis superficiem,
& residui sectoris ad sectorem, est uelut quadratorum duarum li-
nearum quæ à uerticulis sectionum ad communem superficiem
Per 22. quinti Elem.
plani portiones secantis descendunt: nam sectorem sphæræ, dico
corpus compositum ex portione, & cono illo. Ille idem etiam defi-
Per 20. sexti Elem.
nit Ellipsim coni acuti anguli sectionem, quam dicit etiam fieri se-
cto cylindro per planum non ad angulos rectos stante super cylin-
dri axem. Ab hac igitur coni acuti anguli sectione seu ellipsi cir-
Per 11. quinti Elem.
cumacta figura sphæroides corpus quod basim rotundam habet,
uocat: idq; duplex ob longum, quod fit diametro longiore quie-
scente, & prolatum quod fit quiescente breuiore: sicut reliquam sci-
licet parabolen aut hyperbolen, quia inferius non est terminata,

in cono

in cono rectangulo uocat rectanguli coni sectionem: ex qua cir-
cumacta fit conoidale, quia planam habet basim. Si ergo in ea- 11
dem rectanguli coni sectione à plano portiones æquales habentes
diametros abscindantur, illæ portiones erunt æquales. Et triangu-
li in eisdem portionibus inscripti æquales erunt. Diametrum uo-
cat in quacunque portione lineam, quæ omnes lineas basi æquidi-
stantes per æqualia diuidit. Omnis circuli cuius diameter est ma 12
ior diameter ellipsis proportio ad ellipsim est uelut directè diame-
tri ellipsis ad diametrum transuersam. Ex quo patet quod pro- 13
portio cuiuslibet circuli ad ellipsim est uelut quadrati suæ diame-
tri ad rectangulum recta, & transuersa diametro ellipsis compre-
hensum. Ex hoc rursus sequitur quod ellipsis ad ellipsim, ut re- 14
ctanguli ex diametris unius ad rectangulum ex diametris alterius.
Si conoides & sphæroides secet plano æquidistanti axi fiet se- 15
ctio conoidalis similis ei à qua conoides seu sphæroides descri-
ptum est. Sin autem supra axem plano ad perpendiculum erecto
sectio circulus erit. Et si secentur obliquè fiet ellipsis, modo omnia
latera comprehendat. Omnis portio conoidalis rectanguli, quam 16
planum secat, sexquialtera est, cono qui basim & axem eandem ha-
bet. Ex quo patet, quod si portio conoidalis rectanguli & sphæ- 17
ræ medietas eandem basim habeant & axem eundem, medietas
sphæræ sexquitertia erit conoidali portioni. Et si eiusdem rectan 18
guli conoidalis portiones abscindantur erit portionum propor-
tio uelut quadratorum axium. Cuiuslibet sphæroidis pars pla- 19
no per centrum abscissa dupla est cono basim & axem eadem ha-
benti. Si autem non super centrum erit proportio earum ad co- 20
num basim, & axem eandem habentem uelut coniunctæ ex axe al-
terius partis & dimidio axis sphæroidis ad axem alterius partis.
Demum proportio partis conoidis obtusi anguli plano abscis- 21
sæ ad conum, basim & axem eadem habentem est ueluti lineæ, com
positæ ex axe portionis & triplo adiectæ ad compositum ex axe
portionis & duplo eiusdem adiectæ. Adiectam uocat hyperbolis
transuersam. Omnis cylindrus cono triplus est habenti eandem 22
basim & altitudinem. Omnes cylindri coni sphæræ sunt in pro- 23
portione corporum similium planis superficiebus contentarum.

Propositio sexagesimanona, collectorum ex quatuor libris Apollonij Pergei & Q. Sereni.

Si fuerit linea bifariam diuisa, eique in longum alia addita, & rur- 1
sus alia detracta, fueritque totius cum addita ad eam, quæ addita est
ueluti residui ad detractam erit lineæ com-
positæ ex addita, & dimidia ad dimidiam



ipsam

ipsam uelut dimidiæ ad differentiam eius, & detractæ. Rursusq; li-
neæ compositæ ex dimidio & residuo dimidiæ ac detractæ ad li-
neam compositam ex addita & detracta ut residui dimidiæ, & de-
tractæ ad partem detractam. Et rursus totius compositæ ad com-
positam ex dimidia & addita, uelut compositæ ex addita, & diffe-
rentia ad ipsam additam. Velut sit proposita a b per æqualia diuisa
in c, addita b d, & detracta b e, sit proportio a d ad d b, ut a e ad e b,
dico esse, ut c d ad c b, ita a b ad c e. Et ut a e ad e d ut c e ad e b. Et ite-
2 rum ut a d ad c d uelut e d ad d b. In parabole proportio partium
diametri ad uerticem terminantium duplicata est proportioni li-
nearum ab eisdem punctis ordinatim ductarum ad ipsam sectio-
3 nem. In hyperbole autem & ellipsi & circuli circumferentia erit
quadratorum linearum ordinatim ductarum inter se uelut rectan-
4 gulorum partium diametri ad eadem puncta terminantium. Et in
eisdem si à puncto peripheriæ contingens ad diametrum ducatur,
& ab eodem ordinata, erit ut partis diametri interceptę inter extre-
mum, & ordinatam ad partem inter ordinatam & peripheriam, ue-
lut interceptæ inter extremum & contingentem ad interceptam
5 exterius inter finem contingentis & peripheriam. Et in eisdem
quadratum semidiametri æquale esse rectangulo ex intercepta in-
ter centrum & casum contingentis in interceptam inter centrum &
6 casum ordinatæ à loco contactus productæ. Si parabolen recta
linea contingens ad diametrum perueniat, sumptoq; puncto alio
in sectione æquidistans ab eo ducatur contingenti: & ab utroque
etiam ad diametrum ordinatæ, demum à uertice æquidistans illis,
& à priore puncto diametro æquidistans donec concurrant, erit
triangulus ex ordinata, & æquidistante à secundo puncto, & dia-
metri parte contentus rectangulo ex prima ordinata & parte dia-
metri inter uerticem & secundam ordinatam contento æqualis.
7 Si in parabole contingente ad diametrum ducta ex alio puncto
ei æquidistans ducatur ex ipsa sectione, ubi iterum secat sectionem
intercepta per æqualia diuidetur linea à puncto contingentis dia-
8 metro æquidistanti ducta. Idem uerò fermè continget ducta li-
nea à centro in locum contactus, secabit enim omnes contingenti
9 æquidistantes in hyperbole, ellipsi atq; circulo. Est autem omne
centrum in medio diametri: diameter autem in circulo & ellipsi il-
las per æqualia diuidit intus enim est: in contrapositis inter uerti-
cem, & uerticem posita est exterius utriusque contingenti ad per-
pendiculum insistens. In hyperbole autem exterius etiam adiacet,
ut in contrapositis eadem & transuersa uocatur: cuius terminus est
punctus concursus cum latere trianguli, qui conum per axem diui-
dit:

dit: linea uerò tangens uerticem hyperbolis ad quam ordinatæ
possunt, Recta appellabitur. Data rectâ linea positione, aliaq́ ma 10
gnitudine data & angulo parabolen, & hyperbolen, & ellipsim;
& contrapositas circa datam positione tanquàm diametrum de-
scribere tanquàm cono erecto, ut angulus ad uerticem sectionis
comprehensus sit, & per rectam rectangulum æquale comprehen-
datur quadrato datæ lineæ magnitudine. Si lineâ in duas partes 11
diuidatur, eiq́ utrinque æquales lineæ adiun-
gantur erit rectangulum ex partibus totius æ-
quale rectangulis partium prioris lineæ, & ex
priore linea cum una adiecta in eam, quæ adiecta est. Si hyperbo 12
len recta linea in uertice contingat, & utrinque abscindatur, quan-
tum est, quod potest in quartam partem rectanguli ex diametro
transuersa hyperbolis, quæ exterius adiacet in eam, quæ recta dici-
tur, ad quam, quæ ordinatim ducuntur, sunt æquidistantes lineæ,
quæ à sectionis centro ad terminos contingentis ducuntur semper
ipsi sectioni magis appropinquabunt, nec unquam conuenient: &
ob id asymptoton appellantur. Nec ullæ aliæ intra angulũ illum 13
inueniri poterunt. Vnde etiam intra datũ angulum describere do-
cemur hyperbolen cuius anguli latera sint asymptota. Asymptotis 14
duabus propositis uni hyperboli, infinitas alias eidem asymptotas
inuenire. Duabus rectis asymptotis infinitas subijci posse hyperbo
les illis rectis, & inter se asymptotas. Cum in duabus superficie- 15
bus æquidistantibus duo circuli æquales, quorum linea per cen-
tra non est ad perpendiculum earum infinitis planis secantur, fiunt
in ipsis lineæ à peripheria in peripheriam rectæ quæ corpus cylin-
dricum claudunt quod scalenus cylindrus appellatur: longè alius
ab eo, qui fit recto cylindro per duo plana æquidistantia, sed non
ad perpendiculum posita dissecto. nam eius extremæ superficies
non circuli, sed ellipses sunt. Si scalenus cylindrus plano non æ- 16
quidistanti basi, sed ita ut angulos interiores æquales faciat angu-
lis basis sectio circulus erit: uocaturq́ hæc sectio subcontraria: nec
ulla præter hanc & basi æquidistantem sectio circulus esse potest:
sed sunt ellipses. Super eundem circulum, & sub eadem altitudi- 17
ne ellipses similes in cono & cylindro esse possunt, quæ ab eodem
plano fiant, docetq́ uel basi uel cono uel cylindro, aut cono pro-
posito reliqua facere, quod est ualde admirabile: cum ellipsis cylin-
drica semper æqualis sit in utraque parte à diametro transuersa
utrinque æqualiter distante, conica uerò minor necessariò sit in su-
periore parte uersus coni uerticem latior in inferiore, ubi partes a
diametro transuersa æqualiter distiterint: ipse autem non solum si-

18 miles, sed unam perſæpe in utriſq; eſſe uult. Sed & hoc Archimedes dicere uidetur: lineæ ductæ à uertice coni ſcaleni ad perpendiculum ſuper baſes ſingulas omnium triangulorum per axem coni tranſeuntium in peripheriam unius circuli cadunt.

Propoſitio ſeptuageſima.

Si fuerint tres quantitates in continua proportione, aliæq; totidem in continua proportione, poterunt conſtituere tres quantitates in æquali differentia peruerſim copulatæ.

Com. Velut ſint a b c primi ordinis, & d e f ſecundi, & ſit a 8,
16 b 4, c 2, & d $2\frac{1}{4}$, e $1\frac{1}{2}$, f 1, tunc iunctis a & e fit $9\frac{1}{2}$, & b & d b $\frac{1}{4}$, & e cum f 3, at 3 & $6\frac{1}{4}$ & $9\frac{1}{2}$ æqualiter diſtant, nam differentia eſt $3\frac{1}{4}$. At ſi iungatur cum e, & b cum f, & c cum d idem poterit contingere: ut in figura uides, nam a e eſt $8\frac{1}{2}$,

a	8	d	$2\frac{1}{4}$
b	4	e	$1\frac{1}{2}$
c	2	f	1

a	9	d	$1\frac{1}{2}$ m: R: $1\frac{1}{4}$
b	6	e	R: $1\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
c	4	f	1

p: R: $1\frac{1}{4}$, & b f 7, & c d $5\frac{1}{2}$, m: R: $1\frac{1}{4}$, & differentia b f ab utroq; compoſito, eſt $1\frac{1}{2}$ p: R: $1\frac{1}{4}$, qua excedit & exceditur. Dico modo, quaſi ex ordine coniungantur qualeſcunq; proportiones fuerint, modo non ſint ambæ æqualitatis 1, ut b iungatur cum c, & reliquæ ut libet, uelut a cum d, & c cum f, uel a cum f, & e cum d, nunquam fient
17 æquales exceſſus, nam de primo eſt clarum: nam ſi a cum d iungatur, & ambæ fuerint maximæ, maior eſt differentia a ad b, quàm b ad c, & maior etiam d ad e quàm e ad f, ideo maior erit differentia a & d ad b e quàm b e ad c f, quod erat probandum. Eodem modo ſed laborioſius demonſtratur reliquus modus ſcilicet, quod coniunctio a f ad b e eſt maior aut minor quàm b e ad c d, ex hoc ſequuntur corrolaria.

Primum, tres æquales quantitates non poſſunt diuidi in tres, & tres quantitates in continua proportione ordinatè, ut dixi, niſi utriuſque ordinis tres, ac tres inuicem ſint æquales.

Secundum, tres quantitates in æquali exceſſu ordinatè, ut dixi, non poſſunt diuidi in tres, & tres quantitates, quæ ſint in eadem proportione quantumcunq; proportiones illæ duorum ordinum ſint diuerſæ.

Tertium, tres quantitates, quæ ſint in eadem proportione non poſſunt diuidi ordinatè in tres ac tres, quæ ſint in continua proportione, niſi ſint ambæ proportiones eædem cum proportione ipſarum quantitatum.

Propoſitio

Propositio septuagesimaprima.

Proportionem leuitatis ponderis per uirgam torcularem attracti ad rectam suspensionem inuenire.

Sit torcularis uirga, cuius spiræ a b per circuitum sint centuplæ ad altitudinem a b, & axis d c semidiametro b c centupla, & quoniam per superius assumpta, qualis est proportio spatij ad spatium, talis leuitatis ad leuitatē, igitᵉ e pondus ascendens per a b leuius quam per b c rectā centuplo, et similiter cum circuitus b c, & d c sint in eodem tempore, & circuitus d c, sit centuplus ad spiralem b c per demonstrata ab Euclide, ergo e erit centuplo leuius circumductum per d quàm b, sed per b circumductum centuplo leuius est, quàm per rectam, igitur e ponderat solum particulam ex decem millibus recti ponderis.

Com.

Propos. 45.



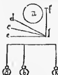
Propositio septuagesimasecunda.

Proportionem ponderis sphæræ pendentis ad ascendentem per accliue planum inuenire.

Sit sphæra æqualis ponderi g in puncto b, quæ debeat trahi super b c accliue planum b e ad perpendiculum plani b f. Quia ergo in b e mouetur a, quauis modica ui per dicta superius, erit per communem animi sententiam uis, quæ mouebit a per e b nulla: per dicta uerò a mouebitur ad f semper, a constanti ui æquali g, & per b c a constanti ui æquali k, sicut per b d a constanti æquali h, ergo per ultimam petitionem, cùm termini seruent, quo ad partes eandem rationem singuli per se, & motus per b e sit a nulla ui, erit proportio g ad k, uelut proportio uis, quæ mouet per b f ad uim, quæ mouet per b c, & uelut anguli per e b f recti ad angulum e b c, & ita uis, quæ mouet a per b f, & est, ut dictum est, g ad uim, quæ mouet per b d, & est h ex supposito, ut c b f ad e b d, igitur proportio difficultatis motus a per b d ad idem a per b c, est uelut h ad k, quod erat demonstrandum.

Com.

Propos. 40. 7



Propositio septuagesimatertia.

Proportionem ponderum attractorum penes figuram in plano inuenire.

Com. Sint duo pondera æqualia in plano a & b, & sit a superficies qua planum tangit dupla b superficiei, qua planum tangit: dico quod si trahantur ab imo, quod erunt æqualia: suspendantur, & erunt æqualia ex supposito, sed a quiescens in plano est dimidium a suspensi, & b quiescens in plano est dimidium b suspensi ex demonstratis superius, igitur per communem animi sententiam a & b in plano sunt æqualia.



Cor. Ex hoc manifestum est, quod proportio uirium trahentium pondera in plano eadem est, quæ ipsorum ponderum dum suspenduntur, Vbi planum æquale sit, & solidum. Propos. 62.

Propositio septuagesimaquarta.

Proportionem concutientis ad concussum stabili inuenire.

Com. Intelligo concutiens esse solidum, quod non frangitur, idque grauitate, & impetu concutere, nam de duritie supponitur, & grauitas, ut demonstrabitur in corrolario est iuxta superficiem inferiorem ponderi comparatam. Cum ergo motus concussionis magnitudo constet ex grauitate, impetu & figura, concussi autem ex pondere & connexione: multiplicatis inuicem partibus productorum proportio, erit proportio concussionis: ut sit grauitas decem, impetus quadraginta: pondus icti centum connexio ut duo, ducemus quadraginta in decem, & fient quadringenta, et duo in centum, fient ducenta, igitur concussio erit dupla.

Cor. 1. Cum fuerit figura rotunda, concussio erit integra in puncto: quia sphæra iacens in plano totum pondus in punctum cogit.

Cor. 2. Si autem planum est, quod ijcitur, proportio totius ad totum est minor, quàm partis ad partem pro ratione quantitatis latitudinis, sed maior ratione aëris comprehensi, de quo infra. Propos. 84.

Cor. 3. Cum proportio minor fuerit stabile, non poterit in solido plano moueri: aliter fieret motus à debiliore, & per præcedentem etiam posset pari ratione eleuari.

Cor. 4. Cumque stabile non mouetur, & omne agens agat aliquid necesse est, ut stabilis partes cedant, aut dissoluantur. Quanto ergo magis cedit, tanto minus dissoluitur.

Causæ

Causæ igitur quæ alleuiant ictum, ne dissoluatur, sunt septem le- Cor. 5.
uitas ictus, ponderis, fractura, mollities eius, quod icitur, mollities eius, quod excipit ictum, motus eiusdem, & figura lata, & inæqualis. Durities ergo, quatenus fracturæ opponitur, aliud est, quam ut mollitiei: & utraque est causa, quæ auget ictum, ut reliquæ oppositæ minuunt, dicemus autem de his inferius.

Propositio septuagesimaquinta.

Proportionem immoti in aqua ad immotum in terra in excipiendo ictum inuenire.

Sit pondus a in terra æquale b eiusdem naturæ magnitudinis fi- Cor.
guræ, & eodem in situ, quod sit in aqua porrò a, si esset affixum terræ oporteret, ut conuellatur, aut dissoluatur aut frangatur. Et clarum est, quod totum ictum excipit. Si uerò affixum non sit, euertitur, & tanto minorem partem excipit ictus, quanto facilior est ad euersionem. Vnde nata fabula de quercu, quæ cum immobilis esset, & staret uento euersa est, arundo flectendo se, cecidit quidem, sed non est eradicata. Sermo igitur est de b insidenti aquæ in comparatione ad a, quando excipit plenum ictum. Cum ergo b tangitur, excipit plenum ictum illo instanti, sed quia non excipitur ictus cedente materia, & antequam materia cedat b mouetur loco, quia insidet aquæ, ergo non excipit ictum. Proponatur ergo, quod moueatur b per c spatium in d tempore, & sit, ut idem b ab e ui trahatur per idem spatium in eodem tempore ex loco directo ad eandem partem: qualis ergo proportio e ad b, & aërem, qui cum eo resistit, talis proportio ictus f grauis puta in a ad ictum ♃ in b. Quia per demonstrata superius proportio f ad a producitur ex proportionibus e ad b, & a ad e, ergo diuisa proportione f ad a per proportionem e ad b exibit proportio ictus ♃ in a ad ictum ♃ in b quod erat demonstrandum. Propof. 2. Per 42. & 43. Propof.

Ex hoc patet, quod b quanto mollius, leuius, & strictius in imo, Cor.
& in tenuiore aqua, eo minus lædetur. Et quanto ictus lentior fuerit etiam quod sit grauius ♃.

Propositio septuagesimasexta.

Proportionem duorum mobilium sibi inuicem concurrentium per rectam inuenire.

Com. Iam cognito, quod mobilia, quæ loco mouentur per præcedentes, sed omnino quiescunt integros excipiunt ictus: alia quidem, quæ concurrunt, non omnino resiliunt, alia uerò resiliunt, & quæ resiliunt minores excipiunt ictus, sequitur ut diuersa sit comparatio: nam erunt, quæ stando excipient ictus, & hæc integros ut muri, & quæ concurrendo, nec resiliendo, ut equi cursu incitati: & quæ stando, sed resiliendo, ut naues stantes: & quæ concurrendo, resiliendoque ut naues uentis, & triremes ab impulsu: bifariam ergo contingit intelligi, quod proponitur. Sed in utroque etiam sensu uarietas est: nam ut concurrit pars altera celerius, ita etiam magis concutitur. Et ideo fit, ut proportio ictus sit in comparatione ad grauitatem dupla, & concurrant æqualiter, & sint æquè grauia, & neutrum resiliat, erunt in proportione quadrupla, & eodem modo si utrunque resiliat. At si diuerso impetu ferantur, ut dixi, tria erunt præcipuè consideranda grauitas seu pondus, impetus, & an resiliat. Quanto enim grauiora fuerint, & maiore impetu agantur, & non resilierint eo maiorem ictum recipient: quanto leuiora, & minore impetu, & magis resilierint, minus lædentur. Sed & in debilitando ictum considerare oportet tria, quod resiliat, quod diffugiat, quod circumuertatur: resiliunt naues, si rostris concurrant pleno ictu: si uerò non pleno ictu concurrant, sed diffugiant hoc experimento compertum est minimum esse ictum: si rostro transuersum nauis feriatur medium, est hoc.

Sit ergo ut a b nauis tangat rostro b c sic ut diffugiat, erit hypomochlium c, & si tangat e f hypomochlium est in d dupla, ergo est c b ipsi d e, igitur ictus duplo minor excipitur à e b quàm e f. Est etiam tempus longè maius, quo excipit ictum e f, quàm b c: statim enim discedit b c occurritque alijs partibus, in c autem impingit, & angulus a d e est longè maior recto, quàm a b f: ob hæc igitur longè maior est ictus c f quàm b c: uocant autem hoc declinationem.



Propositio septuagesimaseptima.

Proportionem motus obliqui ad motum rectum in nauibus inuenire.

Com. Cùm uentus fertur ad puppim rectà, nauisque gubernaculum dirigitur,

rigitur, tenduntur que uela ac expanduntur summa in parte mali, tunc motus est uelocissimus: fingamus autem, quod omnia ad idem tendant præter uentum, qui non directus sit ad puppim, sed à latere, ut uides, & temo sit in contrarium tantundem directus, & supponamus pro nunc, quod uelum sit solum in anteriore parte nauis, nam secus esset nimis magna differentia, quod nauis una ageretur tribus malis alia una: Quæritur igitur proportio motus b c ad motum d e: fiat ergo c f æqualis e g, ita ut f angulus rectus sit, & manifestum est, quod h c maior est c f, cum ergo angulus f rectus sit, quanto maior erit angulus h c f, tanto maior erit proportio h c ad c f, quod est primum a, inde noto angulo h c f per ea, quæ tradita sunt ab Astrologis de sinu & arcu erit nota proportio c h ad c f, ideo ad e g fiat ergo c k æqualis c h, igitur c k erit maior e g, si ergo perambulabit æqualiter c, ut c h, erit temporis motus e g ad motum e f, ut c k ad c f, igitur cum nota sit c k, est enim æqualis c h, erit temporis ad tempus proportio nota. Quod autem in æquali tempore mouebitur nauis per c k & h c patet ex assumpto inferius declarando. Propos. 99.



Propositio septuagesimaoctaua.

Propositionem nauis ad triremes quotuis concurrentes demonstrare.

Sit nauis deferens pondus decuplo maius triremi, & constat, quod impulsu æquabitur decem triremibus, ubi flante uento e puppi æqualiter feratur in aduersum, quantum triremes ui hominum. Sed quoniam triremes impediuntur à uento licet sine uelis sint, habent enim & ipsæ malum, & uelum, sed exigua comparatione nauium, ideo ictus ille multo ualidior est ex demonstratis. Cum uero uis illa simul sit, liquet, quod hoc in casu nisi machinæ obstarent una nauis mille posset obruere triremes disiunctas per tantum spatium inter se, quantum est id, in quo nauis potest uenti impulsum recipere. At impedimentorum maximum sunt machinæ, quæ in nauim collimant à lateribus, cum triremes quaquà uersum se agant, & ob id proram solam exponunt ictibus, in quam difficile est collimare, & si tangatur pars ea robustior est, nec periculum euersionis adeò incurrit, ut à lateribus: nec enim adeò angusta est à prora ad puppim nauis, quam à latere ad latus: his tot causis minus est obnoxia machinis triremis, quàm nauis. Sed & alia causa est, quoniam necesse est ut ob angulum laterum ad proram Com. Propos. 74.

ictus dilabatur sępius solum traiecta superficie. Secundum impedimentum est à uento, si ualde obliquus sit, nam ad rectum impulsum, multum debilitatur: aut si inconstans sit, uiribusq; remittatur. Tertium uerò si triremes inuicem connexæ sint, ac se tangant, in
Prop. 109. quas nauis dirigitur. Sed & hoc infrà demonstrabitur nauim, ut leuior fuerit facilius elabi, sed ut pondere magis onerata grauiores ictus inferre: ob hoc triremem inuenerunt mediam maximi usus ἀμφίρρυν. Galeonum uulgò uocant.

Propositio septuagesimanona.

Proportionem medicamentorum purgantium inuicem declarare.

Co^m. Scio, quàm multa concurrant, etiam per se ad purgationem multitudo humorum præparatio locus propinquus, sed nobis sermo est pari sub conditione, ut sit dimidia uncia Cassiæ nigræ in tribus uicibus expurget libram humorum, & uelim scire ab una uncia, quoties expurgabitur, & quantum. Dico, quod in scamonio, & agarico hæc ratio deprehendi potest: in his autem medicamentis, quæ magis leniunt, quàm à proprietate educant, ut est casfia nigra, ratio hæc non ualet, quoniam feces quandoque pro maiore parte educuntur, ita ut etiam multiplicato medicamento desit, quod educatur. Et quamuis humores iuxta proportionem trahat, cum tamen feces proportionem non feruent, sequitur: ut aggregati ad
Ex conuersa 18. quinti. aggregatum proportio non seruetur. At non est facile postmodum internoscere feces ab humoribus, quocirca uidetur proportio illa confundi. Quod si medicamentum leniens, fiat ob quantitatem purgans humores, ut de multa casfia nigra, tunc non potest asignari illa comparatio nisi ut est medicamentum purgans. Et sit gratia exempli, primum ut grana sex scamonij purgent aliquem ter, & uncias decem bilis, dico iuxta rationem suprapositam, quod
Propos. 37. grana duodecim purgabunt iuxta proportionem duplam sesquialteram, si duo grana nil purgant, sed commouent. æqualia enim
Propos. 42. sunt ut quatuor sint dupla, & sex tripla, & mouent ter, quia sesquialteram habent proportionem ad excessum, igitur duodecim duplam, & sesquialteram ad quatuor, nam decem ad quatuor est dupla sesquialtera, & purgabit septies cum nixu libras duas ferme bilis. Vt comparatio fiat excessus ad uim, quæ resistit eodem modo. In casfia ergo nigra si uncia una nō purga, sed lenit tantum, & duæ unciæ purgant ter, & libram unam bilis, tres unciæ duplam

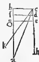
habent

habent proportionem iuxta excessum ad unam, excessus igitur duplum purgabunt, & duplo magis, id est præter feces libras duas bilis in sex uicibus.

Propositio octuagesima.

Proportionem motus secundum obliquum ad rectum in spatio declarare.

Hæc uidetur similis superiori cuidam propositioni, sed tamen in hoc differt, quoniam in c a supponimus nauim moueri, ut concutiat, hic autem iuxta motum solum: ut proponamus b nauim ferri uersus a uento recto ex b in a: sit autem uentus ex c in a mouens nauim ex b in a: non enim mouebit ut quidam putant in ratione c a ad b a: ut si c a sit sexquiquarta ad b a, ut æquali impetu ex b & c flante uento moueretur tardius per c a, quam per b a, quia æqualiter ex supposito: ergo tanto tardius c fertur in a, quam b in idem quanto longior est c a, b a igitur si b perueniet in a in quatuor diebus c perueniet in idem a in quinque diebus. Hoc enim est per se manifestum: sed non quærimus id, sed ut uento c a æquali per c a ei, qui est b a per b a, ubi b moueatur uento c a per b a, quanto tardius mouebitur. Mouebitur. n. tardius ad a per b a, quam per c a, at per c a tardius, quam ex b in a per æqualem uim, ergo multo tardius ex b in a per c a uentum, quam per uentum ex b in a. Quærimus ergo compositionem horum, ut sit c nauis, quæ debeat transferri ad a per uentum ex b, & sequitur, quod tardius, quam ex c per uentum ex c in a, & tardius ex b per uentum ex c in a. Ergo malus, qui in prora est conuoluto eo, qui est in puppi, ut etiam Aristoteles docet tantundem nititur ad rectum ex c in æquidistantem locum ab a quantum c distat a b contra temo, qui in puppi est dirigitur ad h, & si ualidius sit uentus etiam adiuuante temonem, seu contra nitente, quantum licet mobili pondere nauis ad id latus, premitur enim nauis, quasi submergi debeat, uento in aduersum premente, ut si uentus repente huic contrarius exoriatur, periculū subeat, ne obruatur. Cum ergo uentus ex b feratur, æquidistans c h, & c feratur per temonem in k, & ab oppositis æqualis actio sequatur, imò tota impeditur, ex c in b feretur iuxta proportionem anguli, quem constituit h c cum a c ad totum rectum. Si igitur ex c in a debuit ferri in duodecim horis ob uim



Cōm.

Quæst. 7. Mechanicæ.

uim uenti, & uiæ longitudinem, angulus uerò h c a sit sexta recti pars, feretur ex c uersus a ad quantitatem b a in quatuordecim horis: igitur rursus quanta est proportio c a ad b a tantum est temporis, in quo fertur ex c ad a ad quatuordecim horas per uentum b a.

Propositio octuagesimaprima.

Qualis sit angulus, per quem potest moueri nauis ad rectum explorare.

Com. Cum in præcedenti propositione ostensum sit angulum k c a oportere esse æqualem angulo h c a, ut feratur, c in a uento c h, nec tamen prorsus, sed temo magis inflectit uersus k quam uentus cogit uersus h: sicut contra maiori ui uentus dirigit ad h, quàm temo ad k, ut necesse sit nauim flecti ad k pondere, ideo si uentus esset transuersus periclitaretur, necesse est, ut per omnes uentos, qui ferunt ab ca, quæ ad perpendiculum super c a, & sunt quatuordecim: sed quoniam, ut dixi, pondere adiuuante uis uenti minor sit, necesse est, ut per uentos debiliores feratur magis ab extremis, qui prope perpendiculum sunt: ita ut numerus omnium sit, cum leuissimi fuerint, quatuordecim, cum uiolentissimi, tres tantum proprius, & qui distant trigesimasecunda parte totius circuli, id est partibus undecimi, cum quarta reliqui undecim, medij sunt: ut tanto plures assumi possint à Nauclero, quanto molliores sunt uenti, tanto pauciores, quo uiolentiores. Tutius autem fuerit in ualidis uentis dirigere nauim per uentum proximiorem, quam per ipsummet, qui rectè tendit ad locum. Veluti tendat nauis ex a in b, uentus tendat in Propos. 83 c ualidior, cumque magnus fuerit angulus c a b, ut potè dodrans totius recti, ut esset temo dirigendus ad sextum uentum altrinsecus dirigemus solum ad quintum, ut feratur in d, & hoc erit tanto c lenius, & celerius feratur per a d & d b, quàm si nauis recta lata esset ex a in b, insuper tutius.

Propositio octuagesimasecunda.

Proportionem uelorum indagare.

Com. Vela tribus in locis disponi solent dolo b, quod in prora constituitur, & in malo, qui ponitur in medio ratione, quæ inferius ostendetur, sed non ad unguem, quia cum malus in anteriorem partem à uento impellatur, si esset in medio, semper præmeretur nauis in anteriorem partem, ex quo duo magna incommoda sequerentur: primùm ut periculum subiret, ne inuersa in anteriorem partem

tem submergeretur. Secundum ne pressa in parte anteriore difficilius aquas dissecaret, & ob id longe tardius moueretur. Propter hæc duo incommoda igitur malus etiam, si unicus esset (quod uulgatissimum maioribus nostris fuit) in parte magis proræ proxima locabatur à gubernatoribus, ut esset quasi in triente à rostro in besse à puppi: Rarum fuit, & memorabile, quod nunc passim habet olim Antigoni τριαμένος, uelorum trium: quorum postremum Epidromus ut ipsa uoce intelligamus non fuisse uelum in malo ipso medio, sed in puppi constitutum. Causa Dolonis inferius exponetur: quod autem esset paruum, & omnium minimum, ut nauis facile ab eo inuerteretur. Vnde etiam nunc minus minime habent tam quantitate, quam etiam altitudine, quod uocant Trinchetum, solum enim sustinet nauim, quæ à uentis, uel undis mergi solet: ab undis ubi humilior est, à uentis à lateribus, et anteriore parte. Vnde humile, & exiguum uelum efficit, ut nauis anteriore parte leuis, nec mergatur prona à uentis, nec aquas ea excipiat, nec tamen impelli potest nauis in scopulos, nec euerti ob causas dictas: ob quæ in magnis tempestatibus hoc ipso duntaxat uti solent. Quod etsi nimium sæuierint, etiam illud demittunt, & si fieri potest, etiam malum ipsum quamuis sine uelo sit. Sed plerunque circumuolutam, & implicatam solet antennam annexam, atque suspensam habere. Sed & ne nauis prorsum obruatur, quoniam ea pars omnem uentorum uim excipere solet, & ut leuissima sit ijdem Gubernatores puppim multa arena, lapillisque onerant. Ergo uelocitas nauis à uentorum impetu, eorumque rectitudine à uelorum magnitudine, & loco humiliore, aut sublimiore habetur: tum nauis leuitate, & forma. Quæ enim non merguntur ut δρομάδες (sic enim uocat Aristophanes) eas, quas nunc uulgus fregatas appellat) quasi aquas innatantes cursu sunt uelocissimæ. Et longiores latis. Post has sunt, quæ carinam habent tenuem, ut facile aquas diuidant. Vltimo loco, quæ quasi mediæ, ante quidem tenues, post latiores ad uelocem cursum, & ferendum onera aptæ, & humiles altis: & leui ex ligno. Sed nos de uelorum uarietate loquimur, non ea, quæ ad malos pertinet. Constat enim medio loco plus mouere, quam in extremis, ut infra docebimus. Antiquo enim tempore opus non fuit malorum multitudine, quoniam syderibus uias dirigebant ob id non ad amussim, quoniam linea dirigi non poterat maxime ob motus obliquitatem in circulo uisus: ideo mali multi confusionem in cursu, & impedimentum in naui, maiusque periculum attulissent. At nunc inuenta pyxide, & lapidis Herculei

culei auxilio pluribus locis uela diſpoſita melius dirigunt iter,ut quaſi craſſa minerua depictum,& poteſtate deformatum, ad amuſſim contrahant. Motus ergo magnitudo non ſimpliciter conſtat,
Propoſ. 86. ſed comparatione ſuperficiei ueli ad uelum longitudine quidem,
Propoſ. 42. ac latitudine conſlata per multiplicationem. Altitudinis quoque ut infra exponetur. Ex quorum omnium ductu, quaſi cubica, uel triplicata ratione, ut ſuperius oſtenſum eſt, ratio uelocitatis motus nauium conflatur.

Propoſitio octuageſima tertia.

Proportionem receſſus à recta uia ad obliquitatem inueſtigare.
Co^m. Sit nauis in a itura in b (uentus rectus ad c, medius ad e) per obliquū, cum ergo tardius moueatur per a e quàm a c & per a b, quam per a d, & ſint ad perpendiculum b e, b d quas conſtat eſſe breuiſsimas earum, quæ ad a c & ad a d. Quæritur igitur quando uelocius ferretur ad b, an cum per a c, c b, an cum per a d, d b, an cum per a b ſimpliciter. Et conſtat quod a d & d b longiores ſunt a b, iſtud enim demonſtratum eſt ab Euclide in primo Elementorum, dico modo a c,&
Propoſ. 20. c b eſſe longiores a d & d b, nam quadrata a d & d b
Propoſ. 47. & a c & c b ſunt æqualia quadrato a b per dicta ibidem, & ideo quadrata a c & c b æqualia quadratis a d & d b, ſed a d eſt longior a c, quia ducta c d angulus d c a eſt obtuſus, igitur ad maiorem a c per decimam nonam primi Elementorum: quare per communem animi ſententiam quadratum a d maius eſt quadrato a c, quare rurſus per communem animi ſententiam quadratum c b maius eſt quadrato d b. Cum ergo quadrata a d & d b æqualia ſint quadratis a c & c b, & a d ſit maior a c & c b maior d b, ſequitur per nonam ſecundi Elementorum, quod a c & c d ſint maiores a d & d b pariter acceptis. Si ergo maior fuerit exceſſus quàm proportio motus per temonem cohibiti, ut ſupra uiſum eſt, tardius mouebitur per a d, d b quàm a b per a c, c b quàm per a d, d b, ſed ſi contrà maior ſit



Propoſ. 80. proportio motus cohibiti à temone ad motum liberum quàm exceſſus ad exceſſum uelocius mouebitur per a d d b, quàm per a b, & per a c quàm per a b. Accedit huic incommodo longioris uiæ, quod uento a c non poterit ferri nauis ex c d in b, quoniam antea ægre ferebatur: & nunc ægrius per c b quàm a b, plus enim diſtat uentus a c ab itinere c a quàm à uento a b, ut uiſum eſt ſuperius, igitur multo melius eſt (ni quid obſtet) ire per a b quàm per ullā aliam
Per 81. Propoſ. uiam: niſi ſtationes ſint in c d, uel periculum immineat in a b. Vbi tamen uenti ſecundarent, tantum eſt uirium in recto curſu, & æquali

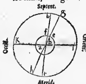
uelocitate

uelocitate ferretur citius ex a in b per a d d b, & etiam citius per a c, c b in b quam per ipsam a b, quod fuit propositum declarare.

Propositio octuagesimaquarta.

Distantiam centri terræ à centro mundi per motum lapidis Herculei declarare.

Non me latet Aristotelem existimare centrum mundi esse centrum terræ illudq́ probasse, quod tamen ex demonstratione nostra mathematica apparet nunc subijciam, & quid ad illius rationes dicendum sit, aliàs etiam dicendum erit: nam liber hic, ut mathematica decet, esse debet ab omnibus contentionibus absolutus. Constat sanè non esse propriam uim lapidis illius, ut qui non sit circumscriptus sed frustulum quoduis id potest, neq; per se, sed in ferro & pendulo, nec fieri potest, ut sit illius tãquam speciei unius lapidum, sed quasi perfectæ portionis cuiusdam generis terræ, quæ absoluta sit, cuius indicium est illius copia, neq; enim ullibi non inuenitur, & ubi ferrum effoditur, ut in Illua Insula Tyrrheno mari, est ergo ferri uis terræ maritæ, quæ perfecta in suo genere, ubi uim fœcundam acceperit à masculo scilicet Herculeo lapide, quærit primum ut descendat, ubi hoc non possit saltẽ quærit, ut quiescere possit. Vt ergo quiescat à motu cœli qui est ab Oriente in Occidentem iuxta axis cœli situm se dirigit, quod ille solus quiescat in suo motu, uel saltem tardissimè moueatur: indicio est quod si extra situm illum acus ferrea imbuta eo lapide ponatur, statim tremit uehementer, adeò ut nec momento ullo consistat, sed miserè & grauiter torqueri uideatur, non ergo quod sentiat polorum locum qui tantum abest ab illa, ut nec ab homine perito mathematicarum, sed quod uix illa cœli sentiatur circa centrum mundi. Cuius indicio est Oceani maris, aquarum fluxus & refluxus. Duos ergo habet motus terra perfecta, seu ferrum lapide Herculeo imbutũ subordinatos imperfectum perfecto: perfectus est, ut descendat ad centrum terræ, ut ibi quiescat: imperfectum, cum à perfecto prohibetur, ut quiescat saltem extra centrum cum inclinatione ad centrum, et hoc fiet si secundum longitudinem acus dirigatur per axem mundi, cum situ tamen descensui ad terræ centrum proximiore, ut sæpius superius declarauimus, dum de motu grauium & præcipuè libræ, & centro grauitatis loquerermur. Quibus demonstratis tum experimento tum ratione à Fortunio Affaytato Cremonensi Medico, cum per hæc postmodum cogeretur fateri acum ad polum Comi



G tendere,

tendere, cum tamen tendat à dextro latere scilicet ab Oriente nouem partibus, seu decima parte unius recti in centro terræ, quæ est quadragesima totius ambitus cœli. Statuatur centrum mundi a, & b a c axis, secundum quam mouetur motu diurno, ita l a dextra exit oriens, k a sinistra occidens, & statuatur d centrum terræ, seu suprà seu infrà, non tamen in linea b c, sed uel suprà in dextra parte, uel infrà in sinistra, ita ut ducta linea per illud punctum arcus b g sit nouem partium. Constituta ergo acu in e puncto, ubi linea h a d g secat peripheriam terræ dico, quod acus dirigetur per h g, & non per b c, nam acus mouetur ad centrum per eam, & in eo situ tota dirigitur, quia omnes partes grauis consentiunt in motu principij grauitatis ad centrum, hoc enim demonstratum: nixus ergo est ut moueatur per c d, & in eo nixu qui est quies custodit lineam axis, quæ est a b, ut quiescat, ergo non quiescet, nisi in linea d g, quod erat demonstrandum. Quæ autem sequuntur ex his corrolaria omnia concordant cum experimentis. Ergo hic sermo est demonstratiuus, ut enim bene dixit Auerroes: Sermo demonstratiuus satisfacit omnibus problematibus quæ cõtingunt circa principale quæsitum. Ex hoc ergo patet, quod angulus distantia d ab a in latitudine est decima pars recti, et quod quanto magis distat in longitudine centrum terræ à centro mundi, tanto etiam minus distat in latitudine. Hæc enim sunt demonstrata clarè in mathematicis. Vnde fieri posset quod hæc quantitas distantiæ esset res, per quam exigua etiam si non esset maior quatuor digitis sufficeret, modo etiam per ualde paruum spatium distaret ab eodem in longitudine. De causa autem huius differentiæ aliàs dicendum erit, hic locus non est, sed sufficit scire quod ita sit, quod si mobilis sit punctus d, clarum est aliquando futurum ut minus distet g à b, aliquando ut sit idem. Et qualiscunque motus sit, necesse est eam distantiam uariari.

Propositio octuagesimaquinta.

Proportio ponderis unius grauis ad aliud sub eadem mensura est, ueluti eiusdem ad differentiam ponderis uasis repleti ex altero graui, & ex ambobus detracto priore.

Co^m. Sit aurum a, & liquor b, quæ repleant uas c, & pondus amborum sit librarum quadraginta, & uas repletum liquore solo sit librarum xxix, aurum autem sit ponderis librarum xij, igitur reliquum erit ponderis xxviij, differentia ergo uasis pleni, & non pleni liquore est libra una, pondus auri est librarum duodecim: dico quod auri pondus est duodecuplum ponderi liquoris, &



si fuisset

si fuisset pondus amborum libræ xxxix, manentibus reliquis, sequeretur quod pondus liquoris esset xxvij, & quia plenum uas supponitur esse librarum xxix, esset differentia libræ ij, at auri pondus est libræ xij, igitur proportio ponderis auri ad liquorem esset sexcupla. Nam si uas plenum liquore ex supposito est librarum xxix, & cum auro xl, gratia exempli, & auri pondus est xij, igitur liquoris pondus est xxviij librarum: sed cum liquor sit corpus similium partium, igitur loci ad locum, ut ponderis ad pondus, ergo dum adest aurum, liquor occupat xxviij partes cxxxix, totius uasis igitur aurum continet unam partem tantum, & cum aurum pondus habeat librarum xij, & liquor unius: quia totum uas cxxxix librarum dum est plenum, & est diuisum in xxix partes, igitur pondus unius partis liquoris est una libra, igitur pondus auri est duodecuplum ad pondus liquoris quod fuit propositum.

Ex quo sequitur quod si ducatur pondus illud partis per pondus repleti uasis ex alio graui, & productum diuidatur per differentiam illam, prodibit pondus uasis repleti liquore graui. Cor^m. 1.

Exemplum, si pondus auri fuerit librarum xij, pondus uasis repleti liquore xxix librarum, pondus auri & liquoris replentium uas xxxix librarum, ducemus xij in xxix fit cccxlviij, diuido per ij differentiam xxvij ponderis uasis, repleti ex ambobus detracto auri pondere, & xxix ponderis uasis repleti liquore exit clxxiiij, & tantum auri uas illud continebit, nam cum duæ partes quas occupabat aurum essent ponderis librarum xij, totum quod erat partium xxix, continebit decies & quater cum dimidio illud aurum xij, aut ductum in xiiij cum dimidio, efficit clxxiiij ut prius. Co^m.

EXEMPLVM.

Quia ergo in superiore propositione docui, quod ferrum est uera terra: uolui scire qualis esset proportio ferri ad aquam. Accepi urceum cuius aqua dum plenus esset ponderis, fuit unciarum sex, & septuncis unciæ, & septuncis duodecimæ partis unciæ & pondus ferri unciæ septem, & triens unciæ & triens duodecimæ partis unciæ: & uasis aquę & ferro eodem repleti unciæ tredecim, & duodecima & septunx duodecimæ partis unciæ. Detrahemus ergo vij & trientem & trientem duodecimæ .i. 7 & $\frac{64}{144}$ pondus ferri ex 13 $\frac{10}{144}$, & relinquentur 5 $\frac{90}{144}$, detrahe ex 6 $\frac{81}{144}$, pondere aquæ totius uasis relinquuntur $\frac{17}{18}$, diuide 7 $\frac{64}{144}$ per $\frac{17}{18}$ exit proportio ponderis ferri ad pondus aquæ 7 $\frac{15}{17}$. Et hoc est proximum ei quod dixit Philosophus de proportione ponderis terræ & aquæ.

Ex hoc patet solutio problematis cuiusdam propositi aliasque mihi non bene soluti cùm causam habeat manifestissimam, scilicet quod Cor^m. 2.

uase aqua pleno impositis sensim centum aureis coronatis nihil effunditur, non quod quicquam absumatur in metallo, sed causa est quod cum aurum sit duplum pondere ferro, erit ex demonstratis sexdecuplum ad pondus aquæ. Igitur cum sit proportio ponderis auri ad differentiam spatij eadem, si sit uas aquæ ponderis libræ unius & mediæ, erit pondus totum xxiiij unciarum, igitur aqua deficiet solum ex decimaoctaua parte seu crescet ex impositione auri, sed illa pars in tumore aquæ absumitur, nõ solum, quia dum aureos imponimus plana solum sit, sed quia non ex quauis rotunditate defluit, aliter in urceo tam exiguo non posset apparere rotunda: quod enim rotunditas totius terræ, quæ etiam planam ostendit totam unam regionem ad rotunditatem quæ apparet in exiguo urceo aquæ. Est igitur rotunditas illa potius ob lentorem aquæ qui augetur à lentore argenti, & etiam magis auri, cum sensu digitorum percipiatur.



Corol. 3. Ex hoc apparet ratio quomodo Archimedes potuerit deprehendere coronam à Hierone propositam quantum auri & argenti contineret. Sit ergo uas a b aqua plenũ ponderis unciarum triginta, & cum libra auri sit ponderis unciarum quadraginta unius, & cum libra argenti ponderis unciarum quadraginta cum dimidio, igitur erit auri pondus ad aquæ pondus duodecuplum, argenti autem ad idem octuplum, quare auri ad argẽtum pondus sesquialterum. Ponamus ergo quod corona imposita ex auro & argento solo fabricata (hoc enim supponere oportet) fuerit unciarum sexaginta, pondus autem aquæ contentę cum corona in uase unciarum uigintiquatuor cum dimidio, scilicet totum octuaginta quatuor cum dimidia, erit ergo proportio ponderis coronæ ad pondus aquæ, ut cxxad xi, aurum igitur est proportione duodecuplum, argentum autem octuplum, corona ut cxx ad xi. Constituantur sub eisdem rationibus ducendo lxxxviij. cxx. cxxxij. hoc est ac si dicamus, accipe partes ex cxxxij & lxxxviij, tot ut faciant integrum & componant cxx. Et ideò reduces ad minores numeros, scilicet xxxiij. xxij. et xxx.

Propos. 178. & operaberis per regulam de consolatione monetarum, quas ponemus infra, & fient auri partes octo & argenti partes iij, nam cum duxeris iij in octo pondus argenti fiet xxiiij, & cum duxeris viij in xj, pondus auri fiet xcvi, igitur totum pondus erit cxx, diuidendum per xi, aggregatum partium auri & argenti, ita uerò uncia ad unciam, ut tota corona mista ad coronam puram auri & argenti.

xxxiij.	xxij.	xxx
iij	viij	
xi		

Ex hoc

Ex hoc etiam patet modus cognoſcēdi proportionem grauium inuicem per ſolam aquam, uelut auri ad plumbum, ad lapides uel æs, aut æris ad lapidem & ſimilia, ut in præcedenti operatione deprehendiſti: nam cum ſit nota proportio auri ad aquam & æris uel lapidis ad eandem, erit auri ad æs uel lapidem nota. Corol. 4.

Et ſimiliter ſciemus per hoc accipere partes diuerſorum, quę iun ctæ faciant conſtitutum pondus. Velut uolo facere maſſam ex melle & aqua, quæ impleat uas, quod mellis contineat quindecim, aquæ duodecim, uolo ut contentum ſit ponderis quatuordecim, operabor, ut in cōſolationibus, ponam duas partes mellis & unam aquæ, ut uides in operatione à latere. Corol. 5.

12	15	14
2	1	
	3	

Propoſitio octuageſimaſexta.

Si circuli inæquales, ſeu in ſphæra, ſeu in plano ſe ſecuerint nunquam oppoſitos angulos æquales habent.

Capiantur tres quartæ circulorum magnorum a b, a c, b c, & alia b d ad rectos angulos erūtq; uiciſsim poli, & ducatur per medium parallelus, erit ergo e f æqualis e g, & f e æqualis f g, ſed baſis c g eſt quarta circuli, & baſis c b dimidium quartæ circuli eo quod tota b a eſt quarta circuli, igitur per modum 25 primi Elementorum quæ tenet, erit angulus c f g maior oppoſito c f b. Hoc autem tenet in eiuſdem rationis ſuperficiebus, quales ſunt hæ, quæ ſunt ſuperficies eiuſdem ſphæræ. poſſet etiam demonſtrari per modum quartæ primi Elementorum. Et etiam conſtituta ſphæra e f g, cuius hic circulus eſſet maior circulus, & non tangeret niſi in illa linea ſphæra maiorem, & utrinq; ſecaret eodem circulo. Et etiam per cordas & trigonos rectilineos, auxilio tamē regulæ dialecticæ. Ex hoc ſequitur auxilio regulæ dialecticæ, quod in omnibus parallelis a c d & e f g cum b c circulo maiore, & per aliam regulam dialecticam in omnibus circulis inæqualibus inter ſe ad æquales angulos ſecantibus & ex tertia demum regula dialectica, ſequitur in omnibus circulis inæqualibus ſe ſecantibus ad quemuis angulum in ſphæræ ſuperficie. Sunt autem hæ regulæ mediæ inter axiomata & demonſtrata. Et ex logica propria illi arti. In plano autem ſpatium d b c minus eſt a b c, ſed ſpatium c b d eſt unum, ergo per communem animi ſententiam ſpatium a b d, maius eſt ſpatio e b c, quod fuit probandum. Corol.

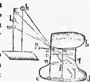




Per 13 tertij Element.

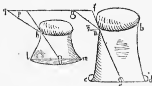
Propositio octuagesimaseptima.

Proportionem crassitiei aquæ ad aërem in comparatione ad radios demonstrare.



Com. Sit in aheno a b c d in imo e denarius argenteus cera affixus uel clauo, quem uideat ex h imposita aqua clara usque ad f, uideat ex k, igitur per aquam deflectitur à perpendiculo per angulum k f n, & in l, per angulum l g o crescente aqua demum in labro m a p, & sit e annexus, & tabula h k l m sit affixa solo uel pondere firma foraminibus obliquis infrà spectantibus, & per a aspicientibus extremitatem e. Possumus ergo imaginari primum, quòd omnes inclinationes sint à perpendiculari, dum exit aqua, & ita denarius uideretur, uel in superficie aquæ in directo c, uel in recta ex oculo in imo, quorum neutrum uerum est. Secundus modus est, ut radius delatus e a flectatur ad k uel l, & hoc non quia in a non est mutatio medij. Tertius est, ut linea ex oculo ducta perueniat per punctum a ad superficiem aquæ, & ex ea per directum ad denarium, & tunc quia oculus iudicat se uidere per rectam, ideo iudicabit se uidere per l a g in q, eo quod semper in directo loci in quo est e. At quoniam non ex quacunque distantia uidetur e, sed ex longinquiore loco, ubi uas fuerit humilius quod lineæ ad a ex oculo, quanto a fuerit humilius, tanto propius ipsi e procedunt. Et uersa uice lineæ ex e ad a, quanto e est humilius ad quencunque locum inflectuntur, tanto inferius cadūt. Ergo cum fuerint ad æquilibrium h, magis distabunt ab e, & ita e magis procul uidebitur. Causa ergo triplex est humilitas, uel altitudo uasis: humilitas uel altitudo aquæ: & labri uasis altitudo. Sed hanc relinquere possumus. Difficultas ergo experimenti etiam rectè facti est, quoniam posito uase n c d solum, ut altitudo sit tantum n e, procul magis uidebitur e, quàm si uas sit a b c d, & totum plenum. Vbi autem uas sit a b c d, magis procul uidebitur e cum fuerit totum plenum, quam cum fuerit plena sola pars n c d. Sic difficile est considerare an altitudo aquæ faciat ad uisionem procul, cum in humiliore, sed dissipari uase longius uideatur in pauca, quia labrum non obstat: in eodem autem longius in pluri aqua, quia labrum etiam non obstat, sed alia ratione. Vt ergo uideamus hoc experimentum, capiemus

mus duo uasa a b c d duplum h k l m sub eadem proportione altitudinis & latitudinis, & collocabimus ita ut p n radius æquidistet f e, & collocabimus tabulas cum foraminibus, ut prius, & g f p q



in æquilibrio, inde uidebimus, an q p sit æqualis aut breuior, nam longior esse non potest, quoniam inflectitur a minore aqua, ideo angulus p h q non potest esse maior f a g, supposita p h æquali a f: quod si non esset, sufficeret, ut q & p essent in æquilibrio uno, & f g alio. Sed ueritas est quod à maiore aqua maior sit reflexio: tum quia in his, quæ sunt secundum naturam corpoream, & substantiam densam, aut tenuem uarietas quantitatis uariat uires: tum quia uidemus, quod in altiore aqua denarius uidetur magis cum fundo elatus. Igitur his cognitis experimentum fiat cum uase pleno. Et (ut dixi) considerabimus proportionem anguli f a g ad f a r, seu f e c quæ sanè est notabilis: adeò ut sit maior proportio aquæ ad aërem comparatione grauium quàm lucis.

Ex his cognoscemus comparatione eiusdem aquæ tenuitatem aëris unius regionis in comparatione ad aërem alterius: nam ubi remotius uidebitur denarius, ibi aër erit tenuior. Cor^m. 1.

Et per idem in eadem regione comparationem aquarum. Nam cum sit idem aër, & uas, ac reliqua paria, ubi magis procul uidebitur denarius, aqua erit crassior ideò deterior. Cor^m. 2.

Sequitur etiam quòd omnes res propiores in aqua uidentur, quam sint, & ideò maiores: & ob id etiam omnis aqua profundior est, quam uideatur. Vt ingredi persæpè sit periculosum. Cor^m. 3.

Propositio octuagesimaoctaua. De instrumento momentorum.

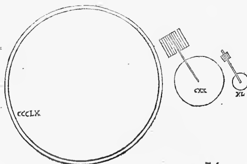
Instrumentum Acolingen, quo momenta temporum deprehendantur fabricare.

Com. Et quoniam motus naturales fiunt in tempore: & dicuntur uelociores, uel ob spatium loci magnum, quod superatur, uel ob tem poris breuitatem in uelocissimis motibus, quod ad spatia attinet, facilius dignoscuntur uelociores, quoniam spatium maius & manet, ut mensurari commodè posit: sed quòd ad tempus, quanto tar diores, quoniam in uelocibus quantitas temporis est exigua: & etiam tempus ipsum perpetuò diffluit: ideò difficillimè deprehendi potest. Huius causa excogitauimus instrumentum, quod uo cauimus Acolingen: quod constat tribus rotis: prima est pedum duodecim diametri, in ambitu autem habet denticulos cclx æquales, & æqualiter inter se distantes, huius peripheriæ funis cum ponderibus inseritur, ita ut cum alijs duabus rotis renitentibus in una hora circumagatur æqualiter. Duodecim ex his denticulis currulis duodecim denticulorum axis secundæ rotæ inseritur: sic ut cum rota magna duodecim conuersa fuerit partibus, secunda rota cu ius axis sit pedum duorum, scilicet sexcuplo maior circumuerta tur. Huius minoris ambitus diuisus sit in cxx partes æquales, & unicuique parti denticulus insertus sit: ita hæc rota tricies in una hora conuertetur. Singulis uerò denticulis currulis axis rotæ habentis denticulos quatuor inseratur, ita ut dum secunda rota uertitur semel minima circumuertatur tricies: nam pro singulis quatuor denticulis, quibus media rota circumagetur, minima tota circumuertetur, ideoque nongenties in una hora. Hæc minima rotula bessem pedis in dimetiente habebit, ut sit sexta pars illius, in ambitu autem diuisa erit in xl partes, ut cum circumuersa fuerit nongenties in una hora pertransierit partes xxxvi. Et cum pulsus hominis communis sint in hora IIII, uel circa nouem partes ex his rotę minoris perficient circiter unam pulsationem ex diastole & sistole, seu ex distentione & contractione perfectam: ut partis unius conuersio fiat in nona parte, uel circa unius pulsationis pulsus humani: & hoc est minimum fermè, quod ab humano sensu percipi posit. Erit etiam proportio rotarum eadem tam in diametris, quàm circuitibus scilicet sexcupla, neque motus difformis, quoniam maior tanto tardius mouebitur, quanto quod uelocius mouetur etiam minus erit, tamen proportio uelocitatis maioris ad minorem in æqualibus spatijs uigintiquincupla, ut maioris ad mediam quintupla, nam cum sit sexcupla in ambitu, & tricies moueatur uelocius comparatione totius, sequitur, ut proportio spatij, quod superabit media ad spatium, quod superabit maior in eisdem temporibus, erit quintupla, semper ad unguem. Et ita mediæ ad minorem quintupla, & ideò maioris ad minorem

minorem uelocitas uiginti quincupla, ut non sit difformis, neque periculosa, ut in rotis moletrinis, & sit diuisa per medium iuxta proportionem, cum sit tanto uelocior minor media, quanto media maiore. Rursus proportio partium maioris ad mediæ partes tripla est scilicet ccclx ad cxx, & mediæ ad minorē tripla cxx ad xl, & proportio est sexcupla, iterum igitur partes maioris ad mediam, & mediæ ad minorem erunt in dupla proportione, utrobiq;, & est pulchrum. Ideò partes etiam minimæ rotæ erunt satis magnæ: nam cum diameter sit bes pedis, ambitus peripheriæ erit duorum pedum. I. unciarum uigintiquatuor: igitur diuisa peripheria in xl partes, unaquæq; pars erit maior dimidia uncia.

SCHOLIVM.

Et cum defuerit instrumentum, utemur mensura ex pulsu hominis desumpta, sed non est adeò exacta. Accedit aliud commodum, quòd cum in una hora circumuertantur partes xxxvi, id est triginta sex mille: & octauus orbis circumuertatur in totidem annis, tot erunt momenta ex his in una hora, quot anni in uno circuitu stellarum fixarum. Vt intelligamus, quàm breui transit una hora apud nos, ita apud Deum, ut ita dicam (nam nulla in infinito proportio) unus annus magnus, & reditus rerum omnium. Comparata etiam rota minima ad rotam moletrini sic se habet, quòd cùm modica adest, uersatur rota in una pulsatione: cum satis abundans quinquies, aut sexies cum immodica duodecies.



Ex hoc

Cor^m. Ex hoc sequitur, quod homo si moueretur uelocitate motus rotæ molendinæ in sex ebdomadibus perueniret ad sydus Lunæ, nam rotarum earum, quibus ferrum acuitur semidimetiens communiter est bes unius passus, ideò dimetiens passus cum triente: ambitus ergo quatuor passus, & xxi pars, colligamus nunc integra, in uno ictu pulsus circumagitur decies, id est passus xl, in hora sunt m̄ pulsationes: in hora igitur spatium pertransitum est cxl passuum in M. horis, ergo erunt clx M. passuum addita parte xxi, erunt clxviij M. passuum, & tantum distat luna à terra: & M. horæ sunt dies pene xlij, ebdomadæ scilicet sex.

Propositio octuagesimanona.

Proportionem densitatis aquæ ad aërem per pondera inuenire.

Co^m. Contingit hoc multis modis: primum acceptis duabus sphærulis æqualibus ex crystalli substantia unaq; demissa ab altissima turri, & mensurato ictu per instrumentum præcedens, & sub totidem momentis alia demissa in aquam, inde sub eodem tempore dimensa altitudine, erit proportio spatij ad spatium, ut densitatis aquæ, ad densitatem aëris. Item emissa sphærula per instrumentum in aërem, inde in aquam: & sumpta proportione. Et uidimus scorpionem, qui sphærulā creteam emittebat pedibus lxx, & in aqua per unum & dimidium adeò, ut proportio fuerit, ut quinquaginta ad unum: ideò est fallax experimentum in uiolento motu: nam cum emittebatur in aquam erat propè, & ob id in summo robore: cùm in aërem, emittitur sensim uis. De hoc ergo loquar.

Co^m. Et erumpentia ob id magis quàm è terra, et minus quàm ex aëre: diuiditur enim aqua cum graue petit fundum, & aqua feruet: & est mirabilius, quàm utile.

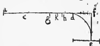
Propositio nonagesima.

Rationem impetus uiolenti extra missi ponderis ad æqualitatem reducere.

Co^m. Sit uiolentum a quod moueatur per b c d e, e spatium, & quia uiolentum contrà nititur naturali, cadat ergo in planum in e: sunt ergo tria consideranda, primum quod, ut dixi alias, motus uiolentus prò certa distantia augetur, & causam ibi reddidi, ut potè usque ad c, sed hoc esset difficile cognitu. Secundum, quod ubi incipit decrescere, semper magis ac magis decrescit propter naturalem nixum contra operantem. Tertium quod ubi descendere incipit, ibi est æqualis uis uiolentum motum agens cum naturali. Certum est etiam quod motus æqualis intelligitur erecta ad perpendiculum e f, donec occurrat a d: & diuisa tota b f per tempus, locus ergo, in quo mouetur per tantum spatium, dicitur locus motus æqualis:

qui

quis sit gratia exempli g h, cuius medium proportione sit k, dico k consistere propiorem f, quàm b, etiamsi æqualiter moueretur. Primum quòd in tota g f declinat, & totus motus est lentior, quàm in tota b g, & tamen tardatur tantundem, ergo per communem animi sententiam, k est propior f, quàm b. Secundò, quia per secundum suppositum motus a uersus f, continuè fit lentior, igitur per communem animi sententiam multò longius est tempus motus a k, quam f, & tanto maius spatium. Tertiò, quia motus ex b uersus c augetur, & si esset æqualis adhuc multò esset breuior k f quam a k, igitur multò magis hoc modo, & triplicata ratione. Si ergo b k esset sesquiquarta solum ipsi k f, erit b k dupla: fermè ex triplicata ratione ipsi k f, & iuxta eundem modum ponemus mediam uim xlvi passibus à scorpione a quam & hoc modo erit propè id quod est.



SCHOLIVM.

Dubitat autem Philosophus in mechanicis quæ nam uis sit, quæ moueat lapidem iam excussum? & dubium non est quin ex parte sit aër motus tum ratione, quia mouetur ergo mouet, tum experimento, ut in fulminibus, & his quæ uento impelluntur, ut hypophysis, sed in scorpionibus & arcubus & pilis id non sufficere uidetur. Itaque uelut & caliditas & frigiditas in corporibus natura contrarijs aliquandiu manent, & agunt ita & uiolentos motus, idque Alexander & Simplicius uolunt. Inditio sunt quòd mota & emissa ex longioribus machinis quanquam non aërem continentibus, nec inanibus tamen, longius eijciunt sagittas & missilia, quoniam uis illa firmius imprimitur, uelut etiam de lapidibus & ferro, quod diutius in igne moram traxit, aut continuè follibus ignitum est, nam etiam tanto tardius refrigeratur unumquodque horum, & alia urit & accendit calore illo externo, quanquam natura frigidum sit: dicemus autem & de hoc suo loco.

Propositio nonagesimaprima.

Proportionem grauis cubi, & sphærici æqualium in accliui, & descensus eorum demonstrare.

Hic non pauca sunt cōsideranda: Primum quòd hoc intelligi potest, uel de motibus attractionis, uel impulsionis, uel inuersionis.



Secundum quod omne, quod impellitur superius, tantundem grauat attractum, quantum ad descensum, si sit rotundum, nam quadrata, euā alia non descendunt sponte in decliui, & si sit locus ualdè decliuis,

decliuis, tanto minus descendunt, quanto sunt latiora. Quia tamen omnia difficiliùs descendunt sphæricis, & facilius quàm in plano, ubi ponderant nisi per dimidium grauitatis, ideò proportio hæc constat ex proportione anguli descensus ad totum rectum, & magnitudine superficiei, qua incumbit ad pondus comparata. Omne enim graue, quanto grauius tam ad quietem, quàm ad motum naturalem potentius est: hoc enim perspicuum est, quia quieti naturali motus uiolentus, & motui naturali quies uiolenta opponitur: quia ergo maiore ui opus est ad motum præter naturam, ergo secundum naturam etiam maiore ui quiescit. Assumpsimus ergo cubum, ut magis notum. Sphæra igitur in omni decliui descendit, quia ut dictum est, nil habet quod resistat ad motum: & ipsa grauior est in decliui, quàm in plano, quia c punctus cadit ultra e, ergo punctus contactus, & centrum grauitatis, & centrum mundi, non sunt in una linea. Si enim b e contangeretur, esset b c plana. Si uerò tangit, angulus est maior angulo contactus, ergo cum necessarium sit, æquidistare aliter non esset sphæricum, oportet, ut eleuetur ex parte c, & descendat uersus b, & ideò ut continuetur motus. Si uerò sit in linea contactus b e f, & æquidistet non erit, ut dixi punctus contactus in linea centrorum, sed in a c, cum suppositum sit lineam a d esse lineam centrorum: maior est ergo portio g c e, quàm residuum, ergo descendet in b. Cubus uerò non descendet, nisi cum dimidium d addito, quod intercipitur inter lineam mediam, & quæ à centro mundi ad punctum medium contactus usque quò perueniat ad oppositam partem, eam habuerit proportionem ad idem medium eadem portione detracta, quem iuncta proportioni anguli declinationis ad residuum recti dimidiam proportionem efficiat. Eademque ratio aliorum planorum. Dico præterea quòd motus sphæræ, & etiam corporum rectarum superficierum in descensu alius est æqualis, & alius inæqualis, & quasi à latere, uelut si angulus unus prolabatur, ac fiat circumuolutio: cum ergo facilius fiat hoc, & maximè si non retineatur æqualiter, & difficile sit in medio retinere, propterea prolapsus hi melius retinẽtur duobus uinculis, quàm in medio, non solum ob hanc æqualitatem, & complexum meliorem, sed etiã, quod omnes motus, omnes ponderum nixus facilius cohibentur, & deducunt diuisi in partes, quàm si toti contineantur, aut ui trahãtur. Et ideo uincula in ramicibus duplicia dextra, & sinistra scilicet in eadẽ parte tamẽ longe sunt meliora etiam ferreis, quæ solum in medio nectantur.

Ex hoc

Cor^m. 1. Ex hoc etiam sequitur, quod cùm omne graue sponte semper appropinquet centro mundi, & a si moueretur per planum e, magis remoueretur à centro mundi, ut per e c per ea quæ diximus, & quoniam linea ex centro mundi ad c longior est, quàm ad e, multò potest enim esse, ut in proportione diametri quadrati ad latus eius, & etiam maior. ergo poterit esse adeo parum decliuis linea c d, ut c punctus magis distet à centro mundi, quàm d, & tamen feretur ex d in c motu naturali, ut demonstratum est, ergo per purum motum naturalem poterit a remoueri à centro mundi. Hoc uolui proponere, ut intelligeres in plano uero c e non moueri a sponte, quia c necessariò altior est d: si ergo mouebitur, non erit c e recta, sed pars proportionis circuli superficiei terræ, quæ sensu à recta distingui non poterit. Hoc ergo est primum, ex quo sequitur.

Cor^m. 2. Quod aliquid poterit uideri decliue, in quo non descendet imò erit, ut potè si aliqua linea obliqua esset inter c e, & f e, illa esset decliuis specie, & re, & tamen graue in illa non descenderet, quia à centro mundi magis remoueretur: hoc tamen est perdifficile factu, & maximè in parua distantia, uel etiam unius miliaris. Atque hæc in leuigatis.

Propositio nonagesima secunda.

Propprtionem ponderis æqualis iuxta longitudinis comparationem demonstrare.

Com. Hoc est, quod Archimedes reliquit intactum, cum esset maximè necessarium, & ostendit magis abstrusa, sed pace illius dixerim minus utilia. Cum ergo sumpsissem uirgam b f ponderis unciarum xxiij, fuisset b a uigesimaquarta pars, b f fuit pondus æquilibri in b appensum librarum uigintisex cum dimidia: fuit igitur proportio ponderis e f ad pondus f b, ut tredecim ferme ad

unum. Et rursus feci a b quintam partem a f, & fuit a b unciarum quatuor, & pondus quod æquauit librarum quatuor, ideò duplum ad pondus b f, sicut c f ad c b: constat enim quòd pondus appensum est æquale ponderi c f. Et rursus posui b a quartam partem b f, & fuit pondus, quod æquauit m b duæ libræ: ex quo manifestum est, quòd proportio c f ad c b est semper uelut ponderis c f ad totam b f. Et hoc est, ac si dicamus, quòd proportio ponderis c f ad totam est confusa ex proportione c f ad c b, & c f, quod est 1 p. Id

Ex 18. diff. etiam declaratum est in primo de Subtilitate. Proponatur ergo lemma, iam sic proportio ponderis c f ad pondus b c, est primum ut longitudinis c f, si esset suspensa in medio ad longitudinem b c, quia supponuntur proportione similes suis longitudinibus magnitudines, & pondera. At c f suspensa in c, tanto est grauior pondere proprio, quanto proportionis longitudinis c f ad c b quadratum, quia in se ducitur proportio: igitur proportio ponderis c f in loco suo ad b c pondus est confusa ex proportione longitudinis c f ad c b, & quadratis eiusdem proportionis longitudinis c f ad c b. Sed quadratum proportionis longitudinis c f ad c b est æquale producto proportionis longitudinis c f in ipsam c f, propterea quòd ex proportione longitudinis c f ad c b in ipsam c b fit c f, igitur proportio ponderis c f ad pondus c b est confusa ex proportione ponderis c f ad pondus c b, & proportione ponderis c f aliculus se habentis ad pondus c f, ut c f longitudo ad longitudinem c b, igitur proportio ponderis c f ad pondus b f, ut c f ad c b in longitudine, quod erat probandum.

Propositio nonagesimatertia.

Propter quid in concussione etiam leui nauis loco moueatur ostendere. Vnde manifestum est, duas naues sibi mutuò occurrentes retrocedere, & quantum retrocedant ambæ.

Co^m. Proponatur, quod proportio motus grauis in a d graue in aqua sit, uelut proportio ponderis attracti in terra ad densitatem aquæ cum profunditate, nam ubi pondus supernataret aquæ, quia aqua est rotunda, est ac si tangeret in puncto. Quare per demonstrata superius

Propos. 40. perius mouebitur à quacunque ui, ergo nixus contrarius aduenit ob profunditatem, & aquæ densitatem, sed quanto aqua densior est, tanto minus nauis descendit, & quanto minus densa, tanto magis: ergo pari modo fermè redduntur mobiles, & in aqua dulci & salsa, ubi naues sint similes forma, pondere, magnitudine. Quia ergo necesse est tabulam nauis esse duriorem, quam aqua ad resistendum, ergo pars maior ictus mouebit primo nauim, quam tabulam penetret, cum ergo quod facilius est, præcedat, difficilius ergo naues utrinque

utrinque mouebuntur, & quia inter duos quoscunque motus contrarios nõ esse eos, ut utar uocabulo Auerrois quinto Physicorum, necesse est, ut intercedat quies media, & in quiete ab ictu, ut usum est superius, oportet, ut quod excipit ictum uel loco moueatur, uel cedat, & ictus penetret, uel aër non condensetur ob tarditatem ultra metam, nec retrocedere potest ex supposito, & ictus est magnus, clarum est, quod oportet, ut cedat, & si durum sit confringatur. Proportio ergo recessus ad ictum est ut temporis, & magnitudinis partis, quæ cedit, & retrocessus posito ictu tanquam monade. Propos. 74.

Propositio nonagesimaquarta.

Si quantitas aliqua nota atque proportio erit producta quantitas nota similiter. Et si duæ proportiones notæ fuerint, erit producta ex his atque diuisa, coniunctaque, atque detracta nota. Et si fuerit totius ad partem proportio nota erit, & ad aliam partem nota, & alterius partis ad alteram uno minor. Et si fuerit partis ad partem, erit ad totum monade minor atque nota. Et si fuerit unius quantitatis ad duas quantitates proportio nota, erit & confusa ex eis nota. Et si fuerint trium quantitatum omiologarum, aut quatuor analogarum, omnes præter unam cognitæ erunt, & illa alia cognita.

Sit quantitas a b & ducta in d proportionem, producat b c: dico quod duobus quibuslibet ex his cognitis, erit cognitum tertium: nam cognitum quodlibet dicitur in comparatione ad simpliciter cognitum, quod est unum per se omnibus cognitum. Ob id Arithmetica est prima omnium disciplinarum, quia habet principium cognitum, & id, quod est, ad principium comparatum cognitum in illius comparatione: neque aliter cognitum dici potest. Quia ergo d cognita est, erunt monades, & partes cognitæ in ea: aliter non esset cognita b a, igitur cum cognita sit, erit cognita per singulas monades, quanta sit. Et si diceres quod b a non est cognita per partem monadis: dico quod pars monadis non est incognita, quia cum monades sunt cognitæ, esset d incognita. Omnes enim, quod componitur ex cognito & incognito, est incognitum, quia cognitum solum ratione partis cognitæ. Si ergo pars monadis est cognita, erit pars a b quælibet prout ex monade componitur simpliciter cognita. Superest, ut solum pars partis: & dico quod illa etiam est cognita: quia si pars ab esset, monas esset cognita: esset enim pars ipsa. Com.

d e f g
c b a

Ex secunda animi communium sententia.

Sed si sit pars, erit sumpta secundum partem monadis ipsius, ideo erit cognita iuxta nomen, uelut dimidium est dimidium monadis, dimidium tertiæ partis monadis est cognitum, quia tertia pars est cognita, & scimus, quanta pars assumatur illius. Ergo si a b,

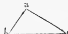
& d cognitæ sunt erit & b c, quod est primum. Per hæc eadem probantur quatuor sequentes partes eodem modo. Sexta sic: sit proportio a c ad c b, nota igitur in comparatione ad monadem, sed proportio a c ad c b b a est monas, igitur proportio a c ad a b nota est, quoniam aliter non posset dici proportio a c ad b c nota. Aliter, sit proportio a c ad c b c nota, ex supposito igitur conuersa nota quæ sit f ex f, igitur in a c fit b c ex g in a c, fiat a b ergo ex a c in f g fit a, cigitur f g est monas, f autem nota est, igitur in comparatione ad mona-
Per demonstrat. 12. Propos. dem, ergo residuum g notum. Cum uero proportio a c ad c b componatur ex proportione a b b c ad b c, & proportio b c ad b c sit monas, & proportio a c ad b c nota, erit proportio a b ad b c cogni-
Per 11. Pet. ta, & monade minor proportione a c ad b c. Per idem octaua pars demonstrabitur. Inde sit proportio a ad b, & ad c nota, erit ergo b, & c ad a nota, quare b c ad a nota, sed
Ex demonst. 12. Propos. hæc est conuersa ad b c confusa, igitur proportio a ad b confusa nota est. Vltimum sit, sint a b c coniologæ, & sint a & b
Per 14. Propos. notæ duo, quod c nota est, nam a b, si notæ sunt, nota est proportio
Per 3. Petit. earum. Ergo & proportio b ad c ergo per primam partem huius cum sit b nota, exit & c. Et si ponantur a c notæ, dico, quòd b nota erit: nam proportio a c ad c nota est, quæ sit d, igitur d ad monadem ut a ad c, ergo latus notum erit, quod ductum in c producit b, b igi-
Ex 2. Animi sententia. tur nota. Et similiter in analogis sint a b c notæ: & ideò erit proportio a ad b nota ergo c ad d. cumq; c nota sit, ergo per primam partem huius erit d nota, quod fuit demonstrandum.

a
b c

Propositio nonagesimaquinta.

Cuiusuis trigoni rectanguli, aut cuius duo anguli sint in dupla proportione, aut qui circulo inscriptus sit cognita quantitate unius lateris in comparatione ad dimetientem si proportio duorũ laterum cognita fuerit, erunt omnia eius latera cognita.

Com. Non de cognitione ꝓpinqua astronomorũ, de qua abunde ab Heber tractatum est, sed de exacta, de qua superius egi nunc sermo
Propos. 97. est: sit igitur primum a b c trigonus orthogonius: & sit a rectus, & ꝓportio duorũ laterum cognita, dico, quod omnia latera cognita
Per 47. primi Element. erunt: nam sit proportio, gratia exempli, a b ad b c, erit ergo quadrati a b ad quadratum b c cognita, quia duplicata: at quadrata a b, & a c perficiunt quadratum b c, igitur proportio quadrati a b ad a c et est i p: cognita erit, quare & a b ad a c, & eodẽ modo a c ad b c: quod est primum. Exemplum, ponatur b c dupla a b, erit a b quadratum sub quadruplum quadrato a b quare subtriplum quadrato a c igitur si



tur si a b ponatur 1 b certè 2, & a c 3. Rursus ponatur angulus b duplus angulo c qualiscunque sit, erit per demonstrata superius proportio a b b c ad a c, ut a c ad a b, si igitur nota sit proportio a c ad a b, erit nota proportio a b b c ad a b per præcedentem. Ergo per eandem omnia nota scilicet b c ad b a, & b c ad c a. Et si esset nota proportio a b ad b c, dico, quod essent nota omnia, nam nota esset a b, & b c, & quod fit ex a b in ipsum aggregatum. Sed hoc est æquale quadrato a c, igitur notum est quadratum a c ergo a c: igitur proportio a b b c ad a c, & a c ad a b. Ut si a b esset 4 b c 5, esset a b b c 9 ducta in a b, quæ est, fit 36, cuius latus est b a c scilicet. Et si esset trigonus aliquis in circulo, cuius proportio duorum laterum sit cognita ad dimetientem relata, sequitur per demonstrata superius, quod etiam tertium latus erit cognitum in comparatione ad eandem, & ideo etiam proportio illorum laterum adunguem cognita erit. Per 17. sex ti Elem. Propos. 17.

Multa præterea cognita essent in hoc genere, quæ nunc prætermitto, quia non sunt ad finem necessaria. Alia præterea per diligentem inquisitionem maioris artis quàm alias edidimus, tum uerò etiam per nouas demonstrationes. Corol.

Propositio nonagesimasexta.

Cum in perspicuum densum radij luminosi inciderint, quatuor fiunt luminis genera.

Sit sol a, & perspicuum densum, exempli gratia, ut ampula magna aqua plena b c d, & si sit rotunda accendit ignem ex aduerso ut in e. Dico ergo in b c d esse quatuor genera luminis. Primum quod est ualidius, & rectà transit, ualidius enim est, quod transit quàm quod transire non potest, & etiam quia, ut dixi, ignem accendit. Secundum est quod colligitur in ampula, & deinde spargitur circũcircà, nam id ualidius est, quia penetrat, & resilit quàm quod non penetrat, aut si penetrat, non spargitur, & hoc diffunditur circa uas, nec reflectitur rectè, sed quasi intro colligitur, & diuersa ratione diffunditur, est tamen imbecillius primo, ut dictum est. Tertium genus est, quod illuminat intus ingrediendo, sed non spargitur, & hoc est debilius secundo, quia nõ potest spargi. Quartum est, quod non ingreditur omnino, sed reflectitur, istud est absque dubio imbecillimum, quoniam penetrare non potest. Et licet in speculis concauis radius reflexus uideatur esse ualidior, statim enim accendit ignem, hoc non contingit, nisi quia in speculo cauo radij omnes col- Com.



liguntur ob opacū,quod à tergo est,neq; spargunt,neq; transeūt,neq; combibuntur,ut ita dicam sed omnes reflectūtur. Ex quo colligitur quincuplex ordo radiorum iuxta rationem uirium,primus est reflexorū à speculo cōcauo,& hi sunt potētissimi ob rationē dictā,post quos sunt radij,qui transeunt per perspicuum maximè rotundum, qui & ipsi generant ignem,& debiliorem primo, deinde reliqui tres sequentes supradicti. Sextus est radiorum, qui reflectuntur à rebus non nitidis,ut à muris,& tabulis,nam omnia dura reflectunt & etiam mollium pleraq;,& hæc reflexio est fermè infinita,& ob id cubicula etiam in angulis illuminantur.

Cor.m 1. Ex hoc sequitur,quòd Luna remittit lumen, non reflectit, nam secus non illuminaret totum orbem, sed solum portionem oppositam Soli, & hoc etiam rarò,ergo combibitur, & illustrat circumcirca ubiq;.

Cor.m 2. In stellis lumen Solis pertransit aliter,si reflecteretur,non illuminaret nos,aut apparerent,uelut cometæ,quia pars una esset clarior reliqua,& si conbiberent lumen, non uiderentur æquè claræ, cum Sol esset propinquus,aut remotus.

Cor.m 3. Luna tota intus illuminatur à Sole, quoniam si ante coniunctionem illuminatur à sinistra parte, & combibit lumen per corrolarium primum, & post coniunctionem illuminatur à dextra, & combibit pariter lumen, ergo est tota naturæ perspicuæ,sed uidetur obscura ex aduerso,propterea quòd radij ualidiores reflexi illustrant illam ex parte Solis, diffugiunt à contraria, quod manifeste apparet in ampula exposita Soli. Pars enim clarior uersus Solem uidetur, quàm ex aduerso, hoc autem longè magis in Luna ob distantiam.

Cor.m 4. In omni Solis eclipsi fit colectio radiorum ad aspectum, & ideò in regione illa,in qua centrum Solis integitur à centro Lunæ, & ubicunq; fit,fit incendium per tertium corrolarium. Hoc autem fit semper in quauis coniunctione,& dum Luna silet in regione aeris,sed terris non secundùm centrum,uerùm ad latitudinem, & ad Orientem ante coniunctionem cum Sole, & ad Occidentem post: sed centra non sunt in linea uisus.

Cor.m 5. Ex hoc sequitur,quod oportet substantiam Lunæ esse ualde claram,cum uideamus ab ampula tam paruum lumen diffundi, & rarum,à Luna uerò in uniuersum orbem, & tam copiosum,ut necessarium sit substantiam Lunæ esse densam,& lucidam ualde.

SCHOLIVM.

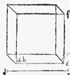
Et si quis dicat, quòd si incendium illud fieri posset in hora eclipsis,sequeretur,quòd ut in ampula in medio Lunæ uideretur magnus

gnus splendor, referens corpus Solis. Propterea dico, quòd uel accidit, quia homo non potest ea hora intueri Solem, & etiam est impeditus à radijs circumstantibus, cuius indicio est, quod in speculo posito in aqua, simile uidetur stellulæ in centro Lunæ: & hic est splendor Solis collectus in centro Lunæ. posset etiam dici, quòd Luna circa medium propter maculam non admitteret lumen, & ita esset inæqualium partium.

Propositio nonagesimaseptima.

Motum inuersionis in figuris in comparatione ad motum sphæræ in plano inuestigare.

Voco motum inuersionis, qui similis est motui sphæræ, scilicet circumuertendo graue à uertice, & manifestum est, quòd in quacunque figura, qua graue insidet plano per punctum uelut ouata ipsum mouetur à quauis ui, sed si insideat per superficiem, quanto maior est, & humilior, tanto difficilius mouetur, ideò in corpore uiginti basium, quòd inter regularia uocata, plures habet superficies pro ratione æqualis ponderis, motus erit longe facilior. Alia causa est inæqualitas partium, unde quæ rotunda sunt, quia prominent, facile mouentur, & cum partes mediæ insistant plano, quanto minores erunt tanto facilius mouebuntur ratione ponderis. Vnde patet, quòd corpora ouata facilius mouentur, etiam quàm sphærica, habent enim partem mediam minorem, & paria sunt ratione incessus plani, sed aëris multitudine tardius, quoniam enim sphæra sub æquali ambitu plus continet corporis, ergo ouatum æquale sphæræ habet maiorem ambitum ipsa sphæra. Hæc autem à Theone partim demonstrata sunt, partim ab Archimede, & partim à nobis, ergo motus ouati est fermè æqualis motui sphæræ, & tardior est concitatus, quàm sphæræ, quia à maiore excipitur aëre, & partes exteriores non ita incumbunt in medium secundum longitudinem. Cubus uero tardior est propter æqualitatem, & latitudinem superficiei inferioris, omnium autē minimè propter has causas conus ambligonius, & quanto magis fuerit, ratio uerò eleuationis est, ut sit cubus b c, cuius medium grauitatis sit b super pla- Com. Per 40.

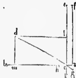


no d e, & eleuetur ex a, & manifestum est, quod insidebit per totam lineam c f ipsi plano, & proportio grauitatis totius suspensi in comparatione ad grauitatem eius, qui inuertit, est, uelut proportio partis terminatæ ad lineam c f uersus eum, qui eleuat ad partem, quæ ultra est, cum uerò hæ partes notæ sint iuxta perpendiculum ex centro grauitatis, manifestum est, quod sciemus pondus corporis a b c f, dum inuertitur in quocunque situ ad pondus eius, dum suspenditur, & clarum est, quòd cùm centrum, & medium grauitatis fuerint in una linea per c f, tunc nulla erit grauitas.

Propositio nonagesima octaua.

Proportionem ponderum æqualium per differentiam angulorum inuenire.

Com. Per Cor^m. 2. 45. Propos. Per 86. Propos. Sit a b, quæ si appensa esset ad æquidistantem terræ superficiei, nulla ui posset eleuari, inflectatur ergo ad c punctum, omissa c g, & manifestum est, quod si b c insisteret ad perpendiculum, ponderaret a c si esset in æquilibrio, ponatur ergo accliuis in c d per notum angulum. Quia igitur b c ad c a nota est, erit dicta superius notum pondus b h, posita h c æquali c a, quare totius a b, & iam fuit e k notum, & punctus d notus: hoc enim infrà demonstrabitur, qualis igitur proportio lineæ



Propos. 99. transuersæ d l ad lineam descendentem d m, talis differentiæ ponderum c m, & c e, id est partis ad partem. hæc autem inferiùs de-

Propos. 97. monstrabuntur. Neque enim absurdum est in materijs mistis, aliquando uti nondum demonstratis cum fuerint mathematica, quia obtinent principij rationem, quod etiam facit Archimedes. Manifestum est autem, quod in angulo m c d recti dimidio, proportio media erit. Sed hoc bifariam contingere potest scilicet, ut sit media, per quantitatem, & per proportionem, est autem media, ut

Propos. 98. demonstrabitur infrà secundum proportionem l d ad l e, proponatur ergo c e b, erit latus quadrati ℞ 72, igitur latus octogoni est ℞ v: 72 m: ℞ 2592, & latus residui ℞ v: 72 p: ℞ 2592. quadrata ergo partium basis differunt in ℞ 10368. Quare partes basis sunt 6 p: ℞ 18, & 6 m: ℞ 18 scilicet l e, l d autem est ℞ 18, igitur differentia, & proportio est, qualis ℞ 18 ad 6 m: ℞ 18 fermè, ut 17 ad 7, & talis est proportio ponderis c d ad pondus c e ratione incrementi, seu differentiæ. Vt si pondus in c e esset decem librarum in c in

quadraginta erit in c d triginta unius cum quarta, sed proportionis ratione esset uiginti octo cum tertia.

Propositio nonagesimanona.

Proportionem grauitatum per multitudinem suppositorum ostendere.

Omne, quod mouetur, mouetur secundum naturam ponderis, quæ in attractione, ut demonstratum est, æqualis est dimidio suspensi, cum ergo diuidatur in multiplices partes motus uniuscuiusque, est secundum dimidium illius partis, ut, si sint sex rotæ in curru det, quod uehitur, sit pondus sexaginta librarum, unaquæque rota habet pondus quinque librarum, scilicet diuiso triginta per sex, & quia quodcunque mouetur sphæricè non habet pondus, nisi quantum premitur axis, ideò pondus sexaginta librarum in uehendo redditur læsus, quanto proportio producta minor est additione. Exemplum, sit deductum pondus sexaginta librarum per sex rotas ad uigintiquatuor, quia si rotæ possent circumduci, ut in inuersione dictum est, & essent æquales, & in solido æquali, ac duro, nulla ui mouerentur, sed quasi per se, ergo supposito ponderē uiginti quatuor librarum assumemus unamquamque partem, & ducemus eam in seipsam, scilicet detraham quintam partem ex toto 30, fit 24, duc 30 in se, fit 900, duc 24 in se, fit 576, proportio ut 25 ad 16, at diuiso 30 in sex partes, fit 5, detrahe quintam partem, fit 4, duc in se, fit 16, duc in sex, fit 96, igitur proportio 900 ad 96 est ut 25 ad $2\frac{2}{3}$, quod ergo erat 16 factum est $2\frac{2}{3}$, proportio ergo decrescentis maior est diuiso per plura. Sed plerunque additis totis crescit pondus nihilo secius, redditur etiam leuius. Sed & de hoc in sequenti.

Com. Per 4 0.

Propositio centesima.

Proportionem grauitatis ponderum attractorum per trochleārum numerum inuestigare.

Aristoteles in Mechanicis censet causam leuitatis trochlearum esse in pondere eleuando, quòd pondera auxilio uectium facilius mouentur, quàm manibus. Rotulæ uerò in trochleis uectes sunt, & axis mista hypomochlij, ergo facilius pondus trahitur per unam rotulam, quàm si manu traheretur, at uerò per duas tres, unde tris passus longe facilius, & etiam facilius per quinque, unde pentas passus, nam quinque orbiculis, quasi totidem uectibus diuisum pondus manifestè fit leuius, & ut dictum est, tanquam totidem uectibus pondus eleuatur, estque proportio producta,

Com. In Mechan. Quæst. 18.

cta, semperq́ prior hypomochlij locum habet, ueruntamen minus assumit laboris, posterior uerò uectis maiorem partem sibi ponderis seruat, uelut in succula etiam iugum traiectum per plures colopes facilius uertitur. Et si quis dicat nónne totum pondus insidet primę trochleæ per trochleam, intelligo nunc solùm rotulam cum ipso axe, seu axiculo (ut dicunt) non autem in proprio significato, in quo etiam funis traiectus, & insidens rotulæ, seu rotulis, nam una trochlea plures continere potest orbiculos, & axes. Licet ergo pondus insideat primæ trochleæ, seu rotulæ, in eo tamen, quod trahitur, diuiditur, licet non æqualiter dico, præter id funis motum intendi. nam motus actionem auget, & ideò quanto longior, eo facilius mouet ob concussionem, demum quia leuis est rotula circa axem, ut plus uecte possit.

Propositio centesimaprima.

Proportionem precij gemmarum ex tribus in eodem genere cognitis inuenire.

Com. Solent gemmarij uendere adamantem ponderis unius grani uno coronato, duorum autem granorum tribus coronatis, quatuor autem, gratia exempli, quadraginta coronatis, quęritur quantum ualebit adamas octo granorum, quoniam ergo proportio non seruatur. Est enim in pondere utraque dupla, in precio autem ex prima habetur tripla, ex secunda habetur proportio maior, quàm tredecim ad unum, propterea utendum est proportione propinquiori, si satisfaceret. gratia exempli, in prima additione fuit unum granum, & acquisiuit proportionem triplam, in secunda fuerunt duo grana, si ergo acquisisset solùm sexcuplam proportionem, haberemus intentum. Propterea in isto casu oportet demonstrare forma Geometrica, supposito, quòd sit figura recta ex uno la-



tere a b, ita ut angulus, uel minimus capiat b c æqualem a b, & ex æquali b a c addito fiat b d tripla b c, & ex angulo b a e duplo b a d, fiat b c d e quadragintupla a b, & iuxta rationem erit in infinitum. Siue sit parabole, siue hiperbole, seu sit alia coincidentium.

SCHOLIVM

SCHOLIVM.

Et nota, quòd si res hæc esset naturalis, ostenderet infinitum in rebus ex regula dialectica, sed quia ex uolũtaria, nullas habet uires.

Propositio centesimasecunda.

Proportionem motuum inuersionis, & attractionis in plano inuenire.

Et sit, ut aliquid inuertatur, declaratum autem est suprà, quid sit inuersio, & quàm diuersa sit rursus, & quòd attractio est dimidium ponderis eleuati. Cum ergo constet in inuersione, quanta sit proportio ponderis suspensi ad pondus inuersum, & pondus suspensi sit duplum ponderi attracti, sequitur, ut diuisa proportione ponderis suspensi ad pondus inuersum per medium cognoscatur proportio attractionis ad inuersionem. *Com. Propos. 89. Propos. 62.*

Ex hoc sequitur, quod aliquod pondus trahi potest, quod non potest inuerti, hoc autem indiget longa declaratione, quam docebimus inferius: & tamen attigit hoc rarò. *Corᵐ.*

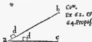
Propositio centesimatertia.

Proportionem eorundem in accliui demonstrare.

Dupliciter potest intelligi, uel descendendo, uel ascendendo. Sed ego nunc loquor de ascensu, contraria ratione intelliges de descensu, & circa inuersionem demonstrata est proportio eius iuxta angulum ascensus, & similiter declarabitur de proportione attractionis iuxta eundem angulum ascensus, & nuper declarata est proportio inuersionis in plano ad attractionem, ex quibus sequitur per ea, quæ dicam inferius, quòd proportio cuiusuis mobilis inuersi ad attractum sub quibuscunque angulis nota erit. *Com. Propos. 72. in sequenti.*

Propositio centesimaquarta.

Proportionem motus attractionis in decliui ad motum in plano determinare.



Si ab accliue, seu decliue in quo d ad attrahendum, cuius nota est ex superioribus difficultas in plano ratione figuræ constante, ergo ea quæritur proportio ascensus, & quoniam terminus ad perpendiculum est dupla proportio, & iam grauitas in plano est dimidium, ideò quicquid acquiritur in eleuatione est in comparatione ad illud dimidium, cum ergo attractio secundum eandem proportionem augeatur, ergo semper maior difficultas augebitur, ergo ab initio minimum

erit

erit discrimen ab attractione in plano. Exempli gratia sit, ut graue d in plano sit, ut quinque, & suspensum decem, ergo in medio angulo erit penè septem, sed septem minus longe distat à quinque, quàm decem ad septem, ergo in secunda parte plus longè augebitur difficultas attractionis supra difficultatem in medio angulo acclini, quam in prima parte à plano ad medium acclive, & quoniam planum in plano descendit, tanto uehementius, quanto difficilius attrahitur, ergo planum in decliui sublimi longe maiore impetu feretur infra quam sit proportio anguli ad angulum. Exempli gratia, planum in medio angulo, si incipiat descendere in dodrante multo lentius, quàm pro dimidio uirium descensus totius anguli, imò minimum descensus est à medio recti ad unguem, ubi omnia plana sint, & durissima, & causa huius est, quia omne graue tendit ad centrum, quòd maior pars ipsius grauis est ultra medium grauitatis in decliui humiliore.

Propositio centesimaquinta.

Proportionem ferentium pondus in pertica inuenire.

Co. Quest. 59. Mechanic. Hæc proponitur etiam à Philosopho, & ponatur a b, & si pondus sit in medio d grauat æqualiter utrunque, nam in hoc consentit experimentum cum ratione, at uerò si ponatur in c ita,



Propos. 41. ut b c sit tripla b a uiderentur a & b, tanquam hypomochlia, & pondus ipsum b, ut grauior esset c h, quàm c a. Aristoteles, seu author

Prop. 103. ille hoc uidens bifariam respondet: primum quod hoc est inuersum instrumentum, cum in cæteris motor sit ex aduerso hypomochlij, hic in ipso, gestans enim mouet & hypomochlij instar est humerus. At hoc uerum non est: quod mouet enim est pondus, & est in c nam a, & contingit mouere: quia si starent, idem quæretur. Secunda responsio est, quod utrunque premit fulter ferentes & pondus, & quòd qui longior est ab hypomochlio facilius mouet, & redit ad idem fermè: nam in e constituitur, quod moueri debet, capita uectium sunt a, & b: motus autem est ipsum sustinere pondus. At hoc non uidetur, quoniam ratio, qua uectis longior facilius mouet, est ambitus magnitudo, ob quam motus redditur tardior, & ideo leuior: igitur non est hoc uerum de motu occulto, sicut est grauis premenus, sed circumducente, cum in occulto uelut in statera contrarium accidere docuerimus aliàs. Quidam dixere b premere c uersus a, a contrà uersus b, & ideò grauari magis a à b, quàm b ab a, quia maiorem uim habet b c, quàm a c. Istud falsum est bifariam. Primum, quia & b a, & b sint in æquilibrio, ut nec unus in alterum incumbat,

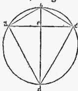
incumbat, nec impellat, sed tantum sustineat nihilosecius res uera est. Et etiam quia non est uerum, quòd qui longius incumbit, maiorem uim inferat. Propterea dicendum est, quòd qui ex communibus propria nituntur demonstrare, omnes corrumpunt disciplinas. Nihil deterius est his monstris. Nam etsi hæc ratio uera esset; non tamen reddit causam, quia non est ex proprijs principijs. Dico ergo, quod si c descendat in e, per perpendiculum descendet, igitur d b est longior d a, quare angulus e a b maior e b a: igitur pondus c plus descendit comparatione a, quàm b, ergo plus grauat c ipsum a quàm b, seu ex causa, quod magis premat, seu ex effectu, quòd magis descesserit. Causa ergo erroris est, quod si ponatur angulus f b a æqualis angulo f a b, & ponatur b f ęqualis b c, tunc in eodem tempore, in quo transit dimidium c in e, transibit aliud dimidium c in f, quia separatę partes grauiores sunt in c b, quàm c a, propter distantiam ab hypomochlio, sed tunc uelocius mouentur, & angulus fit ęqualis. Sed quando pondus est unum, & c descendit ad e, cum descendat inæquali tempore, & peragat maiorem angulum comparatione a, quam b, sequitur, ut uelocius moueatur comparatione a quàm b. Ergo si non mouetur, cum omnis potentia sit similis actui, tum quia ab eo producitur, & effectus est similis causæ: tum quia est initium actus, igitur etiam quod a b non inclinetur, nec descendat, grauius erit pondus, comparatione a quàm b, quod erat demonstrandum.

Ex hoc sequitur, quòd aliqua iuncta erunt grauiora respectu unius, quæ erunt mutaro ordine diuisa leuiora. Quoniam diuisa, quæ longius distant æqualem, aut maiorem angulum faciunt, iuncta minorem.

Propositio centesimasexta.

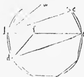
Quales proportiones angulorum doceant laterum proportiones. Atq; uicissim determinare.

Sit circulus a b c, cuius dimetiens, nota b d sit b, erit ergo latus exagoni a b dimidium b d, id est 3. igitur cum angulus a sit rectus, erit a d ℞ 27 latus trianguli. Et latus quadrati per eandem ℞ 18. Vt latus exagoni sit ℞ 9. Quadrati ℞ 18 Trianguli ℞ 27, & ita potestate se habent hæc ut 1.2.3. Et sunt nota. Et quia latus d e c agoni est ℞ $11\frac{1}{4}$ m, $1\frac{1}{2}$. & ipsum erit notum. Quare latus pentagoni est ℞ v $22\frac{1}{2}$ m: ℞ $101\frac{1}{4}$ notum. Etiam notum fuit latus eptagoni. Habebimus igitur latera Trianguli Co^{n}.



I quæ

quadrati pentagoni, & eptagoni æquilaterorum nota: & etiam subtensorum duobus ex his. Sit, gratia exempli, a b 3 & b c ℞ $11\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$, ut prius, & ponatur b d diameter, erit a d ℞ 27 & c d ℞ v $22\frac{1}{4}$ m: ℞ $101\frac{1}{4}$, quam ducemus in a b, & fiet ℞ v $202\frac{1}{2}$ m: ℞ $8201\frac{1}{4}$. Ducemus itidem ℞ 27 a d in b c ℞ $11\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ fiet ℞ $303\frac{3}{4}$ m: ℞ $60\frac{3}{4}$, hoc totum diuide per 66, quæ est b: fiet a c ℞ $8\frac{7}{16}$ m: ℞ $1\frac{11}{16}$ p: ℞ v: $5\frac{45}{72}$ m: ℞ $6\frac{1701}{5184}$. Nec credas te errare, quoniam latus pentagoni esset, ac si angulus b rectus esset: sed quia est obtusus, ideo a c est alia linea, &
Per 52. Element. maior latere pentagoni. Et similiter si a b, & a c notæ essent, utpote a b 3, ut prius a c 5 dico, quòd b c nota est: nam a d erit ℞ 27, & quia ex b d in a c fit 30, fiet ex b c in a d pos ℞ 27, et ex a b in c d ℞ 324 m: 9 quad. igitur 30 m: pos ℞ 27 æquantur ℞ 324 m: 9 quad. quare 900 p: 27 quad. m: pos ℞ 97200 æquãtur 324 m: 9 quad. igitur 576 p: 16 quad. æquantur pos ℞ 97200. Quadratum igitur p: 36 æquantur pos ℞ $379\frac{11}{16}$, erit ergo b c ℞ v: ℞ $94\frac{59}{64}$ p: ℞ $58\frac{59}{64}$ & similiter si a c sit nota, puta 4 erit a b subtensa dimidio arcus a c nota. Erit enim a e 2 ergo d e 3 p: ℞ 5 et b e 3 m: ℞ 5, igitur a b ℞ v: 18 m, ℞ 180. Igitur hoc modo diuidendo, iungendo, & detrahendo habebimus ex quatuor illis simplicibus trianguli quadrati. Pentagoni, & eptagoni in numeras linearum magnitudines in circulo. Et similiter quouis modo, ut dictum est, in quauis figura æquilatera, utpote supposito, quod descriptum sit nonangulum in circulo æquilaterum, quod etiam erit æquiangulum, & sit arcus a b duplus arcui a c, erit angulus a c b duplus angulo a b c, & angulus b a c in portione b d e c sexcuplus a b c, & triplus a c b.



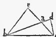
In 16. de Subtil. Erit ergo per demonstrata proportio b a ad a c, uelut a c, & c b, ad a b: proportio autem a b arcus ad a c, ex supposito maior est proportione rectæ a b ad a c, igitur etiam proportione a c & c b ad a b, ergo duo latera trianguli ad tertium minorem habent proportionem, quam arcus ad arcum, quanto rectæ ad rectam minor est. Sit rursus in triangulo b e d quomodolibet modo sit angulus b d e quadruplus angulo b e d, & diuidatur d per æqualia ducta d f, erit igitur proportio f d, d e ad f e, ut e f ad f d, sed e f ad
Per 3. sexti Elem. f b ut d e ad d b. igitur proportio b d, d e ad f b cõposita ex proportionibus e f ad f d, & e d ad d b. Proportio igitur b d, d e ad f b, ut producti ex e f in e d ad productum ex d f in d b. Rursus ponamus,
Per 23. sexti Elem. quod in quadrangulo a b c d primæ figuræ sit a b 4 b c 3 c d 5 a d 6 dico, quòd spacium contentum erit notum. Ductis rectis a c & b d

quomo-

quomodolibet, ut se secent in e, erunt anguli d c a, & d b a æquales, quia in eadem portione circuli a d, & anguli a d e ęquales, quia contra se positi. igitur trianguli a b e, & e d e similes, & proportio d c ad a b, ut c e ad b e, c d autem fuit 5 a b 4, igitur si b e ponatur 4 pos c e erit 5 pos. Per easdem, & eodem modo a d ad b c ut d e ad e c. igitur posita c e 5 pos erit a d 10 pos, tota igitur d b 14 pos. Et quoniam eadem proportio a e ad e b per eadem, & e b fuit 4 pos: igitur a c est 8 pos, quare a c 13. post productum igitur ex a c in d b, est 182 quad. & hoc æquatur productis a b in c d, quod est 20, & b c in a d quod est 18, totum igitur est 38, igitur res est ℞ $\frac{19}{91}$. Quare notę erunt lineæ b e, c d, a e, & e c, sed sufficit, ut cognita sit a c, uel b d. Per regulam enim triangulorum erunt notæ areæ a b c, & a d e, quare tota superficies a b c d. Et est inuentum Scipionis Ferri Bononiensis de quo aliàs. Potest etiam inuenta a c uel b d baberi superficies facilius per catheros.

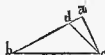
Per 21. tertij Elem.
Per 15. primi Element.
Per 32. primi Elem.

Sit modo obtusi angulus a b c, & nota latera singula, & angulus a b c, & producantur latera ad perpendiculum, ut sint d & e recti, & quia anguli ad a sunt æquales, erunt anguli e b a, & d c a semper æquales. Et hoc idem contingit in acuti angulis triangulis intus, & est utile mechanicum: & quia a b c notus est, & d notus, erunt anguli trigoni d b c noti: & si fuerit angulus a notus, erũt anguli d a c & e a b noti, & ideo anguli e b a, & d c a: & semper notum, quod fit ex b a in a d, uel c a in a e, sunt enim ęqualia inter se: etiam notæ a d & a e, quoniam duplum horum est excessus quadrati b c super quadrata a b, & a c. Quod uerò proponitur à Monteregio de cognitione angulorum in triangulis non est intelligendum, ut uerba significant, sed solum de cognitione quoad usum tabularum.



Per 32. primi Elem.
Per 12. secundi Elem.

Et iterum ponamus, quòd proportio a c c b ad a b sit qualis a b ad a c, dico quòd angulus c duplus est angulo b. Si non ducatur c d faciens angulum d c b duplum b, erit igitur proportio d c c b ad d b, ut d b ad d c. Maior est autẽ d c, quàm a c, aut æqualis, aut minor, si æqualis, igitur maior proportio d c c b ad b d quàm b a, igitur maior ꝓportio b d ad d c quam b a ad a c ad a c & æquales sunt igitur b d maior d a pars toto, quod esse non potest. Si uerò d c ponatur maior a c, magis ex hoc sequitur b d maiorem esse b a. Quod si minor sit d c quàm a c. Ex demonstratione ipsius reflexæ proportionis patet hoc contingere non posse. Et similiter patet conuersas in reliquis etiam ueras esse, non solum



in proportionibus notissimis angulorum sed etiam in coniunctione & detractione. Et est ex subtilissimis operationibus, quæ homini in hoc genere eueniant.

Propositio centesimaseptima.

Si in circulo duo diametri ad rectum angulum se secauer int: aliæ uerò ad perpendiculum ex diametro exierint ad circumferentiam, singulæ supra diametrum erunt maiores portionibus reliquis diametri superioribus, infra autem minores. Dimidium autem portionis superioris residuum ad centrum maius sagitta habebit. In aliqua præterea portionis superioris parte, quæ uersus diametrum transuersum posita est, maior est differentia partis diametri ei correspondentis, quam lineæ transuersæ.

Sint duę diametri a b, c d ad perpendiculum secantes se in centro, & ducũtur supr f g k h, & infra m l ad perpendiculum supra a b: dico f g esse maiorem f a, & k h k a, & contrà minorem m l, quàm m a. Per octauam enim sexti, quod fit ex b f in f a æquale est q̃drato f g, sed b f est maior f g, quia b f est maior e b, & e b e g f, ergo f g maior est f a, m l aũt minor est per eadẽ e c, quare e a, multo igitur minor m a, quod est primum. Supposito etiam, quòd a g arcus sit dimidium a c, dico a f minorẽ esse f e, nam quadratum e g æquale est quadratis f e, & f g, & quadratũ a g quadratis f g & f a & e g est ęqualis lateri exagoni, & a g latus octogoni, igitur e g maior g a, & duo quadrata e f & f g maiora duobus quadratis f g & f a, detracto igitur communi f g quadrato, patet propositum.

Per 31. tertij Element.

Per 7. tertij Elem. Corr. 1. eiusdem.

Per 47. primi Elem. Per Corr. 15. quarti Elem.

Per 28. tertij Elem.

Cum rursus ex prima parte huius lineę f g & k h sint maiores f a, & k a & e a sit æqualis e c, necesse est ut iuxta punctum c augeatur magis linea in e a, quam sit differentia lineæ transuersæ ad lineam transuersam per communem animi sententiam, quod est tertium.

Propositio centesimaoctaua.

Punctum ęqualitatis differentię descensus, & remotionis à centro inuenire.

Com. Per præcedentem moto puncto a uersus c semper usq; ad e, c magis distat pũctum a linea a e, quàm à puncto a uersus, quia linea n h maior est n a, & per eandem dum appropinquat ad c cum e c fiat ęqualis e a, maius fit incrementum in a e, quam respectu lineæ transuersalis. Volo ergo inuenire punctum hoc in quo fit mutatio: & diuido arcum a c per æqualia in f, & dico illum esse punctum quæsitum: accepto quouis puncto in e f, puta k, duco g o h p ęquidistan

tes

tes a b, & c d: eruntq; anguli q & n recti Per 29. primi Elem.
& anguli f e a, & f e c ęquales, igitur uterque dimidium recti: igitur per dicta in primo Elementorum Euclidis e n ęqualis n k, igitur c q ęqualis e n, quare h p æqualis g o, sed quod fit ex o k in k g est æquale ei, quod fit ex p k in k h, igitur k h est æqualis k g ex eisdem ostenditur f l m k quadratum esse. Quia ergo k h est æqualis k g, & k l æqualis k m, erit l g æqualis m h. Ergo descendendo ex g in f, quantum f l superat l g, tantum descendendo ex f in h, f m superat m h per communem animi sententiam. At f m est descensus f in linea a e, & m h distantia, quæ acquiritur in linea f r, n m enim est æqualis f r, igitur n h excedit f r in h m, & ita a n excedit a r in n r ęquali f m. Quantum ergo in g f, l f excedit l g, tantum in descensu ex f in h, f m, quæ refert g l, excedit h m, quæ refert f l. Arcus autem f g est æqualis arcui f h, quod cũ possem ostendere pluribus modis satis constat, quia chordarum illorum quadrata sunt inuicem æqualia, quia lineæ f m, & f l itemq; m h & l g sunt æquales, & anguli m, & l recti. Igitur cum ad quod uis, punctum in linea e f semper linea descensus in parte inferiore est maior linea distantiæ tanto, quanto per æqualem arcum in superiore linea distantiæ est maior linea, descensus sequitur per regulam Dialecticam quod punctus f, est punctus ęqualitatis. Per idem diceremus in quarta parte inferiore.

Per 23. tertij Elem.
Propos. 32. & 6.
Per 34. primi Elem.
Per 7. tertij Element.
Per 47. primi Elem.
Per 47. tertij Elem.

Propositio centesimanona.

Rationem libræ expendere.

Cum libra moueatur, uelut rota circa axem, quia trutina manet, ideò si pondus ponatur, dum iugum fuerit in linea a b nihil mouebitur, quia appetitus descensus ex puncto a maximus est, & nihil iuuat motum extra naturam, idem dico de graui posito in uertice b a. Nam duo sunt motus in rota, & in libra unus, per quem dum fertur per arcum a f, gratia exempli descendit, quantum est a r, quæ est minor dimidio e r, & ideò minor e r, quæ est maior dimidio, ut demonstratum est, & etiam minor r f, quæ æqualis est r e per demonstrata rursus: & hic est naturalis ut palam est: alter præter naturã, & est ferri ad latus, quoniam hoc est propriũ immortalibus: cunq; hic sit ad latus est etiam cõtra naturam, quia magis distat à centro, nam e f est longior e r, si ergo ferretur in f, moueretur à centro, & contra naturam. Dum ergo fertur ex a in f, multo lentius

Propos. 98.
In præcedenti.

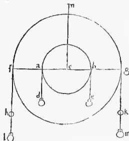
fertur, quàm ex f in c: uelocius autem ex c usque ad medium: nam plurimum descendit. Ex h ad b autem celerrimè, quoniam descendit, & appropinquat lineæ a b, ut uterque motus sit naturalis. Non ergo mouetur preter naturam nisi quatenus longius recedit à linea a b, unde in inferiore parte mouetur ad eandem, ideò de parte c b tota perspicua est ratio, cur facillimè descendat, similiter & tota, hoc enim est demonstratum. Similiter & quare difficillimè feratur ex b usque ad p, & ultra p usque ad directum r f: at de motu ex a in f, quod debeat ferri, quia plus remouetur, quam descendat, nulla est ratio: ut nec cur ex opposito f ad a difficilem se præstet: & hoc est, quia tertiam rationem etiam ipse Aristoteles, & qui eum sequuti sunt, prætermisit. Ea autem est, quod dum fertur ad g, uel fetiam licet non descendat magis, quàm remoueatur, ex a ad centrum terræ tamen magis appropinquat.



Quia enim e a est æqualis e c, quoniam prodeunt à centro circuli eiusdem, & b c, & e c sunt maiores b c, ideò b a erit maior b c, est autem b centrum mundi, ergo a motum ad c, appropinquauit ipsi b

Per 17. primi Elem.

Dico etiam quod libra ex chalybe tenuissimo, & quanto leuiorũ concharum, & longioris iugi eo exactior, quoniam lances illæ minori excessu mouentur, quia plus distant ab hypomochlio. Sit ergo libra, cuius iugum a b trutina c: lances d & e, alia libra, cuius lances h, & k, & l m longiores, iugum f g. Constat, quod qualis proportio f g ad a b, talis ambitus, ad ambitum: motus ergo si sit æqualis utrarumque, igitur a tanto minore proportione



moue-

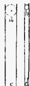
mouebitur in h, quam in d, uelut sit proportio f g ad a b dupla, ut ergo æqualiter moueantur, si sit dupla sexquiquarta in d cum lance ad c uacuam, erit in h sexquialtera, & mouebit æquali tempore. Ergo iuxta hoc fient libræ, quæ examinabunt decimam, & uigesimam partem grani, quod est necessarium in preciosis rebus, & medicamentis potentibus, & longè magis in mechanicis experimentis, & maximè quæ ad demonstrationem pertinent magnitudinis superficierum, & constat res in tribus, in longitudine, f g iungi, in leuitate materiæ illius, & lancium, nam tanto maior redditur proportio ponderis exigui, & in firmitate iugi ac rectitudine. ideò debet fieri ex chalybe purgato, durato ac tenuissimo, naturaq́ꝫ leui, & ut c sit in medio, & mobilis f g.

Considerandum est demum an f l & g m sint grauiores f h, & g k. Vt enim grauiores extiterint minus facilè mouentur. Videntur autem mihi, qui de his conscripserunt perperam contempsisse hoc, constat enim, quòd dum l descendit, remouetur a b n c trutina, & m, quæ ascendit contra appropinquat. Videtur autem hoc bifariam contra naturam: nam ut diximus pondus applicat se ad rectam n c, quia uersus centrum, & etiam quia facit angulum obtusum, cum deberet, ut ab initio saltem constituere cum iugo rectum. Et de m nihil mirum est, cum acutum, ut se ad lineam, quæ ad centrum retrahat. Huiusmodi præteriisse Aristotelem, demiror, quæ nimis fuerunt in conspicuo, ut dubitem ne non suus sit ille liber, qui eius penè nihil sapiat præter obscuritatem. Tentandum est igitur horum causas assignare. nam quæ huiusmodi potest esse doctrina nisi perfecta fuerit, in omnibus etenim necesse est aut omnia scire, aut ignorare. In hoc igitur dico, quod h f, seu l f, semper æquidistant n c trutinæ, ergo cum angulus f c n inclinato iugo fiat obtusus descendente pondere, & n c g ascendente pondere fiat acutus, ergo angulus l f c tantundem fiet obtusior, & m g c acutior, quanto anguli ad c tales sunt. Et causa est quia n c ratione ponderis est directa ad centrum, ergo oportet, ut pondera l, uel h, & m, uel k, si debent tendere ad centrum, ut f l, & g m æquidistent n c, nisi quantum est pro distantia f, à puncto c, & g a b eodem, quæ comparata ad centrũ terræ, seu mundi, est insensibilis omnino. Circa hæc notandũ istud mirabile scilicet, quod ratio motus, quantumuis exigua sufficit ad motus modũ, licet uelocitas pẽdeat ex grauitate, & aliis. Et quod graue, quod expers est sensus, debeat sequi rationem Geometricam uix sapientibus cognitã, causa tamen una est, & perspicua: nã omne graue est in linea à centro mũdi: si aũt medium grauis sit extra lineã, uertitur ad illam, quę est in eo, nam centrũ sem

per est in eadē. Ergo sola inclinatio ad hoc ut mediū grauis sit in linea centrorū grauitatis & terræ, sufficit. Est ergo principium in ſcipſo. In appenſis ſimiliter. Trutina enim, & finis iugi, & grauis centrū mundi centrū ſunt in eadē linea, ut eſſe poſſunt, cum exigua illa & ſola diſtantia intercedat. & hoc eſt primum. Quia ergo iugū eſt ex materia ſolida, mouetur ratione, quæ dicta eſt, lances autem oportet cum filis appenſi ſint, ut puncta f & h, uel l, & g k, uel g m ſint in una linea cum centro terræ. Et quia l magis diſtat a b f quam h, & m a g magis, quam k, & oportet faciant eandem inclinationem, quia anguli trutinæ cum iugo ſunt ijdem, & linea c l eſt maior c h, & c m, quàm c k in quouis ſitu, ergo ſpatium, quod ambitur, eſt maius ergo per d e monſtrata ſuperius l eſt grauius h etiam præter uinculorum additionem, & m grauius k. Quanto igitur longiores ſunt funiculi à libræ extremitate ſeu iugi, tanto grauius redditur pondus, quod tamen multi putant eſſe falſum: nec aliquid referre, quòd ſit longum, aut breue ſuſtentaculum.

Propoſitio centeſimadecima.

Si duæ ſphæræ ex eadem materia deſcendant in aëre eodem temporis momento ad planum ueniunt.



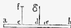
Co^m. Supponitur quod ex eodem loco. Sermo enim abſurda ſub interpretatione nunquam niſi ab inuidioſo, uel imperito intelligi debet. Sit ergo a tripla ad b, ſphærula ad ſphærulam ex plumbo ambæ ferro uel lapide eiuſdem generis, dico, quòd inæquali tempore peruenient ad planum c d. Nam a proportionem habet ad b, ut uigintiſeptem ad unum. proportio autem ſpatij a ad ſpatium b nonupla eſt, & proportio denſitatis aëris ad aërem eſt tripla, propterea quod denſitas illa multiplicatur propter impetus magnitudinem. nam ſi robur, ut decem percutiat baculo lato, ut quatuor ictus erit maior duplo, quàm ſit robur, ut quinque percutiat baculo, ut duo: propter denſitatem ergo maiorem aëris in a, quam in b: & quoniam ſi ſub maiore impetu mouetur aër ſub a, quam ſub b, igitur proportio erit comparanda longitudini à centro a ad longitudinem a centro b, quæ eſt tripla. Si ergo ſubtripla eſt ratio motus b ad a, quod ad medium attinet, tripla autem propter uelocitatem diſceſſus aëris à medio grauitatis, quod eſt in ſuperficie e regione centri grauitatis in linea ad centrum mundi, ut dictum eſt in præcedenti: manifeſtum eſt, quod a, & b inæquali tempore peruenient ad ſubiectum planum, & æquidiſtans centris eorum. Similiter & in aqua: cum

cum uerò uideatur in illa tanto celerius a descendere, quàm b, quanto est semidiameter a longior semidiametro b, liquet ex hoc, quod æquali uelocitate descendunt, sed ob uelocitatem motus in aére latet discrimen anticipationis contactus soli a ante b, qui dignoscitur in aqua, ex quo patet exactam esse æqualitatem. Sed resiliunt semel in aqua ambæ, cum pluries in aére a solo, quare etiam in aqua per turbatur cognitio in parum accuratis, atque sensu præditis, sicut etiam in casu, ne altera alteram perueniat, utraque comprehensa duobus digitis, altera alteram tangente, & usque ad centrum in aquam demissis simul digitis dilatatis dimittendæ sunt.

Propositio centesimaundecima.

Cur ex medio tela ualidiorem ictum, & naues in scalmo à remo, ac malo recipiant inde ex puppi explorare.

Aristoteles uidetur in Mechanicis, & qui eum sequuti sunt, ui- Com.
dentur rem nauticam quòd ad remos attinet, referre in longitudinem partis, quæ scalmum tanquàm hypomochlium interiacet & manum: ea enim circa medium nauis cum illa ibi sit latior maior est. Sed & qui lembos ducunt, & in puppe magis distant à scalmo & in prora, quàm in medio nauis, nec tamen uelocius illam agunt: non quòd ratio illa falsa sit, sed quia uelocius feruntur etiam ob aliam causam, quam sit hæc, & magis uniuersalem.
Primum igitur sumamus, quod superiùs demonstratum est scili- Propos. 86.
cet, quòd ubi pondus aliquod æquale undique tanquam in libra suspensum fuerit, proportio ponderis partium inæqualium ad duas partes æquales, est confusa ex proportione longitudinis earundem, & quadrato eiusdem proportionis. Sit ergo diuisa a b in c, & fiat c e æqualis c a: proportio igitur ponderis b e ad pondus e a est composita ex proportione b e ad e a, & quadrato eius secũdum longitudinem. at posita agina d g in medio a b, ꝓportio ponderis b e ad pondus e a est, ueluti longitudinis b e ad e a, igitur proportio põderis b e ad e a, cum agina est extra medium in c, est tanto



maior proportione b e ad e a, quantum est quadratum illius pro- Per 10.
portionis, ergo b e pondus maius est, cum agina est in c, quàm in d. quinti Elem.
igitur per communẽ animi sententiã addito communi pondere a e, erit pondus a b minus semper cum agina est in d, quàm in ullo alio lo-
co a b. Ergo pondus a b apprehensum in d mouebit a b æquali ui Per 8. quin-
maiore proportione, quàm in ullo alio loco. Hastile ergo in medio ap- ti Elem.
prehensum maiore ui mouebitur, quàm in ulla alia parte. Et si gra-

cilius sit in anteriore parte propinquius comprehensum calci, & si crassius, uel grauius propius cuspidi. Semper igitur ob hanc causam mota ex medio grauitatis, seu uelo, seu ramo, seu manu uelocius mouentur, quàm ex alijs partibus. In remo etiam potest accedere illud commodum, cuius meminit Aristoteles. Propter hoc igitur, qui malum in naui collocarunt tantùm unum, in medio fermè
Propos. 82. cum collocarunt, ut antiqui: & qui duos aut tres, maiorem crassiorem scilicet, & altiorem in medio constituerunt.

Propositio centesimaduodecima.

Cur ex imo leuia longius ferantur declarare.

Com. Iam uerò cõsideremus, quòd propositum est, non solum in comparatione ad medium, sed extremorum inuicem, missa enim ab imo uelocius feruntur, quàm à medio non solum manu, sed scorpionibus, & arcubus. Videmus & hoc obseruare pueros uirgam longius iacentes non ex medio, sed imo apprehensam, quoniam pars ipsa anterior, & quæ manu apprehensa est, uehementi impetu emittitur: & ut recipit impetum magis æqualem, longius fertur, nam quod emittitur proportionem habet ad spatium. Cum ergo apprehensa in medio uirga solum medietate anteriore impetum recipiat per se, ob id minus fertur: at impetus sequitur proportionem, ut uisum est, quæ est circa medium ob leuitatem ponderis. In leuibus ergo maius spatium superabunt emissa ex imo, quoniam proportio spatij eadem est ad duplum, & ad dimidium, igitur ex imo fermè duplum etiam spatij superabit: non tamen omnino quia maiorem, ut dixi proportionem habet ad id, quod ex medio comprehensum est. At in leuibus non est necessarium, ut ex medio apprehendantur, quoniam etiam cum incremento illo ponderis iam leuia sunt: plus ergo facit longitudo eius, quod eiaculatur, quàm impetus, cuius demonstratio est hæc. Sit uirga a b apprehensa in medio ponderis unciæ mediæ, & in a d, ut sit d a palmus, & uigesi-

b c d a

Per 86. ma pars totius a b, erit ergo residuum ad duplum, a d nonuplum, & a b tota unciarum quinque cum dimidia, si igitur grauetur, quia in situ recto est mediæ unciæ, in æquidistanti terræ, quinque unciarum cum dimidio, erit in situ dimidij recti unciarum trium. Est igitur proportio sexcupla, si apprehendatur in medio, & ad æquidistantem, ad apprehensam in imo, & ad angulum medium: at emissa ex
Per 89. a d habet totum aërem a b circumdantem impulsum ex c b solum dimidium reliqua pars ui trahitur, ergo proportio spatij a b, erit sexdecupla fermè spatio b c, quoniam est triplicata corporis ad corpus eius, quæ est longitudinis ad longitudinem, & quadruplicata

respectu

respectu aëris a c,qui resistit apprehensa a b in c. Et iam minus fere-batur quinta parte,ideo longius eiaculabitur triplo ex a, quàm ex c. Nec tamen maiore impetu,quia obliquè fertur, & quæ obliquè feriũt,minore cum impetu feriunt: atque eo magis si leuia fuerint:ab aëre enim circumambiente perturbantur, & in incertum trudun-tur. Quæ ergo grauia sunt ex medio emissa, & ad æquidistantem longius feruntur,& maiore cum impetu,quia magis directè: leuia autem longius ex imo,sed minore cum impetu, si aliqua causa à re-cto,& æquidistante declinauerint. At si à suprema parte, & iuxta cuspidem,neque procul feruntur,neque cum impetu ob causas di-ctas. Eadem quoque ratio est omnium machinarum: ideò oblon-ge longius ciaculantur,quoniam proportionem seruant ad cana-lem. Sed de hoc inferius agetur. Prop. 107.

Propositio centesimatertiadecima.

Cur uirga longius mittatur à puero,quàm à uiro inuestigare.

Diligentia,& usus pueriles efficit,ut uirga feratur secundum me- Com.
dium recti anguli: uir autem non constanter iacit,& secundum re-ctum,at rectus incessus in leuibus,quia ab aëre in obliquum defle-ctitur uirga ob longitudinem efficit,ut inflectatur infrà celerius, & desinat citius motus, ac finiatur. Tertia causa est, quòd leuissima non adeò recipiunt impetum ut grauia: nam leuissimam & exigu-am ligni portionem maximo nixu uix excutiemus è manu. Causa ergo est: quoniam uim,oportet, ut habeat, quod contra naturam mouetur,ut naturaliter moueri possit,quæcunque igitur naturaliter exiguum habent motum,ut pluma,palea,festucæ nulla ratione ue-hementer contra naturam agi possunt. Quædam ergo à pueris lon gius iaciũtur ob solam peritiam,& exercitationem, quædam quo-niam ad angulum latiorem magis feruntur, quàm sit rectus, quæ-dam quoniam leuissima sunt. Sed si leuiora non feruntur ualido motu uiolento,cur tamen à pueris iacta longius ferũtur? Ratio est, quoniam maior uis deficiente obiecto magis fatigatur,atque ideò minus mouet. Propter hæc igitur omnia non solùm in pueris,sed in machinis,quæ accommodata sunt, melius impelluntur, ac lon-gius feruntur,quàm leuissima. nam nec palea scorpione iacta tam procul,quàm sagitta fertur,cum proportio maior sit,tamen ad pa-leam,quàm ad sagittam. Inde fit,ut quemadmodum Turca ille lite-ras sui Principis,cum timeret ad nostros propius accedere,lapidi al ligatas longius emisit. Causam autem huius docet Aristoteles in Mechanicis dum quærit cur,& grauia & leuia ualde longe proijci nequeunt: nam grauia nimis,moueri nõ facilè possunt:leuia etiam ualde ad rem mouere non ualent. Ob hæc utraque ex his paruo cum impetu

impetu emittuntur, tametsi uehementer nitaris. Sed & leuia feruntur hac illac, ut non possint retinere impetum prioris uiolentiæ: innatum enim est, ut duorum motuum simul in eadem re uigentium, cum illa proprio impetu feratur, unus alterum impediat: nam si rota uehatur circulariter acta, non tamen cessabit, aut imminuetur impetus circulationis. Multa ergo in huiusmodi anomalis motibus considerandas sunt, ut illorum impetum robur, ac locum definiamus.

Cor. Ex hoc liquet, cur plumbeæ sphærulæ longius ferantur à tormento emissæ, quàm ligneæ, etiam si non frangantur.

Propositio centesimaquartadecima.

Circularis motus differentias quatuor esse, earumq́ue rationem contemplari.

Co. In motu circulari aut axis progredit, aut suo loco manet. Vtroq; autem modo uel mouetur ab axe, uel circumferentia, igitur constat quatuor esse motuum differentias: quas cum tres proponat author libri Mechanicarum, aut Aristotelem illum esse, credendum non est, aut illum stupidum dicere necesse est, nam modum diuidendi eum latuisse quis putet. cum rota igitur aut sphæra in plano circumagitur, motus est ex circunferentia progrediente ex: ut palam est: motis enim loco nobis mouentur omnia, quæ sunt in nobis. Cum uerò rotæ sub curru sunt, progreditur axis earum, & rota ob id cum quiescere nequeat, quia facilius circumuertitur, quàm trahatur, procedit, & hic est secundus modus, quo rota ex circumferentia mouetur, & ex axe initium est motus. At uerò in rota molari, & quibus gladij exacuuntur, cum loco non moueantur, motus est ex axe: axis enim rotam circumagit, non rota axem, quiescit tamen in eodem loco rota, & axis scilicet, quia non progreditur, sed in loco mouetur: atque hic est tertius modus. Demum succula putei, & ipsa mouetur circulari motu, & trochleæ etiam, neq; enim progrediuntur: sed non ex axe mouentur, uerùm succula per coloppes circumducitur, & trochlea per funes, axisq; in succula mouetur, in trochleis autem quiescit prorsus: dico mouetur, id est circumducitur, non quod progrediatur: ut non solum sint quatuor modi, sed potius quinq;, nam & demonstratione ostenduntur, & experimento docente deprehenduntur. Horum omnium liberrimus est, primus ex circumferentia progrediente toto, seu attracto seu impulso & ue

Propos. 40. locissimus, cuius causam suprà ostendimus. Proximus huic est motus rotarum per axem, quoniam axis premit rotam interius solam, & labitur: ideoq; quod & axis, & rota intus sint leuissima, prodest plurimum: & aurigæ axungia inungunt, & nomen ab eo traxit

axungia.

axungia. Et quod rota magna sit: quoniam cum nō rota, sed axis trahatur in æquali tempore & magna, & parua trahitur: utraque uerò una conuersione tantam lineā rectam superat, quanta est rotæ peripheria. Quod si plures sint rotæ celerius feruntur, quia axis minus tanto rotā premit. Et si rectus sit axis, & bene rotundus, & foramen rotundum, & latius, & è durissimo ligno, ut non possit inclinari: & rota ipsa in ambitu æqualis, omnia hæc faciunt ad motus uelocitatem, unde Homerus. Iliad. 23.

ἴχνια τύπτε πόδεσσι πάρος κόνιν ἀμφιχυθῆναι.

Id est, uestigia percussit pedibus, antequā illa puluis pedibus excussus (uestigia scilicet relinquentibus) ingrederetur. Principalis autem causa uelocitatis est agens, uelut equi. Sed inter hūc motum & priorem medius est Scitalæ uocatæ, nam ut in primo axis procidit & rotundum à superficie circumagitur, licet axis etiam circumducatur, ut axis, & rota, aut sphæra duplici motu moueantur, scilicet antrorsum, & circumcirca, in rota currus duo ijdem motus sint, axis quoque antrorsum moueatur, sed non circumagatur: unde impeditior est hic motus: ita in Scytala utrunque utroque motu mouetur, & circumcirca, & antrorsum, atque id commune est, cum primo ita axis mouet rotas, non rotæ axem, quod secundo motui rotarum in curru proprium est, ut tantum degenerent à primo motu, quanto leuius uertuntur, quàm in secundo motu. Trahitur ergo iugum in scitala, uelut in rotis currus, sed est annexum rotis non in curribus. Propterea in primo motu trahitur, uel impellitur à superficie: in secundo a b axe, sed non affixo rotis, unde ægrè trahuntur in scytala ab axe affixo rotę. Quare leuius quàm in curru, difficilius quàm in rota uel sphæra à superficie extima circumacta. Quartus modus est, ut dixi, circumuecta rota ab axe, quum non progreditur, ut in moletrinis, & rotis, quibus ferrum exacuitur. Est enim hic similior primo, quia contrarius, in primo enim procedit rota, & uertitur à circumferentia, hic quiescit rota, & mouetur ab axe. Proximus huic est, qui fit in succulis ob firmitatem axis: nam axis est coniunctus rotæ. Vltimus est trochlearum, qui & difficillimus: fit enim à circunferentia, & axis disiunctus est à trochlea: quod addit difficultatem. Sed & trochlea caret colloppibus. Ergo uerum est, quod omnia rotunda facilius circumaguntur, sed uaria ratione: nam plus mota super aliquo plano, ut in plaustris & scytalis: minus in succulis, & rotis acuentibus ferrum, & molis: nam & si rotunditatem iuuet ob æqualitatem ad conuersionem, non tamen in his est adeò



K utilis,

utilis. Vtilitas ergo prima est, cum circumuertitur in plano, uelut in rotis scytalis, & sphæris. Secunda quæ minor est, cum à superficie circumuertitur, ut in trochleis. Tertia cum à coloppis, quæ minima est omnium, ut in succulis. Motus autem cœli non est ex triplici primo genere, cum sit in loco, & non ad locum, neque ut rotæ molaris: nam ille est ex axe: nec ut in trochlea: nam in ea axis quiescit ipsum autem cœlum circa axem non uertitur, sed cum axe, sitamen insecabilis linea circumagi potest dici. Relinquitur ergo, ut Cœli motus propior sit motui succulæ, quàm alij motui. Differt ab eo in hoc, quod in succula mouetur axis ab orbe: at in cœlo ut non mouetur ab axe, ita nec axis ab orbe: cumque sit motus simplicissimus, in alio genere collocandus est: quandoquidem in illo nulla pars possit dici primo, quod necessariũ est in unoquoque horũ.

Propositio centesimaquinta decima.

Proportionem motuum impulsionis, & attractionis inter se ab eadem ui declarare.

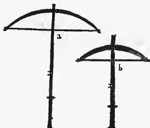
Co^m. Constat, quòd attractio cum fune longiore ualidior est, quam cum manibus, quoniam est cum motu quodam: motus autem auget actionem, ideo attractio ualidior est hac de causa, sed & impulsio cum baculo ualidior est, quam cum manibus, quoniam licet colligere omnes uires in illo baculo, & ipsum applicare loco, unde facilius impelli potest. Velut sphæra ex medio latere: nam ibi magis colliguntur uires, & ad impellendum facilius est, quodcunque leuius est. Pars autem magis remota à centro grauitatis est leuior, his duabus causis, sphæra ex medio latere facilius ac magis impellitur. Sed nos supponimus nunc applicationem æqualem esse, nam secus ad impellendum facilius est applicare totum corpus, quàm attractionem. Pectore enim magna ui impellimus, nihil est compar, quo trahere possimus. Sed, ut dixi, sit baculus applicatus alicui lapidi ca parte, qua facilius potest impelli & trahi, & quæritur, quæ maior sit uis, an attrahendi? & dico quòd homo, uel conatur trahere toto corpore, & impellere, atque hoc modo magis trahit, quàm impellet, quoniam corporis pondus melius adhibetur in tractione quàm impulsu: uel citra corporis pondus, sed sola ui membrorum: & tunc magis impellit, quoniam impulsus fit corpore prono in anteriorẽ partem, quæ inclinatio, & motus est naturalis magis, quàm in attractione in partem posteriorem. Sed ubi nulla sit diuersitas neque horum, neque figurarum æqualis uis æqualem efficit motum: quia impulsus impellentis comparatione est attractio respectu alterius. Verùm non est eadem uis nec propè par impellendi, atque attrahendi hominibus, cum attractio fiat per musculos ad origi-
nem

nem suam naturaliter se retrahentibus impulsui nullum instrumen tum à natura delegatum inuenio, nam ad extensionem musculi sanè ex aduerso sunt fabricati: cum ergo duo sint tantum motus musculorum tensio, dum retrahūtur ad principium suum, & remissio, dum membrum quiescit in naturali nullus erit locus impulsioni, nisi ex consequentia non per se, quamobrem multo infirmiorem illum attractione in brachijs esse, necesse est.

Propositio centesimasextadecima.

Cur machinæ ablongæ igneæ longius emittant sphæram explorare.

Quoniam ratio superius adducta, neq; in his, neq; in hypophysis (uocant cerbatanas) non potest satisfacere, cum tamen idem sequatur in his, ut in illis uidetur, quasi uis esse in sphærula sic emissa, & non in aëre, quemadmodum dicebamus, coniuncto esse. Ex quo necesse esset, ut quod longius ferretur, etiam ualidiores ictus inferret, hoc autem non ita se habet, sed ictus magnitudo ex robore machinarum tam ignearum, quam scorpionum pendet, nam sit a scorpio magnus, sed tenuis, ex hoc palam est longius mittere sagittam, quòd à parua, & breui, quantunuis crassa non longe mittitur: at uerò Com. Prop. 103.



quod b crassus & paruus maiore cum impetu mittat ostenditur nam ea pondera sagittæ mouet, quæ non potest mouere a, igitur b ualidiore robore mouet, quam a. Præterea illud ostendit iugum furis arcus crassiora duriora, quæ maioribus uiribus indigēt, quam a, qui à puero tendi poterit. Non est ergo eadem ratio mittendi longius, & ualidiore cum robore. Eadem ergo eum ratio sit in machinis igneis, crassiores enim, & latiores ac breuiores magis concutiunt, quam longiores tenuiores minoris sphæræ capaces: non solum ob magnitudinem sphæræ magis illæ concutiunt, sed, ut dixi, ob maiorem impetus uim: causa ergo est manifesta in his, sed non causa, qua longius ferantur in longiore canali. Sed uide-

tur una, eademq́ esse ratio in utrisque. Constituatur canalis a b longior, & c d breuior, ut sit sexqui alter a b ad c d, & sit rursus sphærulæ locus e in longiore, sexqui alter in distantia a b, qualis est in f a d, & erit per dicta ab Euclide in quinto, ac sexqui altera c f. Possemus igitur dicere, quod uelut ab hypomochlio longiore spatio circumagitur pondus: ita & a b c, & f. Sed rursus incidimus in id, ut maiore impetu feratur e quàm f. Ideo si concedatur maiore ferri ex e, quam ex f non sequitur, ut celerius, aut maiore impetu. Percutit puer pugno quanta ui potest ac celerrimè, uir robustus lentè, & minore impetu, sed tamen ictus longè maior est. Est enim ictus robur non à uelocitate solum, sed maiore ex ponderis grauitate, quæ sola premit, urget, & frangit etiam sine motu. Solum ergo id restat dubium, cur si grauius est, moueatur eodem fermè impetu: nam quo maiore impetu fertur, eo longius fertur, non tamen magis ferit, concutit, aut quassat, sed grauitas ad hoc plus facit impetu. Palea maximo impetu demissa non ferit, non lædit, & celerius descendit, ferrum sola grauitate actum, imò etiam temperato ictu lædit grauiter, quassat, & frangit: itaq́ f maiore indiget quantitate pyrij pulueris, quàm e: siquidem tertia parte ponderis suæ sphæræ: at maius est pondus f quam e, ergo maius pondus pulueris f quàm e, ergo maior uehementia ictus, siquidem ea sequitur, robur causæ mouentis simpliciter: ut concludamus longitudinem ictus sequi proportionem motoris ad motum, sed uehementia robur motoris: nam si ex portione mouet æquale pondus maiore cum impetu mouet, quoniam maior est proportio: si minore igitur pondus maius est, &, ut dixi plus facit magnitudo ponderis cum leui ictu, quàm magnitudo ictus cum leui pondere. Quæ ergo feruntur per longiores canales maiore impetu feruntur, & societatem habẽt aëris moti per longius spatiũ, ut tardius remittatur, quia longiore tempore uis motus confirmata est, & ꝓportio eius, quòd mouet, maior est ad id, quod mouet̃, quia minus extenditur, at uerò f motũ minore ꝓportione ictũ facit maiorẽ, qa, ut dixi, tãto grauius, est quod ferit. Quod autẽ minus extẽdatur machina a b quam c d, nũc ostẽdere oportet.



Propositio centesimadecimaseptima.

In cuniculis maior est uis pulueris copiosioris ampliore in spatio, quàm paucioris in minore iuxta proportionem eandem.

Sit ſpatium f d ſexqui tertium b e, puluis quoq; in f d ſpatio ſi- Com.
militer ſexqui tertius pulueri b e ponderẽ, & manifeſtum eſt, quod
dum conuertitur in ignem qualiſcunq; ſit proportio (modo eadem
ignis ad pulucrem) erit ignis in f d pariter ſexqui tertius igni in b e,
dico quod ſi craſsities f d ſit etiam ſexqui tertia craſsitiei b e, quod
poterit frangi, & moueri f d quieſcente b e. Vnde idem in cuniculis
ut magnus cuniculus cum multo puluere poſsit mouere montem
paruus cum puluere proportione reſpondente priori non poſsit.
Nam cùm æqualia ſint omnia iuxtaq; rationem eandem, neceſſe eſt,
ut pro ratione extendantur, at in paruo ſpatio minor ſit denſitas ce-
tera paria ſunt, ergo à paruo ſpatio non tantus ſit impetus, quantus
à magno. Impetus etiam proportionem habet ad põdus, & ad con-
iunctionem, à maiore igitur impetu plura, & maiora mouentur, &
conuelluntur, quam à minore, ob hæc igitur minores cuniculi ſuc-
cutiunt, maiores euertunt, maximi exturbant, & proijciunt. Nam
qui ſuccutiunt, ubi pondus, aut coniunctio maior ſit, quàm ut di-
ſtrahere poſsint, condenſant partes proximiores, & rimas faciunt,
per quas exhalat ignis aut omnino extinguitur, aut condenſatur.
At ergo in bellicis machinis, minus dilatat puluis, cum fuerit in lon
go canali, ob id ergo maiore impetu feruntur per illas, quàm per
[illegible]cuiores, etiam quòd minor ſit puluis, minor ſit ignis. Experimen
[illegible] facies in canali, ubi ſambuci medulla pro globulo flatu impel-
lente expellitur abſq; periculo: nam quanto minor fuerit canalis
ambitu ac longior eo maiore impetu pellitur. Forſan quiſpiam nos
merito poterit uideri reprehẽdiſſe, quòd inanis gloriæ ſtudio per-
[illegible]oſa humano generi doceam. Quibus reſpondeo, me nihil docu
[illegible]e, quod in humani generis detrimentum cedat, huiuſmodiq; præ-
cepta iam obſcuraſſe, ut ne quid mali accidere poſſet hominibus ex
his: nã quòd ad ea, quæ declarata, ſunt, cauſas ſolùm retuli, effectus
ipſi modi artis nimiũ feruntur, ac nimio pluſquam uellẽ intelligun-
tur. Vt cum ad copiam, ad magnitudinem, ad coacta imperia miſe-
rorum reſpicio, nihil plus poſsit addi. Omnia enim hucuſq; ſpectãt
ad potentiorum incrementa. An ergo ſuccurrere afflictis, obſeſsis,
cinctis, æquare conditionẽ, liberare à ſeruitute etiam rebelles nõ li-
cebit? Ab initio fuimus omnes liberi: excogitata fuit regni ratio ad
commodum hominum, ea uerſa eſt per uim in Tyrannidẽ. Subtili
ergo ratione occurrendũ eſt imbecillioribus: nã reliqua omnia ni-
mis, ut dixi, quę ad cuniculos ad magnitudinẽ machinarũ ad rectos
i[illegible]tus ad libramẽta ad longitudinem ſpacij, per quos globus ille de-
fertur, nota ſunt improbis illis artificibus, nec noſtrum eſt ſpectare,
[illegible]ur id licuerit, poſtquam Deus hanc uiolentiam eſſe uoluit. Multa
damnamus, q̃ Deus eſſe uult: boni uiri eſt nõ niſi opitulari homini-
bus, etiã malis modo bonis futuri nõ ſint impedimẽto: quamobrẽ

ea tradenda sunt, quæ oppresſis ſint auxilio: ea ſunt, quę ſubtilibus conſtãt rationibus, et multiplicata amittũt uim ut quaſi prę ſtẽt pauca multis, & exigua magnis. In cęteris obſcurare ita decet cuncta, q̃ obeſſe poſſunt, aut quouis modo ꝑuerti ad malos uſus queãt, ut dicta nõ dicta eſſe putẽt, hoc eſt officiũ nõ ſolum ꝓbi, ſed etiã prudentis uiri.

Propoſitio centeſimadecimaoctaua.

Quanta ꝓportione decedat ictus in obliquum parietem ab eo, qui eſt ad perpendiculum declarare.



Com. Sit paries b d e, ex a ferat̃ in d ictus, qui ſi eſſet in c d parietẽ eſſe ad perpendiculum, & ualidiſsimus, ſin uero in f g abraderet, & nõ cõquaſſaret. Quæritur ergo ex b d e muro qualis excipictur? erit ergo proportio anguli c d a ad angulũ b d a, ueluti ictus a d in d c ad ictũ in b d, manifeſtũ eſt aũt ſequi ꝓportionem, quoniã maxima uarietate cõſtat dum ex angulo b d a acuto fit acutior, quoniã ſi b d c ſit q̃druplus b d a erit reſiduus ad dimidiũ b d a nonuplus ipſi dimidio, & ad quartã partẽ habebit ꝓportionem decemnouẽ ad unũ. Si ergo etiã in idẽ tenderent, nõ efficerent mille ictus q̃d tres, cuius demonſtratio hęc eſt. Supponamus ꝓportionẽ b d c ad q̃rtam partẽ a d b addito reſiduo ad b d e eſſe ſolũ decuplã: tũc ex duob. ictibus centupla erit in d c ad eã, quę in b e, etiã tribus millecupla: nam cõquaſſata turri in primo ictu, id d decuplo magis ad perpendiculum q̃ in b d e ſumat̃ decima pars in ambitu d, & illa erit ergo tã diſſoluta, & infirma ex ſuppoſito, q̃ eſt tota b e: ſed ex ſecundo ictu decuplo magis cõquaſſabit̃ illa pars, q̃ b e ergo tota de centuplo magis quaſſabit̃ ex duob. ictibus c d turris, q̃ b e, & ita in tribus: ex decẽ millibus ergo ictibus etiã ad amuſsim directis, cũ tamẽ id uix fieri poſsit in tãta multitudine nõ plus cõminuet̃ b d e, q̃ ex decẽ c d ꝑter quã exiguũ quippiã in ſuperficie. Imò ut declaratũ eſt multo minus repetita ratione multiplicis. Ob id in arce Mediolanẽſi exterius lapidibus uiuis in rotundũ diducta ſuperficie interualloq; q̃drato hunc in modũ munitę ſunt altiores turres. Fiat ergo murus cuius ꝓportio a d c ad b d a ſit ſexquitertia, eritq; angulus b d c dodrãs recti, & parũ inclinatis, ſiquidẽ b d c erit quarta pars recti, & ſit tantę magnitudinis, atq; duritiei, ac adeò benè coniunctus fer- 729
reis cathenis, ac ſtolonibus, ut poſsit reſiſtere machinarũ fe- 972
rentiũ ſphęrã librarũ ducentarum (quæ ſanè maximæ ſunt) 1296
quinquaginta: tũc cum ꝓportio ſexquitertia nouies repeti- 1728
ta, ut in numeris uides, efficiat quinquies replicatis nouem 2304
ictibus, fiet ꝓportio decupla quinquies ꝓducta, quę eſt cen 3072
tũ millium ad unũ in quadraginta quinq; ictibus. Antequã 4096
ergo peruenit ad quinquaginta ictus rectos neceſſe erit, ut 5461 $\frac{1}{3}$

7281 $\frac{7}{9}$

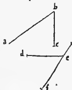
multo

multo plures centum millibus ictus excipiat anteq́ euertatur, quæ recta si esset quinquaginta solùm potuisset sustinere. Quæ ergo humana potentia sufficeret. In arce Mediolanẽsi uidimus uix attactas in illis exuberationibus lapideis. Sed quoniam hic occurritur per inclinationem machinarum, ideò de hoc sermonẽ sum habiturus.

Propositio centesimadecimanona.

Quantum ictus machinę procliuis ad angulũ minuat̃ explorare.

Huiusce causa excogitarũt, ut ictus ad perpendiculũ dirigeret, & quanquã angulus d e f sit æquali angulo a b c, longè tñ maior est uis a b q̃ d c duplici causa, & quoniã a b est secundũ naturam impetus ignis, & etiã eorũ, quę emittunt̃ in altum: & q̃d pars superior in b retineat ictũ, in e non retineat. Sed cauitas fiat maior in inferiore parte: cuius experimẽtum quilibet facere potest cũ hasta. Huic ergo solertiæ, q̃ tormenta iubet altius collocare obstat primũ, quod ictus ex decliui situ periculosior est, p machina, & maximè q̃d retro impellit, q̀ ex retrocessa, postq̀ exonerata est, dignoscit, & ad collimandũ decedit parte uisũ suarum, q̃d etsi paruũ sit in ductu tñ, & ictuũ multiplicatione magnũ affert discrimen. Habet & cõmodum situs muri acchuis terrã suppositã ad perpendiculum, q̃ ictum sustinet: adeò ut omnib. inuicẽ collectis, perinde sit ac si ex perpendiculo, et equidistanti ad solũ feriat. Venctus. S. aliter Patauij cauit, uideturq̀, q̀ sapientissimus sit, & eandem sequatur ubiq̀ normam, postq̀ in rotundã figuram totũ urbis ambitum formauit, & fossa lata, ac p̃fundissima aquaq̀ perenni muniuit, & summã muri partem rotundã in hunc modũ effecit cauãq̀ interius undiq̀, ne cuniculis posset euerti, à lateribus uerò humiles, ac crassissimas turres, ut nulla ui possent dirui, easq̀ tormentis bellicis, undiq̀ latera lustrantib. repleuit, illud diligentissime cauit, ne murus humilior esset aduersa ripa, sed ad libellã tamen depressus, ut etiã machinis in terram extensis sphęrulæ non tangerent murũ: nam cũ fossa sit quadraginta passuum, excedat aũt murus exteriorẽ aggerem uno passu, ut quicquid in ambitu est uno ictu oculi cognosci possit, & aggeris angulus maior sit uno passu, tũ magis adiecta crassitie machinę fieri non potest, ut ictus in murũ dirigatur. Eam ob causam etiã cauit, ne ędificiũ ullum, aut planta, uel colliculus esset circumcirca urbẽ ad tria M. P. laborat hoc periculo hęc urbs, ne tota ędificijs euersis concidat. Turcarũ enim Princeps dicitur, ut in Nouo castro in Melitę Insulę arce S. Elmi appellata plusq̀ mille ictibus in singulos dies imo M D obtundere





munitiones. Eum'q; impetum producere ad quindecim dies, & uiginti tum etiam longius, ut facilè domos omnes euertat, homines occidat: si qui supersunt tot incommodis obruuntur uigilijs, fame, siti, puluere, ut inutiles reddantur. Ideò huic incõmodo occurrunt aggeribus intra mœnia erectis, in quos uis tormẽtorum igneorum emoritur. Sed dices, cur ergo non pro muris erigere eos præstat, & minore sumptu satis? quoniam subruuntur à fossoribus facillime, si ad illos peruenire posśit hostis. Ideò intra mœnia utilissimi sunt, p mœnijs parum prosunt. Quod uerò ad testudines attinet, sub quibus latẽt fossores machinæ laterales, & à fronte & ignes, & aqua altior phibent omnino iniuriam, quę ab his imminet. Cæterum huiusmodi cum in longum differunt morbis, illuuie, incõmodis, pluuijs, frigoribus omnino dissoluũtur, ut nulla multitudo huic operi sufficere posśit. Rhodus, Alba regia, Melita, Castrum nouũ, Byzantium, si diferri potuissent tempora, non cessissent uictori quantumuis superbo. Vicit pertinacia, audacia'q; summa, Corcyrã, Viennam capere nõ potuit, quoniam in longũ trahebatur oppugnatio. Multæ machinæ, & pauci homines prædæ obsessorum expositæ sunt: paucę, & pauci homines obsidebuntur potius, quam obsidebunt. Exercitus magnus dissoluitur, & semetipsum consumit, si nulla fiat accesśio aut exigua quomodo stabit: si magna auxilia omnia corrumpuntur. Contrà obsesśis auxilia si ueniant lustrata, & munita, & omnibus necessarijs ornata uiri integri cõtra fatigatos, & fessos corpore, armati contra inermes, alacres contra torpidos superueniunt. Ob id præcipuum est auxilium pręter hęc his, qui oppugnantur copia militum, qui per initia nunq; quiescant diu noctu'q;, uerũ noctu duo tubicines persæpe exercitũ insomnẽ in armis tota nocte cõtinebũt. Serio aũt die pugnare, & noctu cũ minimè id sperãt, & fatigati sunt: mira euenire solent in his insperatis, ac audacibus eruptionib. persępe etiã omnino supra fidẽ. Ita nõ conquiescere oportet donec, uel omnino à cepto desinat hostis, aut locũ occupet sibi relictũ potius q̃ quẽ elegerit. nam experimentũ frequens docuit, ubi illæ magnę uires suo arbitrio locũ, quẽ elegerũt obtinere potuerint, tandẽ potiri locis quãtumuis munitis in hoc q̃d diximus cõtra opponaſ. Etenim septẽ modis cũ urbes, atq; arces capianſ, quorũ duo sunt extra p̃sentẽ considerationẽ obsidio, q̃ magnitudine ambitus loci tollit, & p̃ditio, q̃ custodũ uigilãtia, cuniculi, euersio superioris muri, euersio ab imo p machinas, cuniculi, seu suffosśio, urbis euersio, seu ędificiorũ: & q̃ uocant aggresśio, seu oppugnatio p scalas, & crates cũ sagittarijs: his omnib. satisfactũ puto, pręter q̃ oppugnationi, p pter humilitatẽ murorũ: nã lignis opplenſ, atq; fasciculis, terra'q; solſe nihil. n. resistit immensę illi potestati, & crudelitati sęuisśimorũ tyrãnorũ. Verũ, ut dixi, terra noctu effodiſ, ligna artificiosis ignib. eruuntur.

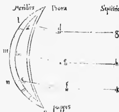
untur. Et longum est opus siue per paucos, siue per multos quis efficere conetur: ut non minus exigat temporis, quàm obsidio: nam multitudine unus alterum impedit, & mortui uiuos, ut omnino res sit non speranda nisi aduersus inertissimos. Pontes euertunt machinæ, ignesq;. Sed ubi etiam muros obtinuerint ob rotunditatem in illis consistere non possunt. Inde à defensoribus propulsantur sarissis, telis, ignibus, transuersis trabibus, machinis: illudq; accedit com modi, ut quanto plures eo facilius excutiantur. Dixi non debere uereri maxima etiam præter id, quoniam & istę ipsę tanto sanguine acquisitę tanto deorum & hominum iniuria modica scintilla ignis sine munitionibus, exercitibus, siue machinis, absq; terræ cõcussione, aut inundatione, uel peste euertuntur. In illam miseram lachrymam patris scintilla ignis inferni, cùm Deo placuerit, mittit, ex qua, quod coalitũ est, multis seculis imperium luxu, crudelitate, stulticia unius filij, uix uno lustro toto dissoluitur. Hanc scintillã cum felici etiam genio secum ex utero detulit Alexander Magnus. In alijs alij genium fortiti sunt, alij scintillã detulere ab Orco. Ex imperio Assyriorum per luxum Sardanapalus: ex Medorum per scintillã Astyages: ex Persarũ per stultitiam Darius: ex Romanorũ Honorius. Dices, hęc quid ad ꝓportionem? Imò uelut machina ad perpendiculũ librata pauculo illo puluere Pyrio urbẽ euertit, ita scintilla illa inferni ignis semini magni tyranni indita euertit atq; dissoluit totum regnum sine machinis, ut dixi, uel exercitibus ullis, & quod maius est remedio nullo. Sed puerulo indito luxus, ignauiæ, crudelitatis atq; stultitię fontibus, mirabile dictũ sanè, & ad proportionem diuinorum instrumentorũ pertinens. Sed redeamus ad institutum: Video enim, quid posſit obijci, scilicet muros crassos, et altiores tueri urbẽ & ædificia illius posse absq; aggeris erectione, & si diruanĩ manere etiam nihilominus imo magis, quod est terram, usq; quoniã eadem ratione manet, quia concuti non posſit à machinis: nec hostes id curaturos, sperantes hoc solũ sufficere, q̃d mœnia solo æquenĩ, atq; id factũ est Mediolani, & in arce eius, tũ Papię & in Cremonensi arce. Verùm ni fallor, ut paruis arcibus à tanta ui tormentorum nullum est præsidiũ, aut salutis spes, ita neq; cõuenit, ut muris humilibus aggeri confidant, nam & pauci homines tanto labori non sufficerent, & agger cum fossa effossa scilicet terra defensores nimis in angustũ cogeret. At in urbibus contra euenit: muris enim erectis altius machinæ lapidum frustis hominem occidẽt: an percussa superiore parte ob coniunctionem inferior concutitur, & inde totũ simul cadit, ut uidimus Papię, quo cadẽte, & fossa impletur, & τειχομάχοις facilior aditus ad subruendum reliquas partes prębet: imò perculsi defensores

sores sæpe muneris sui obliuiscuntur, desertaq; ea parte liberum ingressum hostibus exhibent. Tum uerò magis, quod non confidunt animo nõ ad id parato, posse aggerem sufficientem, & in tam breui tempore exstruere, & etiam intelligunt, antequam erigatur, patere à lateribus introitum hostibus.

Propositio centesimauigesima.

Proportionem partium nauis ad eundem obliquum uentum explorare.

Com. Sint mali in naui a b c, ad b e, c fuentus è regione g h k etiam ad perpendiculum feratur, ut anguli g d a, h e b, k f c sint æquales, dico tamen diuerso modo affici: nam cum premitur a uersus l, c premitur uersus f: at si prematur c uersus n a, premitur uersus d, at si prematur b uersus m, & a uersus l, sed non quantum ex g d, & c uersus n, sed non quantum ex k f, ab eodem ergo uento contrarij motus efficiuntur ex uelorum diuersitate, etenim per uentum d feretur ad meridiem nauis, & per uelum f ad Septentrionem etiam diducto auxilio claui, quanto magis cum illo: & si uentus excipiatur in f uelo, non iuuabit clauus, & si in



d dirigetur, & temperabitur motus, & si in e medio modo. Ergo si uentus feratur rectè iuuabit, ut dici solet omnibus, & pleuis uelis excipere, si ex obliquo demittere antennam puppis, sin autem ualde obliquus sit, solo proræ uelo utemur. Si ualidior quàm oportet humiliore. Atque hæc postmodum sunt diligenter numeranda, ac metienda: nunc sufficiat causam reddidisse, & admonuisse diuersitatis motuum, quæ ex uelis contingit: nam eò fertur nauis, quò prora dirigitur. Ergo cum puppis tanto feratur uersus meridiem a b, quanto prora uersus meridiem a d, & quanto puppis fertur uersus meridiẽ, tanto prora fertur uersus boream, igitur quanto prora fertur uersus meridiem a d, tanto uersus boream a b f, sed situs claui potest multo plus in comparatione ueli d, quam f scilicet, quia distantia a b a est o a, & distantia e c est o c, tanto plus ergo potest claui situs in comparatione ad uelum d, quam f, quanta est proportio o a, ad

o a, ad o c, igitur clauus est longè potentior in comparatione ueli d, quam f, ergo uelum d minus agit nauim, quam f. Sed ut extrema se habent, ita medium eorum comparatione, igitur malus b e ali- dior est, multo d a, & infirmior c f. Verùm, ut dixi, ob situm simpli- citer ualidius est, uelum e quam f, & etiam quia, ut dixi, altior & crassior solet esse, ideo multo ualidior tribus his causis, quàm e f: adde quartam quòd uelum habet maius, antiquo tempore uoca- tum acatius. At ut etiam docui c b non est in medio, nec æquidistat ab a d & c f, sed inclinatur ad proram ideoq́ imbecillior: cum ergo sit æqualium, & paulo maiorum uirium, quàm c f, & tutior, & me- lius agatur per clauū quàm c f, & sit a d nimis iusto imbecillis, pro- pterea b e mali, & ueli maximus est usus: adeò mali nomen per an- tonomasiam de ipso simpliciter intelligatur.

Propositio centesimauigesimaprima.

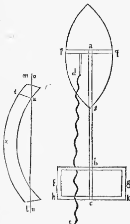
Flabelli uires, atq; naturam declarare.

Sit flabellum a b c appensum, ut solet, in a, & moueatur motu quasi circa axem p a q in parte inferiore, & aër comprehensus sub b h k, & spatium sit l m figuræ nauicularis, quæ constat esse par- tem cylindri inanis ex formatione ab Euclide scripta: nam si pro- poneretur p a q ad perpendiculum superstans plano, fieret circum- ducta a b c superficie, quæ esset lata superius, sicut etiam inferius cylindrus: at superius a b tenuis est, & angusta, ergo fiet pars cy- lindri inanis: quia non circumuoluitur, donec redeat. Ergo per di- cta superius sectio illius p r q s per axem est pars cuiusdam elly- psis. Et sectio quæuis planæ superficiei æquidistans a b e uelut tu, itemq; æquidistans axi p a q est superficies rectangula, quarum una est similis, & æqualis b h k, est in una superficie cum axe p a q alia uerò est æquidistans eidem axi maior aut minor æquidistanti- um, & ipsa laterum, atq; rectangula ac si cylindrus stans axi plano æquidistanti secaretur iuxta longitudinem seu altitudinem suam: & manifestum est, quod ista duo plana, & eorum superficies secant se mutuò ad rectos angulos.

Com. Lib. 1 1. diff. 2 1. Propos. 69.

Quibus constitutis, qui stabunt iuxta l, & m longitudines aëris moti, & loci, per quem transit flabellum, sentient magnum uentum, quoniam cum corpus m x l ab extremis partibus sit elatius a b ex- tremis, stantes, & alti tangentur à uento agitato. Si uero sedeant, aer primum non attinget illos, ut etiam quia sursum pellitur non per- ueniet ad illos, imò diffugiet, ergo non refrigerabuntur. Qui uerò à lateribus l x m stabūt hiccinde, uelut in f g, si steterint, nō refrigera būtur, quia quādo flabellum erit in l, uel m aer descendet, ergo fugi et ab illis, cum autem fuerit in x, erit in loco humiliori, & mouebi- tur

tur diuersa ratione, quippe ab f in h, & non ad latera, ergo neque contactu, neque motu, qui fiet per æquidistantem f, & g non poterunt refrigerari. Sed si humili loco sedeant, quoniam aër descendit, ex l & m uersus x, & etiam, quia erunt proximi h k, quãdo fuerit in x, refrigerabunt ualde. Qui autẽ erũt iuxta h & k minus refrigerabunt utrisq;, sed paululum in reditibus propinquis, & neq; stantes, neq; sedẽtes, sed si altius attollatur h k. Rursus si b h k fuerit grauior eodem, ut descendat tanto impetu, quãto ascendit attractum, ut pote ex ligno tenui nucis, tunc multo magis refrigerabit, & procul, nõ ob uim ualidiorem, sed quoniam celerius occursantes sibi contrarijs motibus, ac uehemẽtibus fiet collisio partium aëris, & ideo in ambitum impelletur, & undique cubiculum refrigerabit, quod non faciet maius longè flabellum lento motu agitatum, aut ex materia leui. Idem multo magis contingeret, ubi duo essent flabella laquearibus appensa, quæ ad perpendiculum aërem mouerent, seu quod superficies eo modo se haberent: & si flabella rotunda essent, tunc maiorem ambitum aëris occuparent, & uelocius deficientibus angulis mouebuntur.



Propositio centesimauigesimasecunda.

Contemptus circa solis rationem in umbris declarare.

Constat primùm solem, & excentro, & toto eius ambitu illuminare hanc primùm diuersitatem, quæ aliquando tota diametro computata dimidium unius partis totius cœli excedit: sciotericì negligunt, ut exiguam. Secundò etiam diuersitatis illius, qua modò à terra uersus absidem desertur, modò ad terram descendere totidem uariata altitudine, non parum nullam habent rationem, seu quod

quòd tanta ne sit, ut euidentem in gnomonibus faciat uarietatem, seu quòd incertum adhuc sit, an id uerè soli accidat. Tertium est finis umbræ ipsius gnomonis, qui incertus est, ut pars non contemnenda in dubium uertatur, quoniam sensim ex obscuro in illuminatum feratur, attamen contemnitur etiam. Quartum quòd cum sol moueatur in spira, fingitur quasi in parallelo æquinoctiali circulo circumagatur ab his, qui horologia describunt. Quintum quòd cum inæqualiter in orbe suo moueatur quanuis exigua sit hæc differentia, æqualiter tamẽ moueri præsupponitur. Sextum est, quòd dies æquales supponuntur, qui tamen tum ex ratione partis peragratæ, tum ratione ascensus eiusdẽ sunt inæquales, & tamẽ hæc inæqualitas etiã in horarũ computatione prætermittitur. Sed & hæc ut prior ratione magis, quã sensu deprehendit. Septimũ est discrimen, q̃d oritur ex usus circulo seu horizonte, & circulo transeunte p̃ centrũ mundi, nam horizon uerè tãto minor est circulo magno, quantum est semidiameter terræ, cõparatus ad semidiametrũ orbis cœlestis, sed est insensilis quantitatis. Octauũ est, quod trianguli ex gnomone umbra, & radijs solis latera non mutant lineas, quæ à sole ad centrum terræ deueniunt, nec quòd maius est, radius solis ad uerticem hominis breuior habetur semidimetiente. Hæc igit̃ omnia sciotericorũ opifices non obseruant, sed negligunt. Verum quatuor tantùm altitudinem poli regionis locum solis in eclyptica locum solis in circulo æquinoctialis, uel æquinoctiali parallelo, ex quibus tribus fit altitudo solis, una in circulo scilicet uerticali ab horizonte, & differentia lineæ meridianæ à linea uersus polum, quam ostendit lapis Herculeus, de qua dictum est superius. Propos. 84.

Propositio centesimauigesimatertia.

Cognita ratione umbræ ad gnomonem sinum, & arcum altitudinis ab horizonte quouis tempore dignoscere.

Sit circulus magnus, in quo sol a f g superstans ad perpendiculum circulo uisus f e g, quos manifestum est transire per idem centrum mundi c, quia magni sunt, & sit c d erecta ad perpendiculum super f g, nam perinde est per septimum contemptum, ac si superficies horizontis transeat per terræ centrum, & pedes per octauum, ideo proportio e c ad c d umbræ ad gnomonem, ut b c ad b a, ergo Co. Præced. Pro pos. Prop. 113.

per demonstrata b a cognita in comparatione a d e a, e a autem per octauum contemptum est dimetiens circuli, ergo a b sinus notus, & arcus f a, quod est primum cognitum. Et hic quidem circulus uerticalis dicitur, quia per illum transit, aliter non esset ad perpendiculum horizonti.

Corm.1. Ex hoc sequitur, quod altitudines solis æquales omnes in uno sunt circulo horizonti parallelo. Et si sol fuerit in uno circulo horizonti parallelo, altitudines solis, & umbræ magnitudines æquales erunt.

Corm.2. Sol nisi bis in una die potest esse in circulo horizonti parallelo, semel ante meridiem, & semel post, tantundem ab eodem distans.

Corm.3. Cum ergo ita sit, necesse est umbras æquales, & circulum horizonti parallelū fieri sub inæqualibus horis in diuersis semper diebus, præterquam cum in punctis fuerit æqualis ab æquinoctiali, & in eandem partem declinationis, & hoc bis cōtingit solum in anno pro quolibet circulo parallelo, sicut in eodem die etiam bis tātum, ut dictum est.

Com. Nam exempli gratia, cum sol est in initio Capricorni, & in Cœli medio, minima est umbra eius diei, & totius anni. Cum ergo fuerit ante meridiem, uel post, erit umbra maior ex supposito secūdo umbra meridiei: at ei æqualis poterit esse umbra meridiei alterius diei ex primo supposito, ergo umbræ æquales diuersorum dierum fiunt sub diuerso situ solis, quo ad circulum meridiei, quod erat demonstrandum.

Corm.4. Ex hoc sequitur, quod horarum determinatio fit secundum lineam inæqualem obliquam, quæ toti anno seruiat, ut æqualium umbrarum determinatio horarum & partium eius numerum.

Corm.5. Ex quo colligitur modus faciendi gnomonem, seu per umbras rectas, seu per uersas, qui docebit toto anno non solū horas, sed momenta pulsuū, de quibus dictū est quod MMMDC horam perficiūt.

Propositio centesimavigesimaquarta.

Proportionem umbræ uersæ esse ad gnomonem, uelut gnomonis ad umbram uersam.

Com. Vmbra uersa dicitur, quoties gnomo in pariete ad perpendiculum figitur, sic ut gnomo æquidistet circulo horizontis. Sit ergo paries c k ad perpendiculum f g, & h k a d gnomo ad perpendiculum parietis & sol, ut prius in a, & sit primo k h tantæ longitudinis ut umbræ locus sit pūctus d, ut sit radius a h d e, eritq; angulus duorumq; æqualis, & propterea triangulus k h d similis d c e. Sit modo gnomo maior m l ipso h k & c l maior c k seu æqualis, & quam anguli k & l recti sunt, & anguli l m n, & k h d æqualis, quia a n, & a c sunt

Per 15. primi Eucl. Per 4. sexti Eucl.

sunt æquidistantes per octauum contemptum, erunt per dicta trianguli similes, igitur proportio l m gnomonis ad l n umbram ut k h gnomonis ad k d umbram, sed k h, ad k d, ut c e umbræ ad c d gnomonem: igitur proportio l m gnomonis ad l n umbrã, ut umbræ c e ad c d gnomonem, quod fuit demonstrandum.

Ex hoc primùm patet & precedenti, quod cognita proportione umbræ uersæ ad gnomonem cognoscitur sinus solis, & arcus altitudinis in circulo magno, & est altitudo ab horizontis parte, quæ proximior est loco solis, ut demonstratum à nobis in Geometricis. Cor^m. 1.

Sequitur etiam, quòd cùm umbra fuerit æqualis gnomoni, seu recta, seu uersa solis, uel Lunæ, uel stellæ, altitudo erit partium quadraginta quinque: nam anguli d & e, uel d & h erunt æquales: igitur arcus f a medietas quartæ: ideò partium xlv. Et si gnomo fuerit maior umbra uersa, uel minor recta, erit arcus f a minor xlv partibus, si contrà maior. Et hoc ubique terrarum. Et ubi non possit tantundem eleuari, ut quando sol est sub circulo capricorni, nunquam nobis gnomo æquabitur umbræ rectæ sed semper erit minor, & semper maior umbra uersa pari ratione. Cor^m. 2. Per 5. primi Element. Per ult. sexti Elem.

Propositio centesimauigesimaquinta.

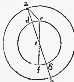
Proportionem dimetientis, & peripheriæ cuiuslibet circuli paralleli æquinoctiali per cognitam partem magni circuli demonstrare.

Hæc erat tam clara, ut hic locum non mereretur: tam necessaria huic proposito, ut non potuerit omitti. Sit ergo Aequinoctij circulus a b portio circuli magni nota, a c parallelus circulus, æquinoctij circulo c d, erit igitur sinus c d notus. Et ideò quadratũ c d notum, ergo & pars utraque b d d a nota. Quare detracta a d ex d b relinquitur d g æqualis f c diametro paralleli assignari. Quare proportio a b ad c f nota ex obiter suprà demonstratis, & pariter ambitus circuli a b ad ambitum circuli c d, est enim ut dimetientis ad dimetientem. Com^m. Per 3. tertij, & 8. & 17. sexti Elem. Per 5 secun di Elem. Per 113. Propos.

Propositio centesimauigesimasexta.

Circuli horarij naturam declarare.

Circulus horarius est circulus magnus transiens per solẽ, aut lunam, aut quoduis sydus, de quo agitur, & per polos mundi, ideò differt à circulo priore altitudinis Solis, quia ille stat ad perpendiculum super horizontem, nisi cum tangitur uice meridiani, uterque tamen transit per centrũ mundi, ac solis. Hic etiam ad similes partes æquinoctij circulum, & omnes parallelos secat. Co^m.

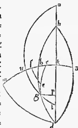


Et principalis est meridianus, ideò ab illo Astrologi horas utrinque ante, & post numerant. Ideò clarū est, quòd horæ à meridie computatæ sunt cōmunes, habitantibus sub quauis altitudine poli, & ubiuis sit, sol modò regiones æqualiter distent à fortunatis, seu sint in eadem longitudine.

Propositio centesimauigesimaseptima.

Data Poli altitudine ortus amplitudinem demonstrare.

Com. Sit horizon a d b æquinoctij circulus a k f ecclyptica c g, & punctus ortus in e g. & c initium arietis, & g b amplitudo ortiua & c e, c f quartæ circulorum, ut sit e f maxima solis declinatio, & polus mundi borealis l, quia igitur l d nota est ex supposito, & l k quadrans erit k h residuū ad dimidium circuli notum. Quia uerò æquinoctium, & Meridianus secant se ad angulos rectos, & b a æquidistat ab utroque polo, erit b polus h d, quare b k, quarta circuli, & angulus k rectus. Igitur sumus in dispositione tabularum primi mobilis, ergo etiam oppositus triangulus, qui ei est æqualis, & æquiangulus in eadem dispositione b m d, quare cum data sit g n declinatio pūcti g dati, datus erit, & arcus g b quæsitus.



Propositio centesimauigesimaoctaua.

Nota amplitudine ortus cuiusque pūcti arcū semidiurnū inuenire.

Com. Sit in eadem figura nota g b, uolo illius arcū semidiurnum. Cum ergo g n sit declinatio, erit pars arcus Meridiani horarij per polos transeuntis, compleatur ergo l g n o, & quia g n nota est, quia declinatio puncti dati, & g b nota ex supposito, & f angulus rectus, quia e f est portio meridiani, erit b n nota differentia ascensionis a quarta circuli k b, igitū tota k n arcus semidiurnus. Quoniā g p parallelus similis est k n, & in eo reuoluit Sol: ergo quando enim peruenietad p. Possumus etiam sine inuentione arcus ortus amplitudinis per triangulum k m d ex notitia g n cognoscere eandem n b.

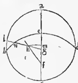
Corr. Ex his duabus sequitur cōuersa scilicet, quod data magnitudine diei cuiuscunque in quauis regione nota erit poli altitudo eiusdē regionis.

Propositio centesimauigesimanona.

Data altitudine solis in quacunque regione quacunque die distantiam solis à Meridiano cognoscere.

Com. Sit Horizon a b c d æquinoctij circulus b e d. Meridianus a e c Polus mundi Borealis f uertex, g, pūctus in eclyptica h ducatur ex polo

polo mundi circulus horarius f h k ad æquinoctij circulum, & uerticalis circulus p h l usq; ad Horizontem, & circulus parallelus æquinoctij circulo h m, sit ergo h l altitudo solis nota, igitur h g nota erit residuum quartę circuli, & similiter h k nota, quia declinatio puncti dati in eclyptica est nota dies, & locus solis ex supposito ergo nota f h residuū quartę circuli nota est etiā g e, quæ est equalis altitudini poli ex supposito, ergo residuum quadrantis f g, ergo triangulus f g h notorum laterum ergo notus angulus f, ergo arcus k e distantia sumpta in æquinoctij circulo puncti h, cui similis est arcus h m ex parallelo h m, nam quando k perueniet in e h perueniet in m, & inæquali tempore, qua diuisa per quindecim gradus, habebimus horas distātię solis à Meridie ante, uel post, & minuta horarum dando quibuslibet gradibus quatuor minuta horæ, & quibuslibet minutis graduum quatuor secunda horæ, & ita habebimus tempus exactissimum à Meridie in quacunq; regione, & in quacunq; hora diei. Per 123. Propos. Propos. 34. lib 4. De Triang. Monteregij.



Propositio centesimatrigesima.

Data regionis altitudine, & loco solis proportionem gnomonis tam ad umbram rectam, quam uersam, uel etiam in cylindro determinare.

Hęc est propositio illa pulcherrima, quam tot ambagibus tradidere antiqui cum suis analematibus, & scioteris, nec tamen demonstrationem, nec rationem exactam instrumenortum constructionem, qua possemus per umbras rectas uersas, & cylindricas scire ad unguem, qualis hora, & minutum, & secundum diei esset quocunque anni tempore. Plerię autem tam laboriosè id conati sunt demonstrare, ut studiosos deterruerint ab opere: res autem ipsa facillima est. Proposita ergo Poli exacta altitudine solis in Meridie declinatione addita uel detracta, habebis residuum eius ad quadrantem f g, & similiter habebis ex declinatione nota loci solis detracta à quadrante f h & iuxta horam tuam, & minutum multiplicatum per quindecim arcum k e quare angulum f, ex quo arcum g h, quare residuum h l, igitur punctum umbrę rectę, uel uersę ipsius gnomonis ad unguem, & ita constitues horologium exactissimum secundum ea, qua dixi in Corrolarijs supradictis, & quia horizon a b c d secat æquinoctialem in cētro terræ ducta g h k, erunt anguli b h g, & k h l equales. Igitur posito g ortu pụncti eclypticæ, erit g b ortus amplitudo nota, & ideò angulus b h g, & k h l Com. Per 28. li. 4. Ioan. de Monteregij de Triang. Per 123. uel 124. Propos.

 notus,

Prop. 123. Corol. 1. notus, & ita extendemus per totum annum. Cum uerò fuerit g eleuatus erit, ut demõstratum est, in circulo magno uerticali, ergo angulus fiet in eodem circulo, quia gnomo est etiam in illius superficie. Per 127. Propos. Ergo angulus erit æqualis angulo, quem faceret sol, si oriretur in puncto horizontis, quem secat circulus uerticalis sub ea altitudine; sed his est notus: Per 15. primi Elem. nam in priore figura g h f est notus eadẽ ratione, qua f, & ideò ei oppositus k h n, & k rectus, est enim f polus b d, & h k declinatio nota ergo k n, & h n notæ. At e k, & g h fuere notæ. Ergo e n, & g n, quare residuæ n l & n b notæ. Est autem angulus l rectus. ergo ortus amplitudo puncti l nota scilicet arcus l b, ergo in præsenti figura angulus m h b, ergo k h l. igitur poterimus statuere angulos umbrarum, & iam possumus determinare magnitudinem: ergo punctum ad unguẽ umbræ qualibet hora, & parte horæ singulis diebus in quacunque regione datæ altitudinis poli uersa, & rects. In cylindrica autem eodem modo sicut in uersa, est enim species umbræ uersæ, nisi quod analema ob obliquitatem cylindri melius aptatur, rotundum scilicet cum rotũdo.

Propositio centesimatrigesimaprima.

Si lineæ alicui dupla alterius adiungat̃, erit ꝓportio duarum ad primã maior, quam dupli, cum prima ad primam cum una adiecta.

Sit a b linea, cui adiecta sit b c, & rursus ad b c c d æqualis b c Com. dico, quod proportio a c ad a b est maior, quàm a d ad a c. Proportio enim c d ad c a minor est, quàm ad a b per octauam quinti Elementorum. Ergo minor d c ad c a quàm c b ad a b, quia b c & c d sunt æquales, ideò æqualẽ habent proportionẽ ad a b: igit̃ coniungendo per 28. Quinti proportio d a ad a c minor, quam c a ad a b, quod erat demonstrandum.

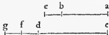
a b c d

Per 7. quinti Elem.

Propositio centesimatrigesimasecunda.

Si ad duas lineas, quarum una alteri dupla sit eadem linea addatur erit aggregati ex minore, & a d adiecta ad ipsam minorẽ minor proportio quam aggregati ex maiore, & adiecta ad ipsam maiorem duplicata.

Com. Sint duæ lineæ a b, & c d. & sit c d dupla ad a b, addatur cõmunis b e, & uocetur iuncta c d, d f dico, quod proportio e a ad a b, est minor duplicata f c ad c d, adiciatur d f æqualis g f, quia ergo g d est dupla ad f d, ideo ad e b c d autem est dupla ad a b, tota igitur



g c dupla toti c a. quare ut g c ad g d ut e a ad e b permutãdo, & per euersam ut e a ad a b, ita g c ad c d, ut g c ad c d cõponitur ex g e ad f e, & f e ad c d, igitur e a ad e b componitur ex eisdem. Proportio autem g c ad f c est minor, quam f c ad c d, igitur minor quàm duplicata f c ad c d. constat uerò ex eisdem, quod proportio e a ad a b maior est duplicata g c ad f c.

Propositio centesimatrigesimatertia.

Si fuerint duæ quantitates, quarum una alteri dupla sit: minuatur à minore quædam quãtitas eademque maiori addatur, erit minoris ad residuũ maior proportio, quã aggregati ad maiorẽ duplicata. Si uerò minori addatur et à maiore detrahatur, erit aggregati ad minorem minor proportio quàm maioris ad residuum duplicata.

Sit a b dupla c d, & addatur quædam ad b a, quæ sit a g, eadem detrahatur ex c d & sit c h, dico, quod proportio e d ad d h maior est, quam duplicata g b ad a b, & rursus si quædam ad c & minuatur ex a b utpotè c f addatur c d, & a e minuatur ex a b, erit proportio f d ad c d minor duplicata a b ad g e. Primũ si crescentur a n & k l æquales singulæ c h, igitur a l dupla est e h & a b fuit dupla a d. c d igitur ut in priore constitutione præcedentis a b ad l b, ut c d ad h d & a b ad b l maior, quam duplicata a b ad b k ut minor quàm k b ad b l. hoc enim demonstratum est in fine, igitur c d ad h d maior, quàm duplicata a k ad k b, sed a k ad k b maior est per uigesimam tertiam, huius scilicet per demonstrationem illius, quàm g b ad b a, igitur multo maior c d ad d h, quàm duplicata g b ad b a, quod est primum.

Com.

c h d
g a k l b

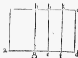
Secundum sic per eadem, addito enim duplo f c ipsi a b ut in secunda figura, & sint a m, & m n erit f d ad c d, ut n a ad a b, quare cum n a ad a b sit minor duplicata per præcedentem in b a d a b, & a b ad e b sit maior, ut demonstratum est in uigesima tertia huius, quàm m b ad a b, erit f d ad d c multo minor duplicata a b ad b e, quod est secundum.

Propositio centesimatrigesimaquarta.

Si rectangula superficies sit cuius pars tertia quadrata sit, corpus quod ex latere quadratæ in residuum superficiei constat maius est quouis corpore ex eadem superficies aliter diuisa constituto.

Sit rectangulum a c cuius tertia pars c e sit quadrata, dico quod corpus, quod cõstat ex e d in a b est maius omni corpore, quod fuerit ex latere partis superficiei a b in reliquam partẽ. Si non diuidatur uel supra uel infra, & primo in ferit autẽ proportio e d ad d f, ut e c ad Com.

ek, & fa ad ae, ut superficierum ipsarum per primam sexti Elementorum: at per præcedentem maior est proportio e d ad d f, quàm a f ad a e, duplicata igitur maior est proportio e d ad eam, quæ potest super f e superficiem, quam f a ad a e, igitur maior, quàm a k ad a b ex prima sexti Elementorum: igitur per trigesimamquartam undecimi, Parallelipedum ex e d in a b maius est parallelipedo ex ea, quæ potest in f e superficiem in ipsam superficiem a k. Si uerò diuisio facta fuerit in g, constat ex præcedenti, quod minor est proportio g e ad e d, quàm sit duplicata e a ad a d a g, eam igitur minor proportio eius lineæ, quæ potest in g e superficiem ad e d quam a b ad a h, igitur parallelipedum ex e d in a b est maius parallelipedo ex ea, quæ potest g e in a h cum sit a b ad a h, ut dictum est, uelut a e ad a g.



Cor^m. Manifestum est autem, quòd tale corpus est æquale duplo cubi lateris partis tertiæ quadratæ.

Propositio centesimatrigesimaquinta.

Si linea in duas partes, quarum una sit alteri dupla, diuidatur erit, quod fit ex tertia parte in quadratum residui parallelipedum maius omni parallelipedo, quod ex diuisione eiusdem lineæ creari possit.

Co^m. Sit a c dupla b c, & sit quadratum ad ipsius a c, dico parallelipedum ex b c in a d maius esse quouis alio ex diuisione lineæ a b similiter creato. Secetur primo in e, & fiat quadratum a f, eritque per uigesimamquintam. Huius proportio c b ad b e maior duplicata a e ad a c, quare maior, quam a f ad a d per uigesimam sexti Elementorum, igitur per trigesimamquartam undecimi, Parallelipedum ex b c in a d maius est parallelipedo e b in a f, quod est demonstrandum. Si uerò diuisio cadat in g, fiat quadratum a h, et erit per uigesimamtertiam huius proportio g c ad c b minor, quàm duplicata c a ad a g: igitur minor, quàm a d ad a h, igitur per candem parallelipedum ex c b in a d maius est parallelipedo ex g b in a h.



Cor^m. Ex hoc liquet quòd parallelipedum illud erit quadruplum cubo minoris partis, & dimidium cubi maioris.

Propositio

Propositio centesimatrigesimasexta.

Denominationes in infinitum extendere.

Inquit Euclides, si fuerint quotlibet quantitates ab uno in continua proportione, erit tertius numerus quadratus, & omnes alij sequentes uno intermisso. (Com. Lib. 9. Propos. 8.) Tertia igitur in comparatione ad secundam etiam, quod non sit numerus, est quadratum: est enim tertia ab uno quadratum secundæ, quæ est proportio. Detracto igitur uno omnes quantitates loco pari sunt quadratæ: ut scias ergo cuius sunt quadratæ diuide per medium, & erit quadratum illius, ergo quadragesima erit quadratum uigesimæ, & uigesima decimæ, & decima quintæ, & uigesimasexta tertiædecimæ, & ita de alijs. Iuxta hoc dicemus, quod secunda erit quadratũ, & quarta quadratum quadrati, & octaua quadratũ quadrati quadrati. Et sextadecima quadquadquadquad. & ita trigesima secunda quadquadquadquadquad. Quod autem quad. est quarta in ordine, ideò & octaua & duodecima & decimasexta, & sic de alijs sunt quadrata quadrati, & sicut quarta est quadratum quadrati primæ, ita octaua secundæ, & duodecima tertiæ, & sextadecima quartæ, & uigesima quintæ, & ita semper diuidendo per quatuor.

Secunda regula dicebat ibidem Euclides, si fuerint quotlibet quantitates ab uno in continua proportione quartus, ab uno erit cubus supple secundæ, & ita duobus semper intermissis, uno igitur ipso relicto quolibet loco ternario, ut tertia, sexta, nona, duodecima sunt cubi, & cubi eius quantitatis, quę exit diuiso numero per tria, uelut tertia primæ, sexta secundæ, nona tertię, duodecima quartæ: & ita tertia erit cubus nona cubus cubi, & uigesimaseptima cubus cubi cubi scilicet primæ. Et trigesimanona est cubus tertiædecimæ. (Lib. 9. Propos. 8.)

Tertia regula quarta quantitas, ut uisum est: est quadquad. Et quinta est relatum primum, quia 5 est numerus primus, & 7 est relatum secundum, quia est secundus numerus primus: & undecima tertium: & tertiadecima quartum: & decimaseptima quintum: & decimanona sextum: & uigesimatertia septimum & uigesimaquinta, quia est primus numerus præterquam ad quintam, ideò est relatum quintæ, quæ est relatum primum primæ, omnes ergo numeri primi sunt relata, alij omnes sunt ex natura cubi uel quadrati. Sed relata sunt inter se omnia diuersorum generum nisi uigesimũ quintum, quod est relatum primum primi relati, & quadragesimumnonum est relatum secundum relati secundi. Et ita centesimum uigesimum primum est relatum tertium tertij relati, reliqua, ut dixi, media inter hæc sunt sui generis.

Quarta

Quarta regula proposita quantitate ab uno in continua proportione, si uis scire cuius naturæ sit detracto uno considera, an possit diuidi per duo, est quadratum medietatis, & ita procedes diuidendo usque ad numerum primum, qui uel est 2, & erit ex genere quad quad. uel 3, & erit ex genere quadratorum cuborum, & similiter si fit 9, erit ex genere quadratorum cubi cubi. Et si proueniat alius numerus primus, ut 5.7.11.13. erit quadratum relati illius ordinis. Et si non potest diuidi numerus quantitatum per 2 uide, si possit diuidi per 3, tunc erit cubus illius quantitatis, & si illa quantitas, quæ prouenit ex diuisione: fuerit 3, uel potuerit diuidi per 3, erit cubus, uel cubus cubi, & ita deinceps. Si uerò sit alius numerus primus, ut 5. 7.11. erit cubus relati. Et ita si nõ possit diuidi per 2, nec per 3, erit ex genere relati. Et tunc si possit diuidi per alium numerum, ut 35, erit relatum ex eo genere. Vtpote trigesimaquinta quantitas est relatum secundum relati primi, seu relatum primum relati secundi. Nam quoties quantitas potest diuidi per duos numeros, dicetur sub utroque uicissim, ut duodecima potest diuidi per 4 & 3, ideò dicetur cubus quadquad. uel quadquad. cub. & per 2 & 6, & dicetur quadratum cubi quadrati, & quadratum cubicum quadrati ipsius proportionis, ad quam omnia referri debent.

Quinta regula ex præcedenti pendet, & est, quod denominationes, & proportiones uicissim commutantur: uelut 256 est quad quadquad, & inter quadquadquad, & quadquad sunt quatuor termini ipso computato, & inter quadquad, & quod uisi duo, ergo quadquadquad continet plures proportiones, & proportiones duplicatæ non constituunt quad: nam 64 continet duas duplas ad 16, non tamen est quadratum 16, ideo oportet diligenter animaduertere.

Sexta regula similiter ex dictis pendet, & est, quòd gratia exempli relatum primum comparatum ad primum terminum est sexta quantitas, cum autem comparatur ad rem, iam præsupponit proportionem. Exemplum relatum primum proportionis $\frac{21}{20}$ est $\frac{4034101}{3200000}$ & est aliquanto maior sexquiquarta, & si colligas terminos 100. 105. 110 $\frac{1}{4}$ 115 $\frac{61}{80}$ 121 $\frac{861}{1600}$ 127 $\frac{19681}{32000}$. Tu uides quòd sunt sex termini in utraque computando primum, sed in $\frac{21}{20}$ sunt duo termini, & in quadrato tres, & in quadrato quadrati per præcedentem, adduntur duo & ultimus scilicet sextus fit ex relato ipso. Ergo ultra proportionem sunt tantum quatuor termini.

Septima regula ad effugiendum omnes errores tu scis, quòd 4096 quadratum 64 est sextus a 64, ad quem habet proportionem quadrati, & 64 est similiter sextus ab uno illo scilicet non computato,

tato, & ita 64 habet rationem unius, & licet comparetur ad 2 rem, & sit sextus ab eo, eo computato 4096 autem à 64 sit septimus, tamen non est eadem ratio, quia 64 non est quadratum 2.

Propositio centesimatrigesimaseptima.

Rationem numerorum ex progressione declarare.

Michaël Stifelius rationem pulcherrimam tradidit ad inventionem numerorum, qui uocantur multiplicandi, & componitur hoc modo. Ex prima componitur 1 & 2, faciunt 3. 1, 2, 3 faciunt 6. 1, 2, 3, 4 faciunt 10, & ita prima tabula constituit secundam recta serie numerorum iunctis omnibus ab uno. Tertia fit ex secunda & tertia, primò assumitur 10 in tertia, ut in secunda, & ex 10 secundæ, & 10 tertiæ fit 20, & ex 15 secundæ, & 20 tertiæ fit 35, & ex 21 secundæ, & 35 tertiæ fit 56, & ex 28, & 56 fit 84. Et quanta fit ex tertia, & ex seipsa, primum assumendo 35 ex tertia, & ponitur pro primo numero quartæ, & ex 35 tertiæ, & 35 quartæ fit 70 numerus secundæ quartæ: & ita ex 56 & 70 fit 126, & ex 84, & 126, 210, & ita quinta ex quarta & seipsa, & sic in infinitum. Com. Primæ fui Arith.

1	2	3	4	5	6	7	8
1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1297	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Regula ergo est, quòd binarius seruit ℞ quadratæ, & quia nihil est in eius directo, solus ipse seruiet ℞ quadratæ. Ternarius autem cubicæ, & quia in eius directo est alter ternarius, ille etiam seruiet ℞ cubicæ. Quaternarius autem seruiet quadrato quadrati, & senarius, qui est in illius directo. Ergo quinarius seruiet ℞ relatæ primæ, & duo sequentes numeri scilicet 10 & 10, & eodem modo senarius numeri duo sequentes 15 & 20 seruient cubo quadrati, & ita etiam septenarius cum tribus sequentibus numeris 21, 35 & 35 seruient rel. secundi radici, & ita deinceps in infinitum.

Propositio centesimatrigesimaoctaua.

Modos usus horum numerorum declarare.

In quouis numero denominationis oportet tot addere 0, quotus est Com.

tus est ordo, & facere tot numeros sequentes, quotus est ordo, & semper minuere unam 0, uelut quia quadrata ℞ est prima ad 2 addemus 0, & fiet 20, nec alium quęremus numerum. Sed quia cubica est secundo loco, habebit prima nota 00, & fiet 300, & secundum 3 unam 0, & fiet 30, & in quadrato quadrati addemus 000 primo, & 00 secundo, & 0 tertio, & ita habebimus 4000.600.40. sed quia in tabula non est 4 ultimum, addemus similem primo semper. In relato primo, ergo habebimus 50000.10000.1000.50. & in cubo quadrati 600000.150000.20000.1500.60. Manifestum est, quòd his uice uersa assumpsimus 15 & 6 similes prioribus addendo semper ut dixi 0 minus, donec ad unam peruenerit. Et ita in relato secundo 7000000.2100000.350000.35000.2100.70. & ita deinceps.

Propositio centesimatrigesimanona.

Radices omnes à propositis numeris extrahere.

Co^m. Propositis quibusuis numeris utpotè 916132832, uolo detrahere ℞ relatam primam, primum habebo in tabula descripta relata prima numerorum simplicium usque ad 10 uelut in exemplo. Deinde subscribam punctum sub prima nota à dextra, & quia est quarta in ordine hoc, seu quinta denominatio secundum nostrum, omittam quatuor notas intermedias, & subscribam punctum aliud, & ita facerem si essent plures quàm decem notæ: relinquitur ergo ad pũctum primum à sinistra 9161, cuius quęro ℞ relatam primam in tabula, quam inuenio esse 6, nam 7776 eius relatum primum est ꝓximius ex minoribus ad 9161, detraho igitur 7776, ex numero propositio relinquitur. Deinde pono 6 & quadratum eius, & cub. & quadratum quadrati, quia, ut dixi, est quarta denominatio apud illum, & è regione numeros præcedentes inuentos relati primi ex præcedenti propositione: & duco singulos cum suis collateralibus, ut uides etiam in figura, et cum ultimo producto, scilicet 64800000 diuido 138532832 exit 2, huius accipio omnes numeros ad relatum primum usq; ut uides, & pono minores è regione maiorum, utpotè 2 è regione 1296 & 50000, & 4 è regione

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	32.	243.	1024.	3125.	7776.	16807.	32768.	59049.

916132832	
7776	.6.
138532832	
64800000	
	.2.

6	50	16	4800
36	1000	8	288000
216	10000	4	8640000
1296	50000	2	129600000
			32

138532832

ne 216 & 10000, & 8 è regione 36 & 10000, & 16 è regione 6, & 50, & duco 6 in 50 fit 300, duco in 16 fit 4800, duco 36 in 1000 fit 36000, duco 36 in 8 fit 288000, duco etiam 216 in 10000 & fit 2160000, & duco hos per 4 fit 8640000, duco rursus 1296 in 50000 fit 64800000, duco in 2 fit 129600000. Demum addo 32 relatum primum 2, & fit summa omnium 138532832, & ita habemus radicem relatam primam dicti numeri esse 62. Et si numerus productus fuisset maior oportuisset accipere proximo minorem. Inde per regulam sequentem addere minutias.

Propositio centesimaquadragesima.

Radices per numeros fractos determinare.

Duplex est modus, ut etiam docui in arithmeticis, scilicet ut pro radice quadrata addatur duo 0, & pro cuba tria, & pro quadrata quadrata quatuor, & pro relata prima quinque, & ita deinceps, & prę decimis semel, pro centesimis bis, pro millesimis ter, pro milliaribus seu partibus earum quater, pro centesimis millesimis quinquies, pro millesimis millesimarum sexies, & ita deinceps deinde per præcedentem detrahere radicem, & erit ualde exacta. Exemplo non utar, nisi quòd si uelles radicem relatam 16 ad millesimas, accipies radicem relatam numeri à latere propositi, & ita de alijs 1600000, 00000, 00000, & si uelles ℞ cub. 5 $\frac{1}{5}$ per millesimas, primo addes ter 000, & fiet 300000000, inde sume $\frac{1}{5}$ 1000000000, qui est 200000000, & adde ad 5000000000, fit 2500000000, & hoc quia unum refert numerum 1000000000 ex supposito & $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{5}$ unius. Conu.

Secundus modus est, ut accipias proximè maiorem, & multiplica in se, & detrahe numerum propositum, & residuum diuide per duplum radicis primo inuentæ, si fuerit quadrata, & per triplum quadrati eiusdem si fuerit cubica, & per quadruplum cubi, si fuerit quadrata quadrata, & per quincuplum quadrati quadrati, & quod exit detrahes ex priore radice, & rursus quod relinquitur, multiplica in se, & eodem modo agendo quod superest à numero proposito, diuide per duplum radicis prioris, si sit radix quadrata, uel per triplum quadrati si sit cubica, & quod exit rursus detrahe, & ita agendo, peruenies ad exactissimam radicem, exemplum uolo radicem quadratam 5 proxima maior est 3, quadratum 9, differentia 4, diuide per 6 duplum 3 exit $\frac{2}{3}$, detrahe ex 3 fit 2 $\frac{1}{3}$, quadratum est $\frac{49}{9}$ quod est 5 $\frac{4}{9}$, rursus diuido $\frac{4}{9}$ differentiam 5 $\frac{4}{9}$ & 5 per 4 $\frac{2}{3}$ duplum radicis primæ exit $\frac{2}{21}$, detrahe ex 2 $\frac{1}{3}$, relinquitur 2 $\frac{5}{21}$, radix satis propinqua, nam eius quadratum est 5 $\frac{4}{441}$, in cubica similiter uolo ℞ cu. 5, proxima maior est 2, cubus 8, differentia 3, diuide per triplum

quadrati 2 quod est 12 exit $\frac{1}{4}$ detrahe ex 2 fit $1\frac{3}{4}$ cuius cubus est $5\frac{23}{64}$ differentia est $\frac{23}{64}$ diuide per triplum quadrati $1\frac{3}{4}$ quod est $9\frac{3}{16}$ exit $\frac{23}{588}$ detrahe ex $1\frac{3}{4}$ relinquũtur $1\frac{107}{147}$ cuius cubus est $5\frac{504440}{3176523}$ Ita diuides hunc excessum si placet per triplum quadrati $1\frac{107}{147}$ & est fermè 9 exit $\frac{56050}{3176523}$ quasi detrahe ex $1\frac{107}{147}$ relinquuntur $\frac{323159}{453789}$.

Tertius modus est subtilior, tu scis, q̃d duodecima denominatio est quadrata sextę, & quadrata quad. tertiæ, & cuba quarti, quarta autem est inter tertiã & sextam secunda quantitas in continua proportione: ergo inuenta ℞ numeri propositi & ℞ radicis inuentæ reducã ad unam denominationem, et inter numeratores collocabo duas quantitates, quod facile erit sensim procedendo, & habebo ℞ cu. quæsitam, scilicet minorem ex duabus intermediis. Et similiter pro relata prima, capiam sexaginta denominationes, & scis, quod quintadecima est ℞ ℞ sexagesimę, & decima est ℞ cu. ℞ sexagesimę, & duodecima ℞ relata prima sexagesimæ per eandem inuenta, ergo ℞ numeri propositi tanquam ille sit sexagesima denominatio, inueniam illius radicis inuentæ ℞ quadratam, & cubicam, & quia duodecima quantitas quæ est ℞ relata prima numeri est secunda, quatuor intermediarum inter ponam inter ℞ quadratum, quadratum, & cubicam quadratam quatuor numeros in continua proportione, & secundus ex minoribus erit ℞ relata prima numeri propositi. Exemplum cubicæ uolo ℞ cu: 5 habui ℞ quadratam eius $2\frac{5}{21}$ sed uolo proximiorem diuidendo $\frac{4}{441}$ per 4, quod est fermè duplum $2\frac{5}{21}$ exit $\frac{1}{441}$ detraho ex $2\frac{5}{21}$ relinquitur ualde proxima ℞ 5. $2\frac{104}{441}$ huius igitur radix quadrata, primo inuenta est $1\frac{1}{2}$ secunda proximior est $1\frac{41}{84}$ reduco ad eandem denominationem fient $\frac{284}{9261}$ $2\frac{416}{1764}$ & $1\frac{861}{1764}$ inter 3944, & 2625, inueniemus duos numeros in continua proportione, ut uides, & erit secunda quantitas $\frac{3006}{7641}$, quod est $\frac{167}{98}$ proximum ad $1\frac{5}{7}$, ℞ cubica. 5. nã eius cubus est $5.\frac{13}{343}$ at exactissima est ergo $1\frac{69}{98}$. ut liquet.

2625	$\frac{3006}{1764}$	3944

Pro relata prima ergo ponamus, ut uelim ℞ relatam primã 25, accipio 5 ℞ 25 cuius ℞ est, ut uisum est, $2\frac{104}{441}$ similiter ℞ cu: 5 fuit $1\frac{69}{98}$ igitur reducam ad unam denominationem, & inueniam quatuor numeros in cõtinua proportione inter illos, & secundus post minimum ex illis erit ℞ relata prima propinquissima 25. Quomodo uero inueniantur facillimè illi termini, docui in sexto libro operis perfecti.

Quarta regula est utilior, licet minus uideatur nobilis, & est fundata in hoc, quod si a b sit maior c & eis addantur b e, & d f æquales dico, quod erit minor proportio a c a d c f, quàm a b ad c d, & ex consequenti per uiã fracti maior pars unius erit c f ip sius a e, quàm c d

c d ipsius a f ex Euclide. Dico ergo quod maior est proportio a b ad c d, quàm a e ad e f, fiat d g ad quam sit b c ut a b ad c d, critq; a e ad c g ut a b ad c d, minor autem est a e ad c f, quam a d c g, igitur minor a e ad c f quàm a b ad c d quod fuit propositum. Similiter si fuerint duæ quantitates, a b & c d, quarum a b sit maior c, c d autem eadem e minor, dico, quòd dimidium aggregati a b & c d maiorem habebit proportionem ad e, quàm c d & minor, nam iuncta b f æquali d e ad a b, ita ut f g sit dimidium totius a f, quia ergo f g est dimidium f a & f b est minor dimidio f a cum sit minor b a, & similiter f g est minor a b, quia a b est maior dimidio a f, quia est maior b f, ergo proportio g f ad e est maior quam b f ad e, ita quam c d ad e, & minor quàm a b ad e, quod fuit propositum. Quo uiso uolo ℞ 1000 quadratam, & quòd de quadrata dico, dico etiam de alijs radicibus & erit ex secunda regula harum $31\frac{39}{62}$ & quadratum erit 1000 $\frac{1521}{3844}$. Iuxta ergo primam partem regulæ $31\frac{38}{61}$ erit minus, & in ueritate in eo, quod fit ducendo, ut uides, & hoc est proximum ad $\frac{11}{160}$, multiplico igitur duplum $31\frac{39}{62}$, quod est fermè $63\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{160}$ fient $\frac{63\frac{1}{4}}{160\frac{1}{4}}$ detrahe ex $\frac{1521}{3844}$ hoc modo, diuide 3844 per 160 exit $24\frac{1}{40}$ diuide 1521 per 24, exit $63\frac{3}{8}$, habes igitur quod $\frac{1521}{3844}$ sunt $\frac{63}{160}$, igitur detracto $\frac{63}{160}$ ex $\frac{63}{160}$ nihil relinquitur, & erit ℞ exacta ualde 1000 hoc $31\frac{38}{61}$ cuius quadratum $1000\frac{41}{3421}$ uides breuitatem, & propinquitatem in producto differentia est $\frac{1}{100}$ aut parum maius quod ad radicem comparatum cum debeat diuidi per duplum eius erit paulo maius $\frac{1}{6300}$. Vnde facilior est, & breuior hæc uia quàm per 00 additus. Rursus uolo aliquid adimere & cum propinquitate ita facio. Considero quòd $31\frac{38}{61}$ est maius $\frac{1}{6300}$ radice, diuido 6300 per 62 exit 103 fermè, neq; enim curo in hoc fractiones, multiplico ergo 103 in $\frac{38}{61}$ & habeo $\frac{3914}{6283}$ hic denominator est proximus 6300, aufero ergo 1 ex 3914, habebo ualde proximam ℞ 1000, $31\frac{3913}{6283}$ cuius quadratum est 1000 minus $\frac{1}{1048}$ hoc ut dixi diuisum per duplum ℞ quod est 63 est omnino insensile in radice.

8. Propos. quinti Elem.

Per 18. quinti Elem.

Per 11. quinti Elem. amplificatæ.

Per 8. quinti Elem.

$\frac{38}{61}$	×	$\frac{39}{62}$
2379	——	2356
	$\frac{23}{3782}$	

Quinta regula est omnium pulcherrima, & est communis omnibus & fractis & integris & omnibus generibus radicum, & sit exemplum, uolo ℞ radicis suprascriptæ scilicet $31\frac{3913}{6283}$ multiplico 31 in 6283, & fit 194793, cui addo 3913, fit 198686 manifestum est igitur, quod $\frac{198686}{6283}$ æquiualet $31\frac{3913}{6283}$ hoc facto, quod est commune om-

nibus radicibus extrahendis pro radice quadrata, multiplicabo numeratorem, qui est 194686 per denominatorem, qui est 6283, & si uoluero radicem cubicam, multiplicabo eundem numeratorem per quadratum denominatoris, & si uoluero radicem radicis, multiplicabo per cubum, multiplicabo per quadratum quadratum 6283, & ita de alijs una diminutione minore, & eius qui prouenit numeri ℞ suprapośita denominatori erit ℞ eiusmodi, quam suscepisti, uelut in exemplo fuit numerus $\frac{198686}{6283}$ quia ergo uolo ℞ quad. multiplico 198686 in 6283, & fit 1248344138, huius accipio ℞ quad. quæ est 35332, hæc autem est diuidenda per 6283, & exeunt $5\frac{3917}{12566}$, ecce uides radicem exactam admodum, & facilem. Volo rursus ℞ quadrat. $5\frac{3917}{12566}$, multiplico 12566 per 5 & fit 62830, cui addo 3917, & fit 66747, cui suppono 12566 denominatorem, fient ergo $\frac{66747}{12566}$, manifestum est igitur quòd hoc æquiualet $5\frac{3917}{12566}$, si igitur multiplicarem denominatorem per denominatorem & numeratorem, quod proueniret, esset æquale eidem numero, ergo ℞ eius esset eadem cum ℞ prioris, sed ℞ denominatoris esset prior numerus, ergo sufficiet extrahere ℞ producti ex denominatore in numeratorem, & ita productum erit ex denominatore in numeratorem 838742802, cuius ℞ est 28961, hæc igitur diuisa per 12566 ostendit ℞ $2\frac{3802}{12566}$. In hac autem quadrata est alius modus sine multiplicatione, sed non est communis alijs, ubi statueris denominatorem pro denominatore ℞, utpotè 12566, & numeratorem 66747, constitues medium sensim augendo.

Rursus uolo ℞ relatam $2\frac{3829}{12566}$ reduco ad denominatorem, & fit ut prius $\frac{28961}{12566}$, duco igitur 12566 ad quad. quad. sed sufficiet in hoc casu deducere ad minores denominationes, utpotè diuide 28961 per 12566 exit $2\frac{3829}{12566}$ multiplico per 566 fit $1104\frac{5862}{12566}$, hoc detrahe ex 28961 habebis $\frac{27856}{12000}$, diuide igitur per 1000 habebis 12 & $27\frac{107}{125}$ at $\frac{103}{120}$ sunt $\frac{6}{7}$, igitur habes 12 pro denominatore, & $27\frac{6}{7}$ pro numeratore, quare erunt numeri $\frac{195}{84}$, erit ergo per hanc regulam, ut ducas 84 ad quad. quadrati, & fit 49787136, duc in 195 fit 9708491520, cuius ℞ relata prima est 99, igitur ℞ relata prima $2\frac{3829}{12566}$ est $1\frac{15}{84}$ paulo maior, id est $1\frac{13}{70}$. Et nota quod si denominator haberet ℞ illius generis, quam quæris, sufficeret inuenire radicem eiusdem generis absque alia numerorum multiplicatione.

Propositio centesimaquadragesimaprima.

Numeros fractos ad minores in eadẽ ꝓportione ualde ꝓpinqua (deducere.

Con. Cum plerunque numeri fracti habeantur per radices, ut aliquando maiores sint, aut minores eo sit, ut possint reduci ad minores numeros, ut melius intelligi possint & facilius tractari, & cum

cum hoc sit exactior illa pars exemplum, ergo habeo $2\frac{3829}{12566}$, quem uolo certa ratione ad minores diuisiones deducere. Deduco primò totum ad fractiones ducendo 2 in 12566, & addendo 3829, & fit $\frac{28961}{12566}$, multiplico 12566 per 9, quia proportio unius ad alterum est fermè, ut 9 ad 4, & fit 113094, multiplico 4 in 28961 fit 115844, hoc igitur est maius, igitur proportio 28961 ad 12566 est maior quàm 9 ad 4, detraho igitur 12566 ex 28961, relinquitur 16395, detraho 113094 ex 115844, relinquitur 2750, diuido 2750 per 16395 exit $\frac{55}{328}$ addo 2 denominatori fit $\frac{55}{330}$, quod est $\frac{1}{6}$, nam istæ additiones paruæ præter quod parum uariant quantitatem etiam dum ad examen reducuntur, nihil impediunt, detrahe igitur $\frac{1}{6}$ à $\frac{9}{4}$, & ducendo per 6, & detrahendo $\frac{53}{23}$, duco igitur primos numeros scilicet $\frac{28961}{12566}$ mutuo in $\frac{53}{23}$, fiunt 665998, & 666107, ita uides, quod proportio 53 ad 23 est paulo minor, quàm 28961 ad 12566, & æquiualent $2\frac{7}{23}$ & $2\frac{3829}{12566}$.

Propositio centesimaquadragesimasecunda.

Denominationum incrementa ex extrema cognita inuenire, & conuerso modo.

Quidã per usuram rediuiuã fecit 40000 coronatos ex 40 in 40 annis. Quero quãta fuerit usura, & quãdo habuit 1000 coronatos, quidã uellent soluere per regulam trium quantitatum, in qua committerentur maximi errores. Et in ea multi sunt modi, & omnes falsi præter hanc uiam nulla est uera, adde quòd uellent multi per sortem inuentam soluere augendo per singulos annos, quod adeò difficile esset, & penè foret impossibile. Ideò diuides 40000 per 40 numerum sortis exit 1000, igitur in 40 annis unum fit mille, sunt ergo 40 denominationes ab uno, quarum quadragesima est 1000, igitur uigesima est ℞ 1000 scilicet $31\frac{3013}{6283}$, igitur decima est ℞ eius $5\frac{3917}{12566}$ huius radix, erit quinta quantitas $2\frac{7}{23}$, cuius ℞ relata prima, erit proportio $1\frac{13}{70}$, cuius quadratum est $1\frac{1889}{4900}$ seu $1\frac{67}{165}$ pro secunda quantitate, duces ergo primam, quæ est $\frac{83}{70}$ in quintam, quæ est reducta ad minores fractiones facilitatis causa $\frac{53}{23}$, & habebis sextam quantitatem $2\frac{118}{161}$, duco etiam quintam quantitatem scilicet $\frac{53}{23}$ in secundam quæ est $\frac{232}{165}$, & fit septimi anni quantitas, duco igitur septem annorum numerum, qui est $3\frac{14}{61}$ in $31\frac{38}{61}$ fit $102\frac{992}{61835}$. At in sex annis additis ad uiginti, fit tanto minus, quanto $31\frac{38}{61}$ ductum in differentiam septem, & sex annorum quæ est $\frac{60}{121}$, fit ergo $15\frac{35}{402}$. Quia ergo an-

Co~. Per 136. Propos.

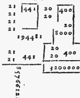
Anni	Aurei
1	$1\frac{13}{70}$
2	$1\frac{67}{165}$
5	$2\frac{7}{23}$
6	$2\frac{118}{161}$
7	$3\frac{14}{61}$
10	$5\frac{3917}{12566}$
20	$31\frac{38}{61}$
40	1000

nuatim folum ufura adijcitur forti, fufficiet diuidere 2 $\frac{992}{6283}$ per 15 $\frac{59}{498}$ fcilicet multiplicando per 12 numerum menfium 2 $\frac{992}{6283}$ fit 25 $\frac{5621}{6283}$ diuide 25 $\frac{5621}{6283}$ per 15 $\frac{55}{492}$, exit menfis unus, & dies 21, detrahe ex 27 annis, remanent anni 26, menfes 10, dies 9, in quo tempore habuit 4000 aureos coronatos. Vfura autem fuit ut uifum $\frac{13}{70}$, igitur per regulam trium duc 13 in 100 fit 1300, diuide 1300 per 70 exit 18 $\frac{4}{7}$ & tanta fuit pro centum. Et cum computaueris in tribus annis, acquirit modico plus beffe eius, quod habet. Et ita in 13 annis, & parua illa parte perueniet ad decuplum eius, quod habet, fcilicet 4000 aureorum, & habebit aureos 40000, ut propofitum eft.

SCHOLIVM.

In propofita proportione numeroq́ terminorum rediuiuam ufuram inuenire.

Sit gratia exempli, in fex annis ufura rediuiua uigefimæ, eritq́ue proportio $\frac{21}{20}$, cuius numeratorem fexies ducam in fe primum bis fit 441: ergo ducto 441 in fe fitq́ue 194481 ductum in 441 fit 85766121 fexies ductum 21, quinquies autem ducam 20 denominatorem in fe fit bis 400, ter 8000, quinquies ergo 3200000, diuide numeratorem per denominatorem abiectis quinq; notis erit 26 $\frac{2566121}{3200000}$. Quæ proportio eft proxima 26 $\frac{4}{5}$ ad 20, & ita ut 134 ad 100. Et fi pigeret tædij aut laboris poffes pro xij annis, ducere 134 in fe, & fit 17956 diuide per 100 eadem ratione, exit 179 $\frac{14}{25}$ & ita 100 in xij annis, fit tantundem. Et ita pro xviij & xx annis.

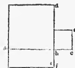


Propofitio centefimaquadragefimatertia.

Si linea in duas partes diuidatur, corpora, quæ fiunt ex una parte in alterius quadratum mutuò æqualia funt corpori, quod fit ex tota linea in fuperficiem unius partis in alteram.

Com. Sit a c diuifa in a b, b c quadratum a b fit a d, quadratũ b c, fit b e parallelogrammũ ex a b in b e, a f dico quòd corpora ex a b in b e, & b c in a d æqualia funt corpori ex a c in a f. Quia enim corpus ex a c in a f conftat ex a b in a f, & b c in a f, per primam fecundi Elementorum. corpus autem ex a b in a f eft æquale corpori ex b c in a d, & corpus ex b c in a f eft æquale corpori ex a b in b e igitur conftat propofitum.

Id eft per eius demonftrationem. Per 29. undecimi Elem.



Propo-

Propositio centesimaquadragesimaquarta.

Duplum cubi medietatis maius est aggregato corporum mutuorum cuiuslibet diuisionis, quantum est, quod fit ex tota in quadratum differentiæ.

Sit a b diuisa per æqualia in c, & per inæqualia in d, dico, quòd duplum cubi a c est maius aggregato corporum ex a d in quadratum b d, & b d in quadratum a c in eo quod fit ex a b in quadratum c d, nam per præcedentē duplum cubi a c est æquale corpori ex a b in quadratum a c: aggregatum quoque corporum ex a d in quadratum b d, & b d in quadratum a d est ęquale ei, quod fit ex a b in rectangulū ex a d in d b, quadratū autē a c est maius rectangulo a d in d b quadrato c d differentiæ, igitur duplum cubi a c excedit aggregatum corporū mutuorū in corpore ex a b in quadratum c d differentię, quod est propositū. Com. Per 5. secun di Element.

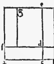
Propositio centesimaquadragesimaquinta.

Si linea in duas partes diuidatur quadrata ambarum partium detracto eo quod fit ex una parte in alteram, ęqualia sunt producto unius in alteram cum quadrato differentiæ.

Sit linea a c diuisa in b, & sit differentia a b, b c, b d, dico quod quadrata a b & b c detracto eo quod fit ex a b in b c, æqualia sunt producto a b in b c cum quadrato b d. Quoniam.n. quadrata a b, b c æqualia quadratis a d d b b c & productis ex a d in d b bis & quod fit ex a b in b c æquale est ei quod fit ex a d in se cum eo quod fit ex a d in d b, quia a d est ęqualis b c ideo quadrata a b & b c detracto eo quod fit ex a b in b c sunt æqualia quadratis a d d b, & producto a d in d b semel: a c quadratum a d cum producto a d in d b est æquale producto a b in a d, & ex consequenti in b c, igitur residuum quadratorum a b & b c detracto producti a b in b c est æquale a b in b c cum quadrato b d quod fuit propositum. Com. Per 4. secun di Elem. Per 1. secun di Elem.

Propositio centesimaquadragesimasexta.

Corpus quod fit ex linea diuisa in superficiem ęqualem quadratis ambarum partium detracta superficie unius partis in alterā, est æquale aggregato cuborum ambarū partiū.



Sic a b diuisa in c quadrata partium e f & b d detrahatur ex e f, f g æqualis a d, dico corpus ex a b in superficies b d, g æquale esse cubis a c & c b pariter acceptis, quia.n. ex a b in b d fiunt duo corpora cubus b d & corpus ex a d in quadratum d b hoc autem est æquale corpori ex b c in a d quia Com.

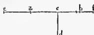
 fiunt

fiunt ex æqualibus lineis: at corpus quod fit ex a b in d g æquale est corporibus quæ fiunt ex a c, c b in superficiem d g at cubus a c continet duo corpora quę fiunt & a'c in d g & g f, igitur cubus a c superat productum ex a b in d g in producto ex a c in f g & superatur ab eo in producto ex b c in d g, superabatur etiam, ut uisum est, cubus b c à producto b a in d b in producto b c in cf, igitur cubi a c e b superantur à producto a b in ad in producto b c in c f & in d g, quare in producto b c in f e: si quidem f e & f g sunt æqualia ex supposito superant autem in producto ex c b in e f, igitur tantum est in in quo superantur quantum est id in quo superant: ergo sunt æqualia.

Propositio centesimaquadragesimaseptima.

Proposita linea diuisa duas ei lineas adijcere, ut proportio additarum singularum & partium simul iunctarum ad additas sit mutua.

Com. Sit linea a b diuisa in c uolo eius partibus addere lineas, ut propositum est, statuo mediam c d inter a e & c b quæ sit c d, & facio ut c d ad c a ita c a ad a e, & ut d c ad c b ita c b ad b f, quia ergo d e media est inter a c & c b, & ut c a ad a c ita d c b a d c b erunt omnes in continua proportione, quare proportio e c a d c a ut c f ad b f & e c a d e a ut c f ad c b quod est propositum.

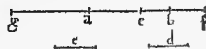


Per 13. sex ti Elem. Per 11. sex ti Element. Per 11. quinti Elem. Per 18. quinti Elem.

Propositio centesimaquadragesimaoctaua.

Propositis tribus lineis primam sic diuidere, ut adiectis duabus alijs lineis secundum rationem mutuam singularum singulis aggregatum ex una adiectarum & parte ad aggregatum ex alia parte & adiecta se habeat, ut secunda ad tertiam.

Com. Sit a, b, c, d, propositæ lineę, uolo diuidere a b ita in e ut sumpta secundum proportionem alicuius quantitatis, puta g a d a e sic b f a d e b & ut g a d e b sic g a a d a e ut sit proportio g e a d e f ut c a d d. Sint ergo omnia cõstituta & sit g rectangulum ex a e in e b, cum ergo g a contineat a e ut g contineat e b, g autem contineat c b secundum a c, igitur g a contineat a e secundum a c, ergo ex diffinitione quadrati a g est quadratum a c. Pari ratione b f est quadratum b e. proportio igitur g e a d e f cum sit ut c a d e ex supposito erit ut ipsi proportioni addamus, & detrahamus ex duplo a b & dimidium residui ducamus in se, & addamus aggregato quadrati ab cum ipsa ab,



Per 1. secun di Element.

ab, & latus eius detracto dimidio residui erit b c linea, quare diuisio nota, & est ut dicamus: uolo diuidere datam lineam, ut quantitates adiectæ sub mutua proportione ad unam tertiam cum partibus obtineant inter se proportionem datam.

Propositio centesimaquadragesimanona.

Datam lineam sic diuidere, ut proportio quadratorum ad duplum unius partis in alteram sit, ut lineę datæ ad lineam datam.

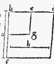
Sit data a b quam uolo diuidere, ut proponitur sub proportione c d ad d e, diuido a b bifariam in f, & abscindo g d æqualem d e, & inter c g residuũ & c e interpono ꝓportione, & ut h ad c g ita a f medietatis a b ad f k. Omnia ista sunt notissima ex primo & sexto Elementorũ Euclidis. Si ergo abscindantur f k ex f a, dico quod proportio quadratorum l k & k a ad duplum rectanguli a k in k b est ut c d ad d e. Quia .n. c e ad c g duplicata est ei quę est h ad c g, duplicata est etiã ei quæ est f a ad f k, quare ut quadrati a f ad f k, ita c e ad c g, igitur disiungendo c g ad g e ut residui quadrati k f ad residuum quadrati a f, quare c g ad g d ut quadrati k f ad dimidium residui quadrati a f, igitur coniunctim c d ad d g ut quadrati k f & dimidij residui quadrati a f ad ipsum dimidium residui. At uerò cum g d sit æqualis d e, erit c d ad d e ut quadrati k f cum dimidio residui sæpius dicti ad ipsum dimidium residui. Igitur etiam ut dupli quadrati k f cum residuo ad residuũ, sunt enim omnia duplicata. At duplũ quadrati k f cũ residuo est æquale quadratis a f & f k, igitur quadratorum a f & f k ad differentiam eorum proportio est ut c d ad d e, igitur dupli quadratorum a f & f k ad duplum differentiæ quadratorum a f & f k ut c d ad d e. Verum duplum quadratorum a f & f k æquatur quadratis b k & k a. Et duplum differentiæ quadratorum a f & f k est ęquale duplo producti b k in k a, igitur proportio quadratorum k b & k a ad duplũ producti k b in k a est ueluti c d ad d e, quod est propositum.

Com.

Per 9. secundi Elem.

Per 5. secundi Elem.

Propositio centesimaquinquagesima.



Propositis duabus lineis lineã communem utriq; adiungere, ut sit maioris ad additam proportio, uelut quadratorum minoris & adiectæ ad duplum unius in alteram.

Hæc est quasi conuersa præcedẽtis. Sit a maior, & b c minor, & fiat b d dupla b c, super quã erigatur b f æqualis a, & sit rectangulum d f & describatur quadratum b e quod sit b g residuę superficiei ad d f latus sit h, dico h esse lineam quæsitam. Superficies

Com.

cum

enim d f cum fiat ex a in duplum b c, dupla erit superficiei a in b c, superficies f d, tota æquatur quadratis h & b c, igitur quadrata h & b c dupla sunt superficiei a in b c, quod uerò fit ex a in duplum b c se habet ad id quod fit ex h in duplum b c, ut a ad h, cum per eandem lineam ducantur, igitur quod fit ex a in duplum b c, & sunt quadrata h & b c, se habent ad duplum h in b c, ut a ad h, quod fuit demonstrandum.

Propositio centesimaquinquagesimaprima.

Proportio differentiæ quadratorum partium, cuius suis lineæ ad quadratum differentiæ illarū est uelut totius lineę ad differentiam.

Co^m. Sit a b diuisa in puncto c, & fiat c d æqualis c b, manifestum est quod differentia partium est a d, dico proportionem differentiæ quadratorum a c & c b ad quadratum a d differentiæ partium esse ut a b ad a d. Quoniam differentia quadratorum a c & c b est, quod fit ex a d in d c bis cum quadrato a d, & ideò quod fit ex a d in d b cum quadrato a d, & ideò quod fit ex tota a b in a d. Igitur differentia quadratorum a c & c b est quod fit ex a b in a d, quare cum quadratum a d fiat ex a d in a d, erit proportio a b ad a d, uelut differentiæ quadratorum a c & b c ad quadratum a d differentiæ partium. Quod fuit propositum.

a d c b

Per 4. secundi Elem.
Per 3. secundi Elem.
Per 1. sexti Elem.

Propositio centesimaquinquagesimasecunda.

Si linea in duas partes æquales duasq́ inæquales diuidatur, fueritq́ proportio aggregati ex maiore & dimidio ad ipsam maiorem uelut ex minore, & aliqua linea ad ipsam minorem, & rursus aggregati ex minore dimidio ad ipsam minorem, uelut aggregati ex maiore & alia addita ad ipsam maiorem, erit proportio dimidij ad partem unam inæqualem, uelut alterius partis inæqualis ad suam additam mutuò, & etiam proportio additarum inuicem, uelut proportio partium inæqualium duplicata, & rursus ipsum dimidium lineæ assumptæ medium erit proportione inter additas. Demum proportio dimidij cum addita maiore ad dimidium cum addita minore, uelut maioris partis ad minorem.

Co^m. Sit proposita a b diuisa per æqualia in c per inæqualia in d, & sit ut addantur a g & b f, ita ut proportio c a, & a d ad a d sit ueluti f d ad d b, & c b & b d ad b d, uelut g d ad d a, & hæc est quarta secūdi Archimedis de sphera, & Cylindro: quia ergo a c & a d ad a d, ut f d ad d b erit a c ad a d, f b ad b d. Et similiter quia est c b & b d ad b d, uelut g d ad d a erit

g a c d b f
$6\frac{2}{3}$ 4 1 3 $2\frac{2}{5}$

c b ad

c b ad b d, uelut g a ad a d, & hoc est primum. Quia ergo c a est æqualis c b, erit c a ad b d, uelut g a ad a d, & iam fuit a d ad c a, ut b d ad f b, per conuersam igitur a d ad b d, ut g a ad a d, & ut b d ad f b, interpositis ergo a d & d b inter a g & b f cum composita sit proportio a g ad b f ex proportione a g ad a d, & ad d b, & d b ad b f, & proportio a d ad d b, sit æqualis proportioni a g ad a d, & d b ad b f, igitur proportio a g ad b f. Per demonstrata ab Alchindo est duplicata proportioni a d ad d b quod est secundum. Rursus quia ex primo demonstrato, uel eius conuerso proportio a d ad a c est uelut b d ad b f, & d b ad a c, ut a d ad a g, proportiones ergo a d & d b ad a c componunt proportionem producti a d in d b, quod sit h ad quadratum a c quod sit k, & similiter proportio b d ad b f & a d ad a g componunt proportionem producti ex b d in a d, quod sit l ad productum b f in a g, quod sit m, per demonstrata ab Euclide in sexto Elementorum, igitur proportio h ad k ut l ad m, sed h & l sunt æquales, quia producuntur ex eisdem, igitur per demonstrata in quinto Elementorum Euclidis, k est æquale m, ergo a c est media proportione inter b f & g a, quod est tertium. Quia uerò ex primo demonstrato est f b ad b d, ut a c ad a d, & c b ad idem b d, ut g a ad idem a d erit coniungendo f b & b c ad b d, ut coniungendo g a & a c ad a d, sed f b & b c componunt f c & g a, & a c componunt g c, igitur ut f c ad b d, ita g c ad a d, ergo permutando g c ad f c, ut a d ad b d, quod est quartum. in Prop. 23 Propos. 9.

a	g
a	d
d	b
b	f

a d	d b	h
a c	a c	k
b d	a d	l
b f	a g	m

f b	b d
a c	a d
c b	b d
g a	a d

Cum ergo punctum d fuerit datum, licet inuenire a g & b f, faciè, ut Archimedes præsupponit proportionem g d ad d f datam & quærit eam, quæ est a d ad d b, & peruenitur ad res numero triplo quadrati dimidij lineæ assumptæ æquales cubo & numero, qui sit ex duplo cubi dimidij in 1 m: ipsa proportione, & quod producitur diuiso per 1 p: ipsa proportione. Veluti posita a b 10, & proportione quam uolo g d ad d f sexcupla, duco 5 dimidium 10 in se fit 25, & triplico, fit 75 numerus rerum. Inde duco 5 idem dimidium ad cubum fit 125, duplico fit 250, duco in 5, qui est 1 m: proportione fit 1250, diuido per 7, qui est 1 p: proportione exit $178\frac{4}{7}$ numerus, qui cum cubo æquatur 75 rebus. Cum ergo constituta fuerit diuisio in c, non recipit proportionem g d ad f d quam uolueris, sed sequitur una sola ad illã, & est mirabile, quoniam lineę uidentur sumi liberè. Sed non est ita. Et etiã quia Archimedes uidetũ assumere aliã lineam, sed non inuestigat eam, imò ostendit eam ex assumptis. At Eutocius ostendit ambas, unã ex propria inuentione, aliam ex Diocle, sed

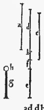
una

una est superflua, quia ut dixi, una sequitur ad aliam. Ex hoc patet cur Diocles assumpserit lineam unam, quæ est a c, quæ se habet ad a d, & d b, ut uicissim a d, & d b ad additas, quod est primum demonstratum. Sic enim omittit primum quod proponit Archimedes, & assumit quod proximum est: & ideò Archimedes non probat, nec præsupponit, quod à Diocle probatur, scilicet datum esse punctum d in linea a b, sed solum in linea g f, ideò cogitur probare secundum quod demonstratur ab Eutocio, & à nobis demonstratum est suprà. Archimedes aũt assumit lineã extra circulum, quã uocat b f, quæ est æqualis b c medietati: aliam assumit quam uocat b h, cuius proportio ad b d est sicut quadrati ad a d quadratum a b. Constat ergo quod proportio g d ad d f est data. Et similiter f g ad g d, & est, præ proportione data. Vnde notandum quod datum dicitur, simpliciter cognitum alio modo, dicitur datum positione, quod est certum & tale, uelut si quis dicat, diuide 10 in duos numeros quadratos: hoc non est datum, potest enim diuidi pluribus modis. At si dicas ut una pars sit alterius quadratũ, istud antequàm sciuntur partes, dicitur datum positione. Ergo datum positione est duplex, uel ut ratio nota sit, non autem quantitas, ut si dicam a b est dupla ad b c, utraque dicitur nota positione, quoniam nescio quanta sit a b. Vel si quantitas est nota proportio ignota sit, ut si a c sit 10, & sit, ut b c sit ℞ relata, a b erit punctus b, & proportio a b ad b c data positione, non tamen nota. Et si dicas igitur omnia, quæ habent determinationem erunt data positione? Dico quod non, quia oportet, ut illa determinatio comprehendatur sub una ratione, eaque saltem generaliter cognita.

Propositio centesimaquinquagesimatertia.

Vim quancunque manus multiplicare.

Com. Cum enim radimus aut trahimus manifestum est,
Per 37. quod ambabus manibus uis conduplicatur, & maior redditur, quanta est proportio totius ad excessum: uelut sit a quod mouetur ab una manu uiribus ut b, quæ sunt excessus b d supra a, cum ergo proportio c b d ad a sit composita ex proportionibus c & b d ad a manifestum est, quod erit producta ex proportione c b d ad b d, & b d ad a, sed c b d est dupla
Per 2. ad b d, quia c est æqualis, c igitur proportio c b d ad a est maior multo quàm duorum excessuum, qui mouerent in proportione dupla: uelut si adderemus f



ad d b

add b æqualem b, multo maior est ex communi animi sententia e f b d quã f b d, quia e continet f, & quantum est d insuper: cum ergo b cum d moueat a in proportione b d ad a & f cum d mouebit a in proportione eadem qua b d, ergo per uiam additionis duplo ue- locius, quàm dupla proportione, uerùm dupla comparatione ad proportionem b d ad a, non autem duplicata sed dupla, ut dixi, quę erit maior quàm dupla per additionẽ excessus. Ergo si addatur al- ter homo, erit dupla ad illam duplam, ueluti addendo æqualem d b f e, adeò ut si proportio d b f e esset quintupla, mouerent illi duo in proportione decupla. Sed annexo baculo aut lima aut serra annu- lo h, ita ut circunuolui possit h æquabit uires non solum d b f e sed multorum hominum, igitur multo plus aget homo ambabus ma- nibus radendo aut secando cum g, quàm quadrupla proportione unius manus, & hoc incrementum est non solum magnæ utilitatis, sed ualde accõmodatum in actionibus artificum operum grauiorum. Et huiusmodi conduplicatio est ratio limæ quam surdam uocamus.



Propositio centesimaquadragesimaquarta.

Si lineę datę alia linea adiungatur, ab extremitatibus autem pri- oris lineę duæ rectæ in unum punctum concurrant proportionem habentes quam media inter totam & adiectam, ad adiectam erit punctus concursus à puncto extremo lineæ adiectæ distans per li- neam mediam. Quòd si ab extremo alicuius lineæ æqualis mediæ seu peripheria circuli cuius semidiameter sit media linea duæ lineæ ad prædicta puncta producantur, ipsę erunt in proportione medię ad adiectam.

Hęc propositio est admirabilis: & etiam descripsi, ut multa secre- ta Dialecticæ potius aperirentur quam quod huic proposito multũ congrueret. Ideò potius scholij causa posita est quam ipsius tracta- tionis: ut modũ demonstrandi magis quam id, q̃d demonstrat, re- spicere oporteat. Constituatur ergo (per uiam problematis) linea a b & proportio c a d d, & fiat d e ad c, ut c a d d, & a b ad e ut b f ad d, & ut g ad e, critq; g media inter a f & f b, quod licet solum supponatur ab Apollonio, tamẽ facilè demonstratur & à Commandino adie- cta est demõstratio. Concurrant ergo ex a & b duę lineę in aliquod punctum, putat h ut sit a h ad h b uelut c ad d, dico quod si ducat h f quod ipsa erit æqualis g, ducatur b l æquidistans a h, & quia ex supposito a h ad h b, ut g ad b f, erit b h ad h a, ut b f ad g, & quia trianguli a h f & b l f sunt similes erit proportio a h ad b l, ueluti a f ad f b, igitur per ęquam proportionem b e h ad b l, ut a f ad g, & per ut a f ad g ita g ad b f ex supposito: & ut a f ad g, ita h a ad b b, ex suppo- sito

Com.
Per 29. primi, & 4. sexti Elem.
Per 22. quinti Elem.
Per 11. quinti Element.
Per 6. sexti Elem.

ſito igitur ut a h ad h b ita h b ad b l, ſed angulus a h b eſt æqualis angulo h b l, ergo triangulus a h b eſt ſimilis triangulo h b l, quare angulus b h l eſt æqualis angulo h a f, igitur duorum triangulorum f a h, & f b h duo anguli unius a & f ſunt æquales duobus angulis, alterius igitur proportio a f ad f h reſpicientium angulos æquales ut a h ad h b reſpicientium angulum f, ſed a h ad h b ut c ad d, ex ſuppoſito igitur a f ad f h, ut c ad d, ſed ut c ad d ita a f ad g, ex ſuppoſito ergo h f eſt æqualis g.

Per 32. primi, & 4. ſexti Element. Per 11. quinti Elem. Per 7. quinti Elem.

Coro. 1. Cum ergo hæc demonſtratio ſit ex ſenſu in uno puncto h, ideò ad quælibet puncta traduci poteſt, quæ potero imaginari, & ita prima uocabitur ſenſus, ſecũda imaginandi: Et quoniã in demonſtrando non aſſumimus aliquid, quod ſit proprium alicui puncto, niſi proportionem h a ad h b ſimilem eſſe c ad d, ideo hoc pertinet ad intellectum, & eſt tertium. Et idem dico ſi k eſſet ultra h quod poteſt contingere, modò k a ad k b ſit ut c ad d & k f ſit æqualis g idem ſequetur, & comprehenditur ſub tertio & pertinet ad intellectum, & quoniam demonſtratur quod punctum k ubicunque ſumatur, eſt in æquali diſtãtia à puncto f ſcilicet per g lineam, erit ſemper in peripheria circuli, & hoc poteſt eſſe in infinitis locis ſimpliciter & extra infinitum nihil eſt, igitur ſub hoc continetur conuerſum ſcilicet, quod a quolibet puncto circuli ductis lineis ad a & b ipſæ erunt in ꝓportione c ad d. Et ita abſque principijs Geometricis concluditur ꝓpoſitio Geometrica & hoc eſt περιλάμπειν & fermè ſummum intellectus humani. Et poteſt demonſtrari Geometricè duobus uerbis. Quia.n. ſupponitũ æqualis g eo quòd h eſt in peripheria circuli erit media inter a f & f b, quare cum angulus f ſit communis, erit proportio a h ad h b, laterum reſpicientium angulum f in utroque triangulo, uelut h f lateris in maiori ad f b latus in minori, quare cum ex ſuppoſito h f ad f b ſit ut c ad d, erit a ad b, ut c ad d. Et uides Apollonium, & Pappium quanta ſuperflua adijciant in hac ſecunda parte demonſtrationis, quæ eſt prima apud illos, & ducunt unã lineam non neceſſariam ex puncto b ad latus f h. Ut antiquorũ plerique non tantum potuerint Geometria & ingenio, quæ ferunt excellentiſsima in illis, quantum nos ex Dialectica περιλάμπειν inducentes. eſt enim ſingulare hoc exemplum.

Per 6. ſexti Elem. Per 4. eiuſdẽ. Per 11. ſex ti Elem. In primo Conicor. Apol. in Præfat.

Coro. 2. Ex hoc etiã patet quod ſi circulus duceretur ſecundum f k tranſiretque per m & n eſſet a m ad m b & a n ad b n, ut a h ad h b.

SCHOLIVM.

Ex hoc patet qualiter ex uera demonstratione sensu ostensa peruenimus ad quotquot imaginando, inde intellectu abiectis conditionibus non necessarijs facimus infinitum & uniuersale. Demum sine artis specialis auxilio ostendimus Theorema uniuersale (quod etiam poterat ostendi Geometricè, sed longè pulchrius est, ac sublimius per περιλαμπόσιν, qa hoc ipso infinita alia docemus generaliter per simplicem comprehēsionem ostendere) scilicet quod à quouis puncto periferię circuli, cuius semidiameter est media proportione inter totam extensam à centro usq; exterius, & partem quæ est à centro ad punctum descriptum sub proportione continua datarū linearum lineæ ductæ ex eo ad punctum exterius, & punctum descriptum sunt in proportione datarum linearum.

Propositio centesimaquinquagesimaquinta.

Quadratorū numerorū ꝓportionem & inuentionē cōsiderare.

Primùm oportet scire esse tres naturales numerorum series, primam Euclidis iuxta quamuis proportionē, in qua unum & tertius & quintus, & ita uno semper intermisso sunt quadrati. Primus quoq; 1. unum & quartus & septimus & ita duobus intermisis sunt cubi. In secundo ordine est naturalis series numerorum, ex qua colligitur alia, & ex illa bini quilibet se sequentes constituunt numerum quadratū. In tertia numeri impares, qui semper collati efficiunt quadratum.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.	Cor^m.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 329	Exemplū 1.
1. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{4}$. $3\frac{3}{8}$. $5\frac{13}{16}$.	
1. $1\frac{1}{3}$. $1\frac{7}{9}$. $2\frac{10}{27}$. $3\frac{13}{81}$.	

Sit ergo propositus numerus cui uelim addere quadratum numerum, ut fiat quadratus totus, accipe numerum quadratum minorem illo quem uis, & detrahe à proposito numero seu quadrato seu non residuum, diuide per duplum ℞ quadrati quod detraxisti, qd exit duc in se fiet quadratus numerus, idemq; additus numero proposito, faciet quadratum. Velut capio 16 qui est quadratus, aufero 9 quadratum minorē relinquitur 7, diuido per 6 duplum ℞ 9, exit $1\frac{1}{6}$ quadratum eius est $1\frac{13}{36}$ qui additus ad 16 facit $17\frac{13}{36}$ quadratū cuius ℞ est $4\frac{1}{6}$.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.	
1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45	Exemplū 2.
4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81	
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	Exemplū 3.
4. 9. 16. 25. 36. 49. 64.	

Ex hoc patet ꝓposito quouis numero q̃drato modus inueniendi infinitos numeros quadratos qui cū illo iuncti facient quadratū. Cor^m. 2.

SCHOLIVM.

Possem adducere demonstrationes omnium horū, sed redderetur res longa cū sint manifestę ex septimo octauo & nono Euclidis. Exemplum secundum capio modò 14 qui non est quadratus, aufero 9, remanet 5, diuido per 6 duplum ℞ 9 exit $\frac{5}{6}$ quadratū eius est $\frac{25}{36}$

 hic

hic additus ad 14 constituit $14\frac{25}{36}$ quadratum $3\frac{5}{6}$. Et ita 14 est differentia duorum quadratorum, scilicet $\frac{25}{36}$ & $14\frac{25}{36}$.

Coro, 2. Ex hoc habebis duo quadrata in datis terminis quæ different dato numero, & est pulchrum. Velut uolo duo quadrata quæ differant in 2, & ℞ minoris sit inter 1 & 2, tunc capies per regulam ipsam 2, & auferes numerũ quadratum ita quòd residuum diuisum per duplum radicis efficiat numerũ inter 1 & 2. Veluti capio $\frac{4}{9}$ quadratum, aufero ex 2, relinquitur $1\frac{5}{9}$ diuido per duplum $\frac{2}{3}$ radicis $\frac{4}{9}$ & est $1\frac{2}{3}$ & exit $1\frac{1}{6}$, & hic est minor numerus cuius quadratum est $1\frac{13}{36}$ cui si addantur 2, fient $3\frac{13}{36}$ numerus quadratus $1\frac{5}{6}$.

Cor. 3. Cum autem uolueris duo quadrata quæ differant in 100, tunc per regulam datam si auferes 1, peruenires ad numeros magnos & fractos, & ideo melius est quia numerus est par, ut detrahas numerum parem quadratum, ita quod residuum possit diuidi per duplũ radicis, ut in hoc non detraho neq; quia remanet impar, nec 16 quia 84 residuũ non pōt diuidi per 8 ita ut exeat integer numerus, ergo detrahã 4 & relinquẽt 96, diuido per duplũ radicis quod est 4 exit 24, cuius quadratum q̃d est 576 addito 100 facit 676 quadratũ 26. Et ita ex 433 non auferam sed 9, quia relinquetur 24 qui potest diuidi per se, duplum 129 & exit 4 cuius quadratũ est 16, addito 33 fit 49.

Secunda regula, cum uolueris proposito uno numero quadrato illum diuidere infinitis modis in duos numeros quadratos, cape quemuis numerum quadratum per primum exemplum regulę primæ, & cum eo diuide numerum propositum, & qui proueniet erit quadratus, hũc ergo duces in partes numeri quadrati quę sunt numeri q̃drati, & fient duo quadrati numeri, & illi componẽt numerũ quadratũ priorẽ quem diuisisti. quia multiplicatio fit per eosdẽ numeros qui sunt partes diuisoris. Velut uolo facere de 4 duas partes quę sint q̃drati numeri, capio numerũ q̃dratũ qui cōponat ex duobus q̃dratis, uelut 25, diuido 4 per 25 exit $\frac{4}{25}$ hũc duco p 9 & 16 q̃dratos numeros cōponentes 25 fiũt $1\frac{11}{25}$ & $2\frac{14}{25}$ q̃drati $1\frac{1}{5}$ & $1\frac{3}{5}$ Et hi q̃drati cōponunt 4. Et ita posses diuidere infinitis modis, puta per $17\frac{13}{36}$ & per 169. Tertia regula cum unus numerus additus primo & detractis a secũdo facit ambo quadrata, idẽ numerus coniunctus cum differentia illorum numerorum & detractus à primo & additus secundo facit eosdem numeros quadratos, ueluti capio 10 primum 3 secundum 6 additus ad 10 & detractus à 7 efficit 6 & 1 quadratos dico quod iunctus 16 cum 3 differentia 10 & 7 fit 9, qui detractus à 10 & additus ad 7 efficit 1 & 16 numeros quadratos priores.

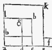
10	——	7
	3	
6		6
16		1
10		7
	9	
1		16

SCHO-

SCHOLIVM

Sunt & alij modi plures faciendi huiusmodi, sed nõ sunt adeò generales, & nihilominus sunt magis confusi, & non aliquid plus.

Quarta regula, cũ uolueris numerũ aliquem non quad. qui bifariã componat̃ ex duob. q̃d. uelut 10 ex 25, & 25 & 49 & 1, & sumat̃ a b numerus quad. diuisus in supplemẽta, ita ꝙ c d sit portio minor eiusmodi, ut adiecta illi æq̃li c d gnomo circũscriptus c k l cũ f q̃drato, sit ęq̃lis a b q̃drato, detractis igit̃ c e & e d, æq̃libus erunt duo supplemẽta e k l cũ f quadrato ęqualia duob. supplemẽtis a b cũ q̃drato h g. Maiora aũt supplemẽta excedũt minora in duplo quad. c d igit̃ detractis minoribus supplementis cõmunibus, erit duplũ quad. c d cũ f quadrato ęqualia h g q̃drato. Ergo ꝓposito numero, putà 3 ducam in se fit 9, ducã 2 minorẽ in se fit 4, duplicabo fit 8, detraho ex 9, relinquit̃ 1 numerus q̃dratus, igit̃ dicã q̊d 3 cũ duplo 2, & erit totũ 7, est unus numerus, alter ℞ 1. 1. 1, & horũ q̃d. cõponunt 50, duplũ q̃d. 5. Et similiter capio 6 q̃d. 36 duplũ q̃d. 4. 32 differentia 4, numerus q̃d. 2, ideo 6 cũ duplo 4, & est 14, est unus numerus, alter 2, quorũ q̃d. sunt 200, dimidiũ est 100 q̃d. 10 cõpositi ex 6 & 4. Et ita capio 9, q̃d. eius 81 duplũ q̃d. 6. 72 differentia 9 numerus q̃d. igit̃ cum duplo 6, & est 21, est unus illorũ, alter 3 q̃d. 450, duplũ 225 q̃d. 15, qui constat ex 9 & 6. Et ita capio 11 q̃d. cuius est 121, duplũ q̃d. 6 est 72 differentia, 72 & 21 est 49 numerus q̃d. 7, igit̃ 23 qui constat ex 11, & duplo 6 numeri minoris est unus numerus, alter est 7 q̃d. quorũ sunt 578. duplũ 289, q̃d. 17, qui constat ex 11 & 6. Quinta regula, per hoc inueniemus infinitos numeros q̃d. cõponentes 32, nam cũ 32 sit duplus q̃d. diuidã ꝑ unum aggregatũ ex inuentis puta 578, & quia ambo ex supposito sunt dupli ad q̃d. qui ꝓueniet erit q̃d. scilicet $\frac{16}{289}$, duc in numeros q̃dratos qui componunt 578, & sunt 529 & 49, & fient $2\frac{206}{289}$ & $29\frac{83}{289}$, & hi iuncti fiũt 32, quia sunt multiplicatæ partes numeri, per quem est diuisus numerus. Et ita poteris diuidere 32 in infinitos alios q̃d.



Sexta regula, ponamus modò q̊d uelim diuidere 10, cõpositũ ex duob. q̃d. 9 & 1, & non duplũ numero q̃d. ita q̊d sit diuisus in alios duos: ducã 10 in 25 cõpositũ ex duob. q̃d. fit $\frac{250}{25}$, at 250 cõponit̃ aliter ex duob. quad. q̃p $\frac{225}{25}$ & $\frac{25}{25}$, scilicet $\frac{169}{25}$ & $\frac{81}{25}$, id est $6\frac{19}{25}$ & $3\frac{6}{25}$, qui sunt q̃d. $2\frac{3}{5}$ & $1\frac{4}{5}$, & ita uolo diuidere 13 in duo alia q̃drata q̃p 9 & 4, duco 13 in 25 & fit $\frac{325}{25}$, qui necessario cõponit̃ ex $\frac{225}{25}$ & $\frac{100}{25}$, sed ego uolo q̊d cõponat̃ aliter, uelut ex $\frac{289}{25}$ & $\frac{36}{25}$, & ita ex $11\frac{14}{25}$ & $1\frac{11}{25}$, qui sunt numeri q̃d. componentes 13, & ℞ sunt $3\frac{2}{5}$ & $1\frac{1}{5}$, & in his opus est industria, scilicet ut multiplicet̃ per numeros q̃d. ut ꝓueniant numeri illi bifariã compositi ex q̃dratis. Vt uerò uideamus residuũ, ꝓponamus ꝙ uelim diuidere 6 in duos numeros q̃d, primũ scire debes q̊d non possunt esse

integri ex ratione dicta, quia oporteret ut essent ambo impares aut pares, & sic differrēt numero pari, ergo oporteret ut esset unus medius numerus q̄d. sunt & aliæ rationes, sed neq; unus posset esse integer, & alius fractus, nō esset.n.6 numerus integer: relinquitur ergo ut sint duo fracti. sed in numeris fractis q̄d. deductis ad minimas denominationes operū, ut tam denominator q̄ numerator habeat radices, ergo oportet q̄d hoc sit in illis, & quia iuncti debent facere integros 6, necesse est ut denominator sit unus, & idē in utroq;, et q̄d numeratores simul iuncti sint sexcuplū denominatoris, si fracti debēt æquipollere 6, ergo ille denominator cū sit q̄d. & numeratores ambo sint q̄d. & sint sexcuplū denominatoris, oportebit inuenire numerū q̄d. qui ductus in 6, faciat numerū qui cōponit̄ ex duob. q̄d. aut cōponit̄ æqualiter, ergo ꝓportio medietatis ad medietatē 6, est ueluti totius ad 6, sed totū continet 6 in q̄d. quia ex 6 in q̄d. fit totū, ergo ex medietate in q̄d. idem fit medietas, sed medietas est numerus q̄d. ergo 3 esset numerus q̄d. q̄d est falsum, oportet igit̄ ut numeri illi sint inæquales, & ut 6 diuidatur in duas partes inæquales, hoc aūt fit diuidendo quemlibet numerū parem, qui cōponit̄ ex duob. numeris q̄d. nam si esset impar, nō posset ꝓdire numerus integer, & cū ꝓuenerit numerus q̄d. ille erit quē quærimus, nā diuiso 6 per totum illū numerum, inde q̄d ꝓuenit multiplicato per numeros q̄d, cōponentes illum numerū ꝓductum, ꝓducunt̄ partes 6, quæ erūt numeri q̄d. quia denominator utriusq; partis ex supposito est numerus q̄dratus, qui multiplicatus est per 6, & numeratores sunt numeri q̄drati, qui cōponebant numerū productū, et tales partes æquant̄ 6, quia numerus ꝓductus componit̄ ex numeratoribus, & productū tale cōpositum ex 6 in denominatorē, & hic est diuisus per denominatorē, ergo ꝓuenit 6, si cū multiplicato 3 in 4 fit 12, diuiso 12 per 4, exit necessario idem 3. Pro colligendo ergo numeros omnes, qui cōponuntur ex q̄dratis, ꝓpones tibi seriem q̄d. omniū, & inde iunges, & diuides per 6, & cū prodierit q̄dratus, inuenit̄ denominator, & numeri cōponentes ipsum erunt numeratores, et suppositi denominatoribus cōstituent partes. Vt uerò cognoscas, ex quibus possit componi primum ex imparibus, non oportet assumere nisi 35, quia 7 diuisum per 6 relinquit 1, & 9 diuisum per 6, relinquit 3, & 35 diuisum per 6 relinquit 5. ergo non potest componi numerus impar, qui diuidatur per 6, ut supersit impar alius quàm 1.3.5. sed 1 & 3 & 5, & 5 componunt 4 & 1, & 1 & 3 & 5 componunt 2, scilicet abiecto 6, ergo tales numeri q̄drati si sint impares, uel ambo terminantur in 3, ut 9 & 81, qui faciunt 90, uel in 1 & 5, sed nullus numerus quadratus diuisus per 6 terminatur in 5, quia 1 ductum in se producit 1, & 3 producit 3, & 5 producit 1, ut 5 in 5 facit 25, & 11 in 11 produ-
cit

cit 121, quibus diuisis per 6 superest 1. Quod etiam sic demonstratur de 5, & compositis à 5, nam diuiso 5 in 3 & 2, quadratum eius cõponitur ex duplo 3 in 2, in quo nihil superest, si diuidatur per 6, & ex quadrato 3, quod est 9, in quo superest 3, & ex quadrato 2 quod est 4, sed iunctis 4 & 3, & abiecto 6 superest 1, ergo 5 in 5 ductũ, & diuiso producto relinquitur 1. Et similiter capio 17, et componit ex 12 & 5 quadratum, ergo 17 componitur ex quadrato 12, in quo nihil superest, & duplo 5 in 12, in quo etiã nihil superest, si diuidatur per 6: & ex quadrato 5, in quo superest 1, ergo in nullo numero cõposito ex 5 & 6, uel compositis ex 6, poterit produci numerus, qui diuisus per 6 relinquat 5, igitur neq; talis numerus poterit cõponi ex duobus quadratis, in quib. supersit 5 & 1, quia nullus est, in quo supersit 5 facta diuisione per 6. Ex quo colligitur una regula: quod si quis dicat multiplicaui 27 in se, et diuisi per 13, uellem scire quid superest, dico quod sine multiplicatione et diuisione poteris hoc scire ex demonstratione dicta, diuide ergo 27 per 13, & relinquitur 1, duc in se fit 1: dices ergo, quod supererit 1, & ita si ducerem 28 in se, & diuiderem per 11, dico quod supererit 3, nam diuiso 28 per 11, relinquitur 6, duc in 6 fit 36, diuide per 11, relinquitur 3, ut dictum est, & tantum relinquit ducto 28 in se & fit 784, & diuiso per 11. Reuertendo ergo ad propositum, patet quod ex duobus tantum numeris imparibus quadratis potest conflari ille numerus, quorũ radices diuisæ per 6 relinquunt 3. Sed de paribus uel superest 2 uel 4 uel nihil, sed q̃dratum 2 est 4, & q̃dratum 4 diuisum per 6 etiam relinquit 4, ergo neq; ex duobus numeris, in quibus supersint 2, neq; in quibus supersint 4, neq; in quibus supersint in uno 2, in altero 4 poterũt quadrata, in quibus semper superest 4, & iuncta faciunt 8, in q̃ superest 2, cõflare numerũ dictũ seu quæsitũ, qui possit diuidi p̃ 6: neq; ex q̃d. duorũ numerorũ, in quorũ altero nihil supersit in reliquo supersit 2 uel 4, quia in aggregato q̃dratorũ semper supererit 4. Ergo relinquitur quod ille numerus componetur ex duobus quadratis, uel imparibus, quorum latera diuisa per 6 relinquunt 3, uel ex duobus paribus, quorum latera diuisa per 6 nihil relinquant. Oportet igitur inuenire duos tales numeros quadratos numerorum imparium, in quibus superest 3, si diuidantur per 6, aut parium in quibus nihil superest, quorum aggregato diuiso per 6 prodeat numerus q̃dratus. Per 4. secun di Elem.

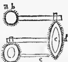
His uisis dico, quod constat radices talium numerorum oportere esse in imparibus per additionem 6 incipiendo à 3, ut sint 3. 9. 15. 21. 27. 33. 39. 45. 51. & sic deinceps: in paribus autem per additionem eiusdem 6 incipiendo à 6, uelut 6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. Dico ergo quod diuiso numero illo composito per 6 in imparibus exibit numerus,

N 4 qui

qui diuisus per 6 supererit 3, & in paribus qui poterit diuidi per 6. Quia componunt ex huiusmodi. uelut 3 in se facit 9, & 25 in se facit 225, qui iũcti faciũt 234, diuiso 235 per 6 exit 39, qui iterũ diuisus p 6 superest 3, & similiter capio 6 & 12, quorũ q̃drata sunt 36 & 144, & aggregatũ 180, qui diuisus per 6 exit 30, qui iterũ potest diuidi per 6. Et hoc quia quilibet illorũ potest diuidi per q̃dratũ 6 in paribus, ergo aggregato diuiso per 6 q̃d prodit, iterũ poterit diuidi per 6. Et in imparibus quodlibet q̃dratorũ exuperat supra senarios in 3, igit̃ aggregatũ diuisum in 2 pariet numerũ qui diuisus per 3, exibit numerus impar cõpositus ex senarĳs & 3. Illud ergo quadratũ, q̃d ꝓdibit, uel erit cõpositum ex senarĳs, uel supererit 3. Sed cũ 3 nume-
Per 29. se- ret 6, ergo tres q̃drati numeri scilicet duo, qui cõponunt numerũ,
ptimi elem. & qui ꝓdit per diuisionẽ 6, erunt cõpositi inter se, ergo & radices il lorum. Igit̃ radix numeri q̃drati, qui ꝓuenit diuiso aggregato qua- dratorũ per 6 est ex codẽ ordine impariũ, si impares numeri q̃drati fuerũt, aut pariũ si pares. At hoc esse nõ potest, nã fracti illi numeri, qui erũt radices, nõ erũt minimi, sed diuisi per 3 ostendent minores, quod est contra suppositum, quare nullo modo 6 potest diuidi in duos numeros quadratos, neq̧ integros, neque fractos, quod erat demonstrandum. Habes igitur ex hoc demonstrationem quando nõ possit diuidi, & quãdo possit, quod possit, & quomodo simul.

Propositio centesimaquinquagesimasexta.

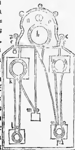
Horologiorum tempus multiplicare.



Cõm. Contingit quandoq̧ q̃d horologiorũ tem pus breue est, uolumus aũt maius efficere: id duob. modis possumus, quorũ unus diffici- lior est sed perpetuus, & longe nobilior, nam grauitas ponderis uersatilis efficit quidẽ tar- diorẽ, sed difficilius mobilẽ, & ob id grauio- re põdere indigentẽ. Sit ergo rota a b uersati- lis, quæ certam mensuram exigit ꝓ quacunq̧ funis parte correspon dentis uni denti ex centum, in quos distincta sit, curriculum aũt e d quinq̧ dentiũ, per q̃d rota sexaginta dentes habẽs circumuolnat̃ in cõuersione, igit̃ primę rotę uices circumferet, secũda dẽtes q̧ M. cc. rursus ad hãc secundã tertia nectat̃ cum curriculo sex dentiũ, atq̧ in ea dẽtes septuaginta duo, ut in una cõuersione sint xiiĳcccc, dentes igit̃ tot dentes in una cõuersione primę rotę circumuoluentur. Iam uerò tempus illud poterit duplicari ac triplicari iuxta tarditatẽ tem poris uersatilis: quãto igit̃ ponderosius fuerit illud tẽpus, tanto tar- dius mouebit̃, paucioresq̧ circumuolutiones necessariẹ erũt ad ex- plẽdam unam diẽ:id est horas 24, sed hoc incõmodi accedet, quòd reuolutio indicis tanto tardior erit, ut nõ iuste ostendat horas: pro- positum

positum igitur est, ut pondera tardius ferantur, index aũt, & quę ad indicem sequuntur horarum demonstrationes celerius aut eodem modo ferantur. Ponamus ergo postq̃ eadem est ratio celerioris & æquè uelocis, ponderis aũt tardius descendentis, aut cõtrà tardioris, aut æqualiter circumducti indicis, celerioris aũt descensus ponderis, quod ad nullam utilitatẽ profuturum uideo. Sit ergo ut pondus uelim tardius descendere, rotam aũt ęqualiter circumferri, dico quod ex tempore mobili seu uersatili (& est ferrum, quod in summo horologij citra ultraq̃ ferĩ tam in horologijs ponderum q̃ molæ) id fieri non potest: nam quantum tardabitur rota tertia secunda & prima, atq; ob id descensus ponderum, tantum remorabitur rota prima quæ indicem ostendit, ergo tantum index tardabitur quantum põdera, & ut uno uerbo dicam, cùm eadẽ rota index circumferatur, & põdus descendat, quantũ unum tardatur tantum & aliud.

Secundus modus est, ut rota una totum tempus cum indice in uigintiquatuor horis circumuoluatur, & currulis in quo funis minor fiat: necesse est igiĩ, ut circumuoluta rota aut semel aut bis, ter, quater decies, & circumuoluaĩ pleno circuitu index, et sine errore: quoniam tempus & dentes mensuræ respondent: igitur sub eisdem circuitibus numero eodemq; tempore minus ex fune descendẽt in curruli paruo q̃ magno: quare mutatione indiget currulis, aut ut funis circumuoluens rotam curriculum habeat annexũ rotæ ostendenti horas, in qua pauciores sint dentes: nam in eodem tempore, & circuitu paucioribus uicibus circumuoluitur rota funis quæ grauitate temporis, & multitudine dentiũ certam seruabit mensurã. Sed in hoc necesse est grauius efficere pondus, aut leuius tẽpus quoniã funis debilius circumuertit rotã: minus tñ tardè q̃ sit ꝓ paruitatis circuitus ratione.



Tertius modus facilior est, & magis compendiosus: Sit horologium a b c, in quo rota d quæ funem cõtinet basis horologij e f, cui firmiter sint appẽsę duę trochleę g & h, & funis una parte trochleę appensus in k, ducaĩ ad inferiorem aliam trochleam l inseraturq; ibi orbiculo suo, & redeat à dextra superius inseratq; orbiculo superioris trochleę, deducatq; uersus sinistrã: atq; ibi descendẽs habeat põdus tractorium in m, deducatq; supra rotã horologij d, et circumuolutus exeat ipsum, & descẽdat ad trochleã n, subq; ea circumuolutus iterũ ascendat

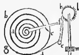
dat

dat à dextra parte, et circumuoluatur h eo chleę rediens ad sinistram ibiq; descendens connectatur trochleæ in inferiori in o, cuius imæ parti annectatur pondus remorans in imo annexum parte trochleæ p. Cum ergo trahitur n trochlea, trahitur funis adeò ut pondus m, tandem ascendat cum trochlea l prope k: quia ergo in duodecim horis pondus m descenderet per k l funem reuolutionibus circa d rotam dicamus uiginti, ergo si debet descendere à k ad l, per funem duplicatam k l cum ipsam necesse sit obequitantem d reuolutionibus quadraginta circumuolui d, nam tota o h n d m g l k l o n gè maior est duplo k l, necesse est m descendere tardius quàm in du plo temporis, quo descenderet per rectum funem k l, quod erat demonstrandum. Et hanc appendicem uidi apud Cæsarem Odonum Apulum medicum, uirum elegantem lepidiq; ingenij. Memento uerò quod ubi orbiculi non cederent funi, uel quia duriores in circumuolutione, uel quia latius exciperent illum reduplicato fune circa illos omnino circumducuntur, sed difficilius ideò egent grauiori pondere.

Propositio centesimaquinquagesimaseptima.

Horologiorum molarium rationem ostendere.

Com. Sunt horum duo genera primum, & antiquius licet multo posterius eo quod ponderibus ducitur, quod funiculo ex intestinis ouium seu fidibus lyræ agitur. Sit igitur axis f k erectus super plano, cui per longum coniuncta mola multiplicis spiræ in fine, cu



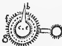
ius c annectatur ferreo circulo, qui habeatur loco capsulæ b c, quæ circumuolui possit: huic circūductus funis d e multipliciter in pun cto g, sit autem e h in modum pyramidis sensim in acutum, sed non ualde per spirā exculptam desinentis, cui rota in uertice inserta den ticulo, & uertatur h e, colligens funiculum tractum in spira uersus apicem: unde funiculus circumuoluet b g d, capsulā uersus e, trahet ergo molam, & constringet uiolenter quātum fert longitudo funis quæ circumuolui potest a b e ad h: & cum trahitur in d e i emittitur, non potest mola statim retrahere reluctantibus denticulis h l rotæ, & alijs quæ implicantur curriculo m, a igitur mola constructa uiolenter mouet b g d, capsulam motu contrario à c in d & in g & in b, quare funis d e trahitur, & trahit e h illum circumuoluendo contrario motu priori, is mouet denticulo rotam h l, illa per curriculum in aliam rotā, & sic deinceps donec tempus moueatur, & rota indicis. Hic adest capsula, & quod circumuertitur à claue non est axis molę sed extra molam, scilicet e h. Et quoniam hac ratione quanto mola a magis

magis explicabit, tanto lentius trahet, & uertet e h, ideo hoc ex structura auxilium præstatur, ut funis in inferiore parte cōplexus latiores orbes, & è regione tanto uehementius uertat e h: & ita uis quæ remittitur ob molæ laxitatem, augetur tantundem ob situm & magnitudinem spirarum ut distantiorum sua extremitate ab hypomochlio, quod est axis coni e h, seu instar axis.

Alterum genus horologiorum cum mola sine fune loco capsulę habet rotā plano substratam, plenam denticulis axis, quo circumagitur uiolenter, non est extra molam, sed ei annexa est mola intus, exterius aūt rotę: ergo circumducto axe molę uim patitur circulus exterior, sed non mouet, quoniam clauo impedit. Vbi mola quantum decet constricta est sublato clauo statim secum trahit rotam, & illa curriculū rotasq; alias, & tempus agitur, & index uertitur. Sed in hoc idem est incommodum sine remedio quod fuit in priore. Vbi enim cœperit laxari mola tanto tardius progrediuntur rotæ atq; index. Veluti axis a b cui secundum longitudinem molæ caput interius annexum est altero circulo rotæ in c d curriculum rotæ e, implexum rotæ f clauus rotam retinens, donec circumducto a b mola constringatur, & latus eius trahat rotam ex c. Inde sublato clauo circulus, seu rota trahitur ex c in g, & in sa mola, quæ etiam secundum eandem partem circumuoluta est: igitur d circumagetur à rota & reliqua. Sed ut dixi constructio hæc non satisfacit.



Aliam ergo oportuit excogitare quę huiusmodi est. Sub axe a b, qui circumuertitur ad molam contrahendam rotam, collocant par uam quæ est, ut ita dicam, pars axis ima cui inseruntur dentes in ambitu ea ratione, ut dum mola tenditur, premant denticulos interiores, atque ita elabitur, totiesq; circumducitur manente g f, donec colligatur mola, quæ non ut in priore reliquo extremo ulli rotæ affixa est, sed columnæ in continenti opercula horologij. Cum ergo mola tenta retrahat axem a b contrario motu, & ille rotam mobilem, quæ cum non possit regredi propter auersos dentes, mouet rotam f g contrario motu, quæ circumacta per denticulos suos curriculum agit, & reliqua omnia necessaria. Cur autem cum laxatur mola, & uertit lentius c e rotam coniunctam, ideoq; g f, & reliqua omnia nō tardetur tempus, & circumuolutio



lutio indicis causa est alia longè quàm in priore, nam mola longior fit crassior, & durior adeoq; robusta, & rotæ leues, ac tempus dum laxata fuerit munus suum iusto in tempore obeant: quare necesse est, ut ab initio uehementius agat, & celerius rotam cum axe qui trahitur à mola. Ergo excogitarunt aliud genus retinaculi forma cochleæ quod ab initio moratur uehemēter axem ne circumagatur, et quanto magis mola explicatur eo minus retinet impetū illius, adeo ut uehementer retineat uehementem concitationem mediocriter moderatam, segniter lentam, nullo modo iustam: ita fit, ut semper fermè æqualiter moueatur. Difficile est tamen ad unguem seruare moderationem, & æqualitatem, & magis etiam in his horologijs, quæ uno circuitu molæ tempus lōgius exigunt: at difficilius etiam efficere molam, quæ longo tempore duret, cum intenta ualde celerius moueat rotas, & ob id breui absoluat circuitum, mollior autem citò remittatur. Et ob id longior & non adeò dura melior est. Ratio autem cochleæ ita se habet. Circa axem molæ d deducitur cochlea a b c, quæ dum laxatur mola cochlea mouetur ex b in c, atq; ita pariter laxatur uis cochleæ retinentis axem.

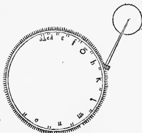


Propositio centesimaquinquagesimaoctaua.

Rationem indicis mobilis cum rota horarum numerus per ictus indicatur explicare.

Com. Hoc fieri potest in singulo genere horologij trium descriptorū. Propterea sufficiat de uno ostendisse. Sed & in singulo genere sunt multi modi, unius tamen reddidisse rationē sufficiat. Hoc aūt quatuor habet difficultates: prima ut horarum ictus conueniant cum indice: secunda ut conuerso indice conuertatur, & rota ictuum: tertia ut ictuum numerus cum numero indicis conueniat. Vnde multa sunt horologia, in quibus ictus unus solum auditur singulis horis, atq; hic modus facilis est: quarta cur in horum plerisque si non pulsata statim hora transferatur index, non cessat pulsatio: imò nec retineri potest, donec pondus illud descenderit. Ergo primi & tertij ratio hæc habeatur, cum rota quę indicis rotam circumagit, peruenerit ad horæ finem, denticulo soluit aliam, eleuans obicem, illa mouetur à pondere proprio alio, scilicet ab illo quod tempus agit: aut si sit horologium molæ à mola alia propria, quæ malleos circumacta perpetuò mouet, atq; motura esset semper, donec pondus ad terram descenderet: uerum dum mouetur descendit ferrum pro quouis ictu quod in rotæ limbum incidit, & donec inciderit in eam partem quæ lenis est dilabitur, nec retinetur, & ita eleuatur rursus, at uerò

at uerò cum in concauam partem incidit retineri necesse est: atq; ita pondus non amplius descendit, rota sistitur, malleus manet immobilis: spatia ergo quæ sunt inter cauitates sunt secundum magnitudinem proportionis numerorum horarū, uel ad sex, uel ad duodecim, uel ad uiginti quatuor terminantium. Ita quod, gratia exempli, sit iam in cauitate a duodecimę horæ uncus, diuidam circulum totum in duas partes æquales, quia in singulis medietatibus propositum est, duodecim facere cauitates, p unco retinendo. Et quia in unaquaq; medietate oportet, ut pulsent ho



ræ lxxviij, & præterea sint ibi sex spatia cauitatum, quarum singulæ contineant, gratia exempli, duo spatia unius ictus, ut certius retineatur uncus, erūt igitur spatia omnia nonaginta: diuidemus ergo medietatem circuli utranq; in nonaginta partes æquales incipiendo ab a, & dabimus b primæ horę quod spatium est unius tantum partis ex nonaginta, post describemus c cauitatem duarum partium, ita ubi ictum unum dederit uncus, retinebitur in c, pòst accipiemus duo spatia, & sint significata d litera, post quę faciemus cauitatem e: & ita uncus bis cadet in d, & pulsabunt duo ictus, & pòst retinebitur uncus in e. Et post accipiam spatium trium partium, quod sit f, & post describam cauitatem g duarum partium, atq; ita procedam usq; ad duodecim.

Ex quo manifestum est pondus quod agit rotam uolæ non descendere, nisi dum horæ pulsant, secus quiescere. Cor^m. 1.

Secundum, quòd descendit illud pondus plus & minus, iuxta proportionem numeri horarum, ita quod quando pulsabit una hora parum ualde descendet, cum sex horæ sexcuplo magis, cum duodecim adhuc longè magis, id est duplo plus quàm cum pulsant sex horæ. Cor^m. 2.

Secunda constructio hanc habet rationem: Cum n rota indicis coniuncta fuerit rotæ, quæ transfert malleum, necesse est ut unà ferantur:

O rantur:

rantur: quinimò illud magis mirum de quo illi non mirantur quia frequens est, scilicet cur aut quomodo si diuisæ sunt ut circũducto indice non transferatur rota mallei, põdere tamen uersata rota indicis in idem incidat, ut horæ quæ pulsu declarantur ad unguem & in eisdem sectionibus cõueniant cum horis quas index ostendit.

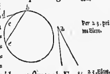
Verum quia multis modis contingit ordinem horologiorum peruerti: in similibus quidem si hora indicis simul & pulsus unà circumferuntur, sed tardius ambo index traducitur ad locum debitum, inde ponderi aliquid additur. Si uerò antè processerit quam Sol indicet ablato pondere, sines tempus fluere usq; ad indicis locum fine motu horologij, pondus quoq; ipsum minues. At si pondus pulsus in terram deuenerit uel propè, expecta donec super linea index fuerit, inde trahe, neq; n. excurret: nam si dum index est in medio horæ aut propè, traxeris pondus pulsus, non desinet descendere, pulsabuntque horæ donec ad terram pondus deuenerit, quòd si iam in errorem incideris pulsentq; horę & descendat, pondus, sensim deducito indicem, cum. n. ad finem horę peruenerit initiumq; sequentis, quoniam ferrum in interuallum deuenerit rota & pondus firmabitur. Inde sublato põdere donec Sol ad horã quam index monstrat peruenerit, reddes pondus horologio. Si ergo horam pulsu candẽ declarat quam index, bene est, si non, paululũ uirgulã eleua quę est iuxta fores horologij pulsabitq; sequens hora, id uerò toties repetes immoto in dies & sublato, si ueteris ne extra interuallũ ferrum feratur, & ob id excurrat rota pulsus horarũ, donec hora pulset quæ cum indice conuenit, statimq; pondus quo horæ pulsant sursum retrahes. His quinque regulis usum disces similium horologiorum, unumquodq; autem proprias habet: sed duæ primæ omni horologiæ satisfaciunt. Quòd si hæ non satisfaciunt iam horologium laborat: tum uerò illud dissoluere oportet & detergere & inungere, iuuat autem uel capsula uel linteo perpetuo puluerem ab illo arcere. Quòd si nec sic restituitur necesse est dissoluere & antea considerare impedimentum, pòst denticulum qui laborat, plerunq; n. aliquem inuenies huius modi, quem lima aut alia ratione restitues, semper autem hi fermè restituuntur: at qui mola aguntur præter rotarum & axium & indicum labores, molæ etiam inæqualitati & defectibus subiciuntur, qui si nimis uelociter agunt rotas cum difficultate restituuntur moderationi, si lentius rarò uel nunquam emendantur, uix etiam noua inducta mola.

Propositio centesimaquinquagesimanona.

Nullus angulus rectilineus æqualis esse potest alicui angulo contento recta & circuli portione.

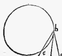
Sit

Sit angulus a & circulus b c, dico non posse aliquem angulum contentum recta & circuli portione esse illi æqualem. si enim esse posit, sit c b e. ducatur recta b d faciens rectilineum d b c equalem a, erit igitur d b c equalis e b c per communem animi sententiam, seu ergo b d cadat intra circulum seu extra, erit pars equalis toti quod esse non potest. Sed neq; potest cadere recta super b e. nam id est contra demonstrata ab Euclide. At si sit angulus c b e exterior similiter producta b d, seu intus, seu extra cadat, pars erit æqualis toti quod esse non potest. Com. Per 23. primi Elem. 23. Elem.



Ex hoc patet quod nullus angulus peripheria circuli & recta cõtentus potest esse æqualis recto, quia rectus etiam rectilineus est. Corm. 1.

Et rursus nullus angulus peripheria & recta contentus à recta linea per æqualia diuidi potest, patet quia una pars esset angulus rectilineus, alia contentus recta & peripheria: isti autẽ non possunt esse æquales, quare nec prior potuit per æqualia diuidi. Corm. 2.

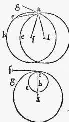


Ex hoc etiam patet quod spacium contentũ à peripheria circuli nulli angulo rectilineo equale esse potest. nam dimidium esset æquale dimidio, quod est contra demonstrata. Corm. 3.

LEMMA PRIMVM.

Inter duos circulos qui se diuidant infinitæ lineæ duci possunt. Inter circulos autem qui se tangant, recta linea duci non potest.

Sint duo circuli a b & a c, qui se diuidant in a, & ducatur ex centro inferioris d a & a d, & ad d a cathetus a e, dico quod a e diuidet angulum b a c ducatur ex centro superioris a c b quod sit f, f a cui cathetus a g, quia ergo e a cadit infra a g, & intera g & a b non potest duci recta, igitur e a cadit intra a c b circulum. Rursus tangant se circuli e d & c e, & ducatur a b per centra corũ que applicabit ad c, ex c ducatur cathetus e f & quoniã c f contangit circulũ e e, igitur duc̃ta quauis linea infra c f, cadet intra circulũ c e. Non ergo poterit cadere inter c d & c e. Corm. Per 11. primi Elem. Per 15. tertij Elem. Per 11. tertij Element.



LEMMA SECVNDVM.

Dato angulo contento duabus peripherijs æqualiũ circulorum se secantium æqualem rectilineum illi fabricare.

Cor^m. Per modum 8. primi El. Sit angulus a b c duabus peripherijs æqualium circulorum contentus, uolo ei æqualem rectilineum fabricare, ducantur b d & b e æquales, ut pote facto b centro eritque angulus d b a æqualis angulo e b c, addito utrique communi d b e ex peripheria & recta, fiet angulus d b e ex rectis æqualis a b c ex peripherijs, quod erat demonstrandum.

Cor^m. 4. Ex hoc patet quod reliqua duo spacia non possunt esse æqualia rectilineo. Nam spatium b a c demonstratum est æquale esse rectilineo, & b a d non est æquale rectilineo, igitur spatium c a d non potest esse æquale angulo rectilineo, nam si sic sit b a c æquale f g h & c a d h g k, igitur totum, b a d erit æquale Per 3. Cor^m. præsentis. toti f g k quod est contra suppositum, ideo neque b a e quia b a c & d a e sunt æqualia rectilineis per se, & etiam pariter accepta. Totum autem spatium a est æquale quatuor, rectis ergo residuum, scilicet spatia c a d & b a c pariter accepta sunt æqualia rectilineis spatijs, sed spatium c a d non est æquale rectilineo, ergo per demonstrata hic, nec b a c, nam si sit, sit ergo b a e æquale h g k & quia ambo spatia b a c & c a d sunt æqualia rectilineo ex demonstratis, sit ergo æqualia f g k, erit ergo ex communi animi sententia spatium f g h æquale spacio c a d, quod est contra primam partem corrolarij.

LEMMA TERTIVM.

Per 11. primi Element. Per 3. eiusdem Inter duas rectas lineas se tangentes circuli dati peripheriam ducere. Sit circulus datus a b rectilineus angulus c d e, uolo illum diuidere circuli periferia data b f, duco perpendicularem d g ex d super d c, & facio g d æqualem a b Per 15. tertij Elem. & duco circulum per d qui sit d h qui cadet infra d c & ob id etiam supra d e, igitur diuidet angulum c d e, quare cum circulus d h sit æqualis circulo b f Cor^m. 6. patet propositum.

Ex hoc patet quod infinitis modis potest diuidi angulus c d e Per 1. diff tertij ... Per 9. primi Elem. peripheria b f, nam diuiso per rectam c d e linea d k per æqualia & diuiso k d e per præsentem peripheria b f, patet propositum quoniam angulus c d e potest in infinitum recta diuidi, & ita semper per peripheriam, unde patet propositum.

SCHOLIVM.

Atque hæc omnia sequuntur de mente Euclidis, quæ tamen uidentur difficillima creditu, quoniam anguli rectilinei, et ex periphe-

ria

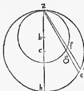
ria & recta sunt ex genere quantitatis continuæ, & quòd detur maius & minus & nunquam detur æquale, uidetur absurdum ne dum admirabile. Et maximè quod etiam anguli ex peripheria & recta sunt diuersorum generum inter se & infinitorum. Præterea istud repugnare uidetur ipsimet Euclidi, dicenti duabus magnitudinibus propositis inæqualibus, si de maiore earum plus dimidio detrahatur, atque iterum de residuo maius dimidio, & rursus de eo quod relinquitur plus dimidio, necesse erit ut tandem minor minore quantitas relinquatur. Neque illud argumentum uidetur concludere angulus contactus, ex recta, & circuli circumferentia non potest recta diuidi, & rectilineus potest diuidi, ergo rectilineus semper est maior angulo contactus, quia hoc contingit in angulo contactus propter modum anguli, non paruitatem: sicut etiam non ualet de figura lunari, & quadrangulo b. nam potest b diuidi ab angulo ad angulum recta & a non potest, & tamen a maius est quam b, cum contineat ipsam. 1. Propos. 10. Elem.

Proponantur ergo duo circuli a d e & a f g qui se contingant in a, & eorum centra sint b & c & ducantur rectæ a f d & a g e & constat quod portiones a d & a f similes sunt, itemque a e & a g, ducta enim a b c per centra circulorum ex contactu transibit per illa: quare anguli h a g & h a e sunt iidem & similiter h a f & h a d iidem, portiones ergo a f & a d item que a g & a e similes sunt: angulus igitur g a e ex peripherijs & e a d ex rectis sunt iidem in puncto a: sed quod ad basim maior est basis g e quam e d: hoc enim suppono quod per se est manifestum toties diuidēdo arcum d e ut fiat minor recta g e. Quia ergo sunt duæ magnitudines, quarum termini sunt iidem ex una parte, scilicet punctum a, ex alia autem unus est maior altero, scilicet g e quam e f & a d e peripheria est maior recta a g e. Ergo per regulam dialecticam si sub eadem proportione procederent, maius esset spatium semper inter peripherias quàm rectas. igitur angulus peripheriarum est maior angulo à rectis contento. Cum angulus non sit nisi quidam habitus propinquitatis linearum, sed angulus contactus ex recta & peripheria maior est contento ex peripherijs cum habeat rationem totius ad partem, igitur angulus contactus est maior dato angulo rectilineo.

Per 11. tertij Element.

Ex 10. diff. tertij Elem.

Per 1. decimi Elem.

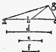


Propositio centesimasexagesima.

Proposita linea tribusq́ in ea signis punctum inuenire, ex quo ductæ tres lineæ ad signa sint in proportionibus datis.

Co. Sit data linea a b c in qua puncta dicta & datæ tres lineę d e f, uolo inuenire punctum, puta g ex quo ductæ tres lineæ ad a b c puncta sint in proportione a g ad g b, ut d ad e & g b ad g c, ut e ad f. Per præcedentia inuenio circulum ex cuius peripheria omnibus ex punctis ductæ lineæ ad a b sint in proportione d ad e, & per idem circulum ex cuius peripheria quælibet lineæ ductæ ad b c puncta sint in proportione e ad f, si igitur isti duo circuli se secabunt in aliquo puncto puta g: liquet quod lineæ ductæ ex g ad a b c, erunt in proportione d e f.

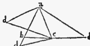
Per 154.



Corr. Ex quo liquet quod si uoluero ducere ad tria puncta data, tres lineas in continua proportione data d ad e, subijciam tertiam uel interponam, si uoluero mediam. Et si uellem, ut esset a g ad g b duplicata ei quæ est g b ad b c, & uellem quòd proportio d ad d f data esset, oporteret inuenire duas medias proportione inter d & f, in de operari cum una earum per modum propositum. Differt corrolarium hoc à propositione in hoc, quod in propositione non quærimus nisi proportionem g a ad g b & g b ad b c, non g a ad g c, neq; comparationem proportionum: at in corrolario quærimus tres proportiones g a g b & g c, & comparationem proportionum inter se, scilicet æqualitatem.

Propositio centesimasexagesimaprima.

Si fuerint duo trianguli quorum bases in eadem linea sint constituti & æquales & ad unum punctum terminati, & latus unum commune inter reliqua quantitate medium, necesse est angulum à maioribus lineis contentum minorem esse.



Co. Sint duo trianguli a b c, a c d, quales proponuntur, & sit a d maior a b dico angulum d a c esse minorem. Si non fiat angulus d a c æqualis ex alia parte, & oportet si non sit minor ut uel cadat a d super a b & ducta a d ad ęqualitatem cadet infra b, ducta ergo d c erit trigonus a d c maior a b c, quod esse non potest cum sint æquales.

Per 23. primi Element.

Per 38. primi Elem.

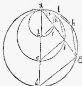
Si

Si autem a d cadat extra a b ducatur d e; quæ si cadat supra b c uel infra, cum totum sit maius parte erit a d e, ut prius maior a b c quod est contra Euclidem. Reliquum est ut d c cadat supra b c: hoc autem esse non potest, nam cum supposuerimus a b esse minorem a c erit angulus a c b minor angulo a b c, quare a c b est minor recto, & ideò a c d maior recto, at a c d æqualis est a c d, alteri igitur a c d est maior recto a c b minor, erit ergo pars maior toto.

Per 18. primi Elem.
Per 23. eiusdem.
Per 13. eiusdem.
Per 4. eiusdem.

LEMMA.

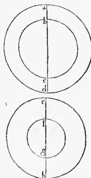
His demonstratis quis dicere posset ex superius expositis quod angulus rectilineus semper esset maior angulo contactus: quia angulus contactus non potest diuidi nisi obliqua linea, rectilineus autem tam obliqua quam recta. Propter hoc exponantur circuli tres se tangentes a b, a c, a d hac ratione ut a b, b c, c d sint æquales, erunt enim centra omnia in linea contactus, & ducatur a e f g recta quomodolibet: & erunt ductis lineis b e, c f, d g anguli e f g recti, quare omnes trigoni a b e, a c f, a d g, similes & ideò a e, e f, f g æquales, atque portiones a g, a f, a e, iuxta proportionem circulorum, quare a g, erit sexquialtera a f & a f dupla a e, igitur per præcedentem maior erit angulus e a f, quam f a g, & a d a ex recta & peripheria quam e a f, igitur augendo eadem ratione cum perueniamus ad angulum b a g qui fermè est recto æqualis cum deficiat solo angulo contactus, liquet angulum e a g esse longè maiorem multis rectilineis. Istud posset etiam demonstrari uia Archimedis diuidendo arcus g a in h & f a in k bifariam ducendoque lineas rectas g h & f k & ita diuidendo h a in l, & k a in m bifariam, & ducendo rectas atque ita semper appropinquando puncto a. Concludo ergo quod angulus cōtactus ex recta & peripheria est maior multis rectilineis. Causa autem erroris est quod multi existimarunt corrolarium illud esse Euclidis cum non sit. Nam Euclidi sufficit hoc quòd angulus contactus nō posit recta diuidi, nam eo utitur post modū in demonstrationibus. Eo uerò quod sit minor omnibus rectilineis angulis non utitur, ideò etiam si uerū fuisset nō addidisset: quanto minus: cum uerum non sit, ideò fuit adiectū ab aliquo qui idē fore credidit nō posse diuidi recta linea & esse minus quocunque quod recta linea diuidi posset, quod apertè ut dixi falsum est.



Lemmate 3. Prop. 159.
Per 11. tertij Elem.
Per 31. tertij Element.
Per 32. primi Elem.
Per 4. sexti Elem.
Per 10. diff. tertij Elem.
Per præcedentem.

SCHOLIVM.

Ratio autem quòd omnis angulus contactus indiuiduus sit, seu duorum circulorum, seu circuli cum recta est, quoniam cum fuerint duæ rationes contrariæ, & una perpetuò minuitur, alia manet necesse est, ut tandem, quæ minuitur, superetur ab ea quæ manet: cum ergo circuli curuitas maneat, & angulus tendat in punctum perpetua diminutione necesse est, ut curuitas circuli impediat diuisionem rectæ: sed hoc habet duplicem obicem. Primum, quia nullus angulus ex circumferentia & recta posset diuidi: hoc autem falsum est manifestè, cum solus ille qui fit ex contactu lineæ, quæ non diuidit circulum, diuidi non posfit. Secundò, quod angulus contactus duorum circulorum se exterius tangentium multo minus posset diuidi angulo contactus interioris duorum circulorum, quod tamen falsum est: & hoc animaduertit Campanus noster, uir acutus. Dico ergo quòd in his qui se tangunt exterius, non fit diuisio nisi semel: & quamuis inclinentur mutuò, tamen in concursu non aptantur, ut cum obuiat rectæ aut cauæ parti circuli quia necesse est, ut accedat, in alio autem discedat: indicio est quod circulos se exterius tangentes, in puncto facilè describes, interius uix fieri potest, sed uidentur coniuncti per longum interuallum. Ad aliud dico, quòd ille angulus ex recta & peripheria conuexa circuli propter discessum seruat maiorem inclinationem in quocunque puncto, quàm sit accessus conuexæ partis exterioris circuli.



Propositio centesimasexagesima secunda.

Proportionem duorum orbium quorum diametrorum cõuexæ partis, & concauæ proportiones datæ sint, inuestigare.

Com. Sint duo orbes a b c d & e f g h, & sit proportio a d ad b c, data & e h ad f g, data & rursus a d ad e h, dico orbis proportionem a b c d ad orbẽ e f g h esse datã. Quia.n. ꝓportio a d sphæræ ad b c est ueluti ad diametientis ad b c dimetientẽ triplicata, ideò cũ nota sit a d ad b c dimetientiũ, erit nota etiã a d sphæræ ad b c sphærã. quare orbis ad ad sphærã b c, nota est etiã ꝓportio b c dimetiẽtis ad a d & a d ad e h &

Per 18. duodecimi Elem.

e h ad

e h ad f g, igitur b c proportio dimetientis ad f g dimetientem nota. Quare sphæræ b c ad f g sphæram, at nota est proportio f g ad e h dimetientium igitur & sphærarum: igitur nota est f g sphæræ ad orbem e h, igitur cum nota sit proportio orbis ad a d sphæram b c, & b c sphæræ ad f g sphæram, & f g sphæræ ad orbem e h, erit proportio orbis a d ad orbem e h nota, quod est propositum.

Per 22 quinti Elem. & Alzam.

Propositio centesimasexagesimatertia.

Proportionem uirium stellarum per motus suos indagare.

Mouentur stellæ omnes ab Oriente in Occidentem die una, qui motus fit à prima mente, quæ mouet: ideò quod ad hoc attinet non est diuersitas: uerùm in motibus ab Occidente in Orientem cũ sint proprij, oportet considerare tempus, in quo circumuertũtur, & magnitudinem ambitus, & inde magnitudinem orbis, qui circumagitur, & horum trium facta comparatione dignoscitur robur uirium stellarum & uitarum quæ mouent eas. Ponatur ergo, ut uelim proportionem uitę Saturni ad uitam Lunæ: erit ergo (ut docet Alphraganus) Luna, cum est in longitudine propiore, altitudinem habens 109000 M.P. & cum est in longitudine longiore 208500, tota igitur dimetiens 417000 M.P. mane 218000 M.P. Igitur proportio solidarum sphærarum est uelut 72511713 ad 1036 0232, remanebit ergo proportio orbis ad sphæram elementorum, ut 6215 1481 ad 1036 0232, & est sexcuplum fermè. Rursus proportio dimetientis altitudinis Saturni ad contentum est uelut 2011 ad 1440, & est propè 201 ad 114, quare 67 ad 38, quare sphærarum ut 300000 ad 55006 fermè. Igitur ferè ut 60 ad 11. Rursus proportio dimetientis sphæræ Saturni ad dimetientem sphæræ Lunæ est propè 313, & sphærarum solidarum 306 317 10. Perinde est. Quia ergo proportio sphæræ Saturni ad sphæram Lunæ est 306 317 10, & orbis Lunæ est $\frac{5}{6}$ solum sphæræ suæ diuidemus 30631710 per $\frac{5}{6}$, & exibit proportio sphæræ Saturni ad orbem Lunæ 36758052, at quia proportio solidæ sphæræ Saturni ad contentum est ut 60 ad 11, erit sphæræ ad orbem, ut 60 ad 49 residuum, diuidam ergo 36758052 per 60, exeunt 612634, & ducam per 49, id est per 100, fit 61263400, & diuidendo per 2, exit 30631700, detraho 612634, relinquitur proportio orbis Saturni ad orbem Lunæ 30019066.

Com.

Diff. 2 1.

Iam uerò circuitus Saturni ad circulum Lunæ, proportio est 313, ut uisum est, Lunæ autem tempus per sex ductum est 164 dies, Saturni 177 anni propemodum, qui sunt dies 64649 diuide, duc ergo 313 in 164, fiunt 51332. Idem ergo peragrat Luna in 51332 diebus, quod Saturnus in 64649, & est quo ad hoc agilior,

lior, ut ita dicam, quarta parte: at Saturnus, ut dictum est, mouet orbem 30019066, sed lentius quinta parte, detrahe illam fiet robur Saturni in comparatione ad Lunam 24015253.

Est tamen Luna multo agilior ob propinquitatem, & ob uarietatem luminis, & magnitudinem superficiei. Et etiam quod maius est ob id quod defert ad nos uires omnium syderum, nihilominus quo ad uires uix est comparatio.

SCHOLIVM.

46 Multum autem differt hæc propositio à superiore, nam in illa quæsiuimus uim uitarum ex proportione ad sua corpora, quæ quodammodo est quodammodo, non hic autem exponimus uim uitarum ex earum operatione. Propterea subijciemus breuiter altitudinem proportiones in minore longitudine & maiori

Luna	in minore altitudine	51	in maiore	64
Mercurij	in minore	64	in maiore	167
Veneris	in minore	167	in maiore	1120
Solis	in minore	1120	in maiore	1220
Martis	in minore	1220	in maiore	8876
Iouis	in minore	8876	in maiore	14405
Saturni	in minore	14405	in maiore	20110

Stellarum fixarum propior 20110 longior non habetur. Et hæ mensuræ sunt in comparatione ad semidiametrum terræ. Et iuxta id quod potuit secundum rationem haberi: nam demonstratio sola

Lib. 5. cap. 14. 15. & 16. est de altitudinibus Solis & Lunæ, & eorum magnitudinibus à Ptolemæo in magna compositione.

Propositio centesimasexagesimaquarta.

Syderum proportionem in magnitudine ostendere.

Luna ad terram comparata	$\frac{1}{39}$
Mercurij corpus	$\frac{1}{22000}$
Veneris	$\frac{1}{29}$
Solis corpus	166
Martis	$\frac{15}{8}$
Iouis	95
Saturni	91

Diff. 22. Stellarum autem fixarum insignium unaquæque etiam minima, si credendum est Alphragano, est centies maior tota terra, unde cænem necesse est centies mille maiorem esse, est enim in eadem altitudine, & dimetiens decuplus dimetienti stellarum secundæ magnitudinis, quas ille insignes uocat: aliter Saturnus non tantus esse posset, cum sit minimus aspectu.

Propositio

Propositio centesimasexagesimaquinta.

Propositionem motuum omnium stellarũ ad solem considerare.

Videtur Sol quasi Rex in Cœlo, nam omnes orbes cum illius motu conueniunt, & uidetur res admiratione digna his, qui non nouerunt, quanta sit cõcordia omnium rerum, de qua infrà dicemus. Ergo Luna primum hoc habet, ut linea æqualis motu Solis semper media sit inter lineam æqualis motus Lunę & loci maximè inæqualitatis motus eius, ubi scilicet tardissimè mouetur, Veneris autem & Mercurij ut motus æquales idem semper sint cum motu æquali, & locus cum loco ipsius Solis ad unguem præter id quod infrà dicemus. Trium uerò superiorũ ratio sic cõstat ad Solem ut à Ptolemęo obseruatũ est ex Hipparcho. In omni restitutione cuiuslibet planetę superioris numerus reuolutionũ Solis ęqualis est numero restitutionũ planetę secundũ motũ æqualitatis & inęqualitatis pariter acceptis. Velut Saturnus in annis quinquaginta nouem die una & horis decem octo quinquagesies septies per motum inęqualem ad unguẽ, per æqualem autem duabus reuolutionibus partę insuper una & quadraginta quinq; minutijs, quæ respondent diei uni, & horis decem octo ex motu Solis, & ita bis Saturnus reuoluitur secundum motum æqualitatis & quinquagesies septies per motum inæqualem & similiter. Iupiter in annis 70, diebus trecentis sexaginta, horis quatuor, sexaginta quinq; reuolutiones inęquales perficiet & sex ęquales, deficientibus ex ęqualibus quatuor partibus & dextante quod est quãtum peragraret Sol in quatuor diebus, & dextante diei ad perfectionem scilicet annorum septuaginta atq; unius. Martis quoq; stella in annis septuaginta nouem, & diebus tribus & horis fermè quatuor triginta nouem facit inæqualitatis reuolutiones: æqualitatis autem quadraginta duas, & insuper partes tres cum sextante, quas manifestum est peragrari à Sole in diebus tribus atq; horis quatuor. Veneris quoq; sydus in octo annis deficientibus diebus duobus & quadrante, inæqualitatis quinque perficit reuolutiones, æqualitatis autem tantundem ad unguẽ quantum Sol deficiente eadem parte seu diebus duobus & quadrante. Mercurij quoq; stella in quadraginta sex annis & una die & hora una fermè quadraginta sex fermè perficit reuolutiones æqualis motus & insuper gradum unum cum portione respondenti portioni temporis, id est, horæ fermè uni: in æqualitatis autem censum quadraginta quinq;. Atq; hęc sunt manifestissima et ut dixi admiranda sunt, prætereà alia minus generalia, aut minus manifesta aut non tanti momenti quæ consultò prætermitto, non est. n. locus hic docendi artes singulas sed solum ea tractandi quæ ad argumentum

tum pertinent. Igitur ut ad rem redeam. Solis cum octauo Orbe ea ratio est, ut linea quam ille permeat eadem sit quam quę fixę stellæ, non.n. ad eandem distantiam & mente conceptam ab æquinoctijs descendentem ac æquidistantem mouetur, sed ad eam secundum quam stellę fixę in octauo orbe mouentur in comparatione ad eclipticam superioris orbis. Porrò de his atque huiusmodi in Paralipomenis diximus, ubi etiam docuimus quomodo secundum duos circulos, qui solum circa suum centrum mouentur, punctus datus perpetuò in recta linea feratur.

Lib. 14. cap. 7.

Propositio centesimasexagesimasexta.

Proportiones musicas superpartientes in eas quæ particula una tantum abundant reducere.

Com. Ptolemęi hoc inuentum fuit, ut & multa alia pręclara: itaque statuendum est, primum uoces ęquales non concentum efficere, quia diuersæ non sunt, quę autem diuersę sunt, nihil ominus proportione constant simplicissima & multiplici, tales optimam efficiunt armoniam. Eiusmodi sunt quæ in dupla sunt proportione, uocatur autem diapason. i. quasi omnia comprehendens non à numero uocum uelut diapente & diatessaron à quatuor & quinque uocibus. In diapaso.n. omnia cõprehendi uidentur. i. omnes uoc ũdifferentię, quanquã ex octo tantũ uocibus constet. Pòst sunt quæ in quadrupla, unde bis diapason, post quæ in tripla, nam ꝓpior est monadi sen ęqualitati: sed non adeò simplex ut bis diapason. Vocant aũt hanc diapason diapente: inde subsequit̃ octupla quę uix in uocib. humanis habetur: frequẽs in instrumentis, uocat́que tris diapason inde sexcupla, seu bis diapason diapente. Quintupla aũt minus cõcors est: sed de hac inferius dicemus, atque de multiplicib. dicta sunto. Sed de cõcentu ex particula superaddita sesquialtera sesquitertia atque alijs nunc agendum. Clarum est.n. has esse simplicissimas. Cum ergo dupla proportio non magis possit diuidi æqualibus interuallis atque simplicibus proportionibus quàm in sesquialteram & sesquitertiam, uelut inter 4 & 2 interposito 3. nam proportio 3 ad 2 est sesquialtera, & 4 ad 3 sesquitertia: nec melius potest diuidi, at sesquialteram & sesquitertiam quantumuis magnis numeris diuidere non licebat melius aut commodius quam per sesquioctauas: uelut i sumpto numero 64 cui duplus est 128, inter medius 96 qui cum 64 sesquialteram facit proportionem, quæ suauissima est omnium deductis multiplicibus, uocaturque diapente. At quæ est 128 ad 96 sesquitertia est minusque benè sonat per se, sed in acutioribus uocibus solum cum alijs benè sonat, uelut cum diapente, perficiens diapason, interuallum, ergo inter 96 & 64 diuisum per sesquiocta-

nas

uas ꝑducit 72 et 81,nā 72 ad 64 est sesquioctauū,sicut 81 ad 72. uerum id accidebat incōmodi ꝗ 81 ad 64 nullā habet ꝓportionē commodā, & multominus 96 ad 81, quare uisum est Ptolemęo ut subtracta mona de fierēt termini 64,72,80,& 96,ꝓportio aūt 80 ad 64 cōstituit sesqui quartā atq; ditonū,ꝓportio quoq; 96 ad 72 sesquitertiā semiditonūq;. Rursus ꝓportio 128 ad 64 cōponit̃ ex ꝓportionib. 80 ad 64,q̃ habet̃ ꝑ ditono ut dictū est,& est sesquiquarta ꝓportio. At 128 cum 80 est in ꝓportione superpartiente tres quintas,q̃ iterū est consona. Regula eñ est ꝗ ubi consonantia uocū diuidat̃ in duas partes,quarū una sit conso nans,reliquā etiā esse consonantē,at nō cōuertit̃. Sępe.n.fit ut ex duab. consonantibus dissonans cōpositio oriat̃,uelut ex duplici diapēte, aut diapēte cū ditono,sed ut ad ꝓpositū reuertar,alia diapason est inter 80 & 40,at inter 48 & 40 est semiditonus ut ostēsum est, uelut inter 96 & 80,nam inter 45 & 40 est ꝓportio sesquioctaua,inter 48 aūt & 45 sesquiquinta decima,igit̃ ex regula data ꝓportio 80 ad 48 q̃ est superbipartiens tertias seu solida cū besse seu sexta maior erit cōsonans. Iam er go uidemus detractione aut additione sesquioctuagesimę, concinnas reddi uulgatiores armonias:tertiā utranq; maiorē scilicet & minorē,ac rursus sextā maiorē atq; minore q̃ in minoribus numeris scilicet à monade ad octo positę sunt. Vides prętereà semiditonū in sesquiquinta cōstare:adeò ut à senario infra nihil inutile reddatur. Diatessaron aūt cum primum di uidi potest,si secus diuidatur ꝗ̃ in ditonū & semitoniū,aut in semiditonum & tonū, scilicet in duo tantū interualla,non cōmodius quā inter octo & septem & sex diuidi potest. Cum ergo octo ad septē dissona sit, quippe nimis remota est hęc,ꝓportio à sensu humano:quamobrē ex regula data, neque proportio septē ad sex. Sed dubitabis meritò,quia cū diatessaron diuidatur bifariā,in ditonū & semitoniū, ac rursus in semiditonū & tonū,quarum altera cōsonans est, reliqua nō. Videt̃ ergo infirmari regula illa,ꝗ consonantia diuisa si una pars cōsonet,alia non possit esse dissonans,nā constat toniū & semitoniū tam per se quàm in cōpositione dissonare:& nō parū sed acerbè. Verū respondeo diatessa ron,ut dixi,numerari inter ambiguas coniugationes,quatenus eñ per se est,dissonans est:atq; sic in consonantē & dissonantem diuidi potest: quatenus aūt pars est diapason cōsonans in acutis:quanq; etiā adiecta ditono aut semiditono supra efficiat sextā maiorem aut minorē parum benè sonantes. At quintupla ꝓportio ut ab initio ꝓpositum est,cōstat bis diapason,& sesquiquarta,ut planè manifestū est: sesquiquarta aūt

Diapason	2	1
Bis diapason	4	1
Diapason diapente	3	1
Tris diapason	8	1
Bis diapason diapēte	6	1
Hæmiolia	3	2
Hæmitritæa	4	3
Ditonus	5	4
Semiditonus	6	5
Sexta minor	8	5
Sexta maior	5	3
Bis diapason ditonus	5	1

ditonus:bis diapaſon aũt quindecim uocibus. Omnes igitur decem,& ſeptẽ uoces,q̃ ſexdecim interuallis diſtinguunt, conſonantes ſunt: & ex genere ditoni, & ſexquiquartæ,ſed paulo minus benè ſonãt q̃ ditonus ipſe.Igitur quintuplã multiplicem ad ſexquiquartã reduximus. Verum ut oſtenſum eſt & decimaſeptima,q̃ bis diapaſon cõſtat, & ſemiditono benè ſonat,hęc aũt inter nonaginta ſex & uiginti;quadrupla igiť eſt & ſuperquadripartiens quintas. Diapaſon quoq; cum ſexta maiore & minore eandem habent rationem quam 16 ad 5,& 10 ad 3,triplam utranq;, ſed altera ſexquiquinta,altera ſexquitertia:bis diapaſon uerò cũ eiſdem ut uiginti ad tria,& 32 ad quinq; ſexcupla utraq;: ſed altera ſuperbipartiens tertias,altera quintas. Manifeſtũ eſt igitur hanc diuiſionem nõ ſolum concinnam magis eſſe & ſuauem ſed omnem tonorũ & ſemitoniorum neceſſitatẽ effugere. Quòd uerò in cauſa fuit ut toni & ſemitonia in uſu eſſent,id eſt,quoniam in diſcẽdo neceſſe eſt eandem ſeruari rationem incrementorũ,neq; arithmeticam ſed geometricã. Ideò aſcẽſus per tonos & ſemitonia cõmodus fuit,nam duplicem ſolũ differentiam pueri uſu aſſequi coguntur. At uerò poterat & per ſexquiſextam diuidi diateſſaron,ut inter triginta ſex & quadraginta nouem interpoſitis 42,uerùm triplex ſequebať incõueniens:primum ut diateſſaron ad amuſsim non ſeruaretur,ſed incidebat in cacophoniam,addita quadrageſima octaua parte:deficiente aũt in duabus ſexquiſeptimis numeris ſeu ꝑportione ſexquitertia:ut inter 49 & 64 loco 48 & 64,uelut etiã inter 48 ad 36,addita igitur monade in termino medio utrinq; fit diſſonantia. Secundum inconueniens,eſt q̃ ſic diuidente non ſeruabatur ratio ſexquiquartæ & ſexquiquintæ ſeu ditoni & ſemiditoni, quæ uoces benè ſonant. Tertium inconueniens erat,quòd hæc ratio diuidendi diapentes minimè ſatisfaciebat,uelut inter 324 & 216. Interponere enim neceſſe erat 252 & 294,unde incongrua rurſus erat diuiſio. His tot cauſis cum proportiones maiores non ſatisfacerent ut ſexquiquinta quæ diateſſaron nullo modo æqualiter diuidere poteſt,& in diapente deficit ſexquiuigeſimaquarta,ut inter 25 & 36,coacti ſunt cum nec ſexquiſexta nec ſexquiſeptima idoneæ eſſent ad ſexquioctauam confugere.

Eſt & alia diuiſio toni in ſemitonia,q̃ eſt uaria ponẽdo tonũ inter 18 & 16,media uox eſt 17 ſemitonium maius inter 17 & 16,ſed minus inter 18 & 17,quorũ differentia eſt $\frac{1}{288}$. Hic ſubit admiratio quomodo ſemitonũ minus apteť tam gratè in ſymphonijs,maius aũt nequaquã. Ptolemæus hoc negauet,quia ſexquiquinta ſeu ſemiditonus cõſtat tono integro,qui eſt inter 90 & 80,& ſemitonio pluſquã maiore quod eſt inter 96 & [illegible],& eſt ſexquiquinta decima:q̃ maior eſt tono maiore $\frac{1}{255}$. Propterea dicemus cauſam eſſe q̃ poſito ſemiditono inter 81 & 96,id eſt, 27 & 32 ſublato tono,id eſt,234 & 216, remanebit 13 differentia 256 ad 243,ſeu qualis eſt 96 ad 91 & $\frac{1}{8}$ quæ eſt ut 768 ad 729 et redit ad idẽ,ſcilicet,

cet, ut 256 ad 243, 13 autem est paulo plus decimanona, ergo multo minus semitonio minore. secundum mētem ergo Ptolemæi, posito tono inter 135, & 120, & semitonio maiore inter 128 & 120 remanebit semitonium minus fermè inter 19 & 18, id est, 133 & 126, quę proportio differt à 135 & 138. Si quis autem bene animaduertat, sexquioctuagesima illa adimitur ex tono & additur semitonio minori, & hæc est causa quòd semitonium maius Ptolemæi sit concinnum, quia additur tonis imperfectis. Dimidium autem semitonij minoris est inter 36 & 35, & uocatur cōma: & est minus & maius: maius est inter 35 & 34, rursus cōma minus diuiditur in duas dieses, minorem, quæ est inter 72 & 71, & maiorem, quę est inter 71 & 70, & ideò manet difficultas quomodo intenta uoce per diesim fiat melior consonantia: nam de remissione possemus dicere quòd accipitur loco sexquioctuagesimæ: sed in sexquioctuagesima remittitur de tono secundum mentem Ptolemæi, in diesi intenditur semitonium minus, sicut ostendit experimentum, sed forsan conueniunt quia intentio semitonij minoris deducit semiditonum ad sexquiquintam: est enim differentia semitonij minoris intenti hoc modo ad semitonium minus, ut 136 ad 135: sed hoc est longè minus sexquioctuagesima, unum fat est, hanc esse ultimam diuisionem toni in octo partes, & ut in diatonico toni dominantur, ita in chromatico semitonia in enarmonico dieses, sed dieses fugitando (ut ita dicam) ac aures uellicando, mirum in modum oblectant audientes: uelut toni stando, unde etiam nomen, semitonia medium modum obtinent.

Tertium genus proportionis (omitto modò diuisionē temporum binarij, ternarij, quinarij, qui ultimus est eorum quos sensus recipiat, nam septenarius propinquior est binarij diuisioni ob octonarium, & modos illos satis notos Doricum, Lydium & Phrigium, ac eiusmodi) est Ptolemæi: rursus qui cum uideret despectam futuram musicæ contemplationem, conatus est illius aliquod singulare emolumentum ostendere, quemadmodum fecit & in libro de Prædictionibus, existimans ni illos composuisset ueluti pręmium ostendentes tanti laboris quantus necessarius uideretur ad intellectum librorum Magnæ compositionis, futurum esse, ut hi negligerentur, ergo & hoc in musicæ libris ostendere molitus est, scilicet, præclarum esse aliquę huius cōtemplationis finem, quod utinā non fecisset, ne illud uerè de eo dici posset:

——Non omnia possumus omnes.

Virum enim hunc supra omnem humani ingenij metā fuisse nō negamus: sed hanc partem quam hic agit, adeò infeliciter tractat, ut malim credere totū illum tertium librū fuisse ab aliquo alio adiectū. Etenim quid turpius sapienti homini q̄ imitari uulgares illos? septē planetæ, septem mundi miracula, septē artes liberales: quid enim similitudo nu

meri iuuare poteſt, aut quàm afferre utilitatem: nimis certè indignũ eſt uti argumẽto à ſimilitudine ſumpto: tum maximè adeò leui. Sed quoniam conſtat omnia quæ in mundo ſunt ordine coniuncta eſſe, & neceſsitate uinciri, ideò cùm finis ipſe uerus ſit, non tam debemus Ptolemæum damnare, ꝙ non probauerit, quàm laudare, quod ueritatẽ ſine ratione ſit aſſecutus. Sæpe enim accidit huiuſmodi uiris adeò præſtantibus ut ueritas detegatur, quam cùm illi, ut mos eſt hominũ, rationibus adornare nituntur, tranſgredientes metam muneris, in abſurda & ineptias incidũt. Ergo id modò declarare aggrediar, ſupponens ꝙ uerum eſt, ſcilicet hanc muſicam concinnitatẽ cum diuinis connexã eſſe, & ab illis originem ducere. Verùm dubium eſt, an ſoni propter numeros iucundi ſint, an propter aliud? & ſi propter aliud, cur ergo numeri ad hoc ſunt neceſſarij? & cur obſeruare eos oportet ne ab illorum ordine diſiungi poſsint? Hoc aũt perfacilè intelligiř, & à nobis aliàs declaratum eſt, ſcilicet delectare nos, quæ percipiuntur quæꝙ ratione facta uidentur, quoniã in his naturæ uis relucet & imago uniuerſi, ergo delectant nos, quoniam naturę ordine nos conſtamus. Illud difficilius longè ꝗd tamẽ diligenti obſeruatione dignũ uidetur, ſcilicet, quonam pacto harmonia cum rebus cœleſtibus aut humanis cõiuncta ſit. Forſan & illud ab re non eſſet intelligere, cur nullum animal pręter hominem capax ſit harmoniæ: an forſan quoniã ſolus homo ratione participet, & ob id ſolus gaudet ratione: ordinata aũt ratione cõſtant aut ſola aut maximè, numerus autem quid aliud eſt quàm ordinis ſeparatorũ imago. Porrò hæc accipienda ſunt ex his quæ ſenſibus deprehenduntur, qualia ſunt ꝙ animus mouetur & uarios affectus induit iuxta harmoniæ diuerſitatem lætitię, triſtitię, impetus, remiſsionis, timoris, ſpei, iracundiæ, & commiſerationis. Nos enim maximè octo affectus mouent muſicæ modulationes. Secundum quid autem mouent? uel quia conſonæ aut diſſonæ, uel quia concitatę aut tardæ, uel quod maius eſt ꝙ tendant in acutum ad alacritatem, uel in grauem deſinant & remiſſum ſonum ad cõmiſerationem, & lachrymas, aut etiam ex modo tetrachordorum. Illud ſanè non obſcurum eſt, animã cum ſono maximè eſſe coniunctã, nam neꝙ odoribus ut odores ſunt, neꝙ ſaporibus, aut his quæ tanguntur licet plurimum delectent, aut etiam lædant, anima mouetur ad affectus, licet, ut dixi, magis homo delectetur, aut triſtitia afficiatur quemadmodum ex ſonorum uaria natura, quod etiam in morſis à Tarantula (araneę genus eſt) deprehenditur. Quinimò nec à luce nec à coloribus aut pictura, niſi ut hæc ad memoriam reuocẽt ea, propter quæ ad hilaritatem aut triſtitiam uel iram, uel commiſerationem mouemur. Vnde quoſdã reges ferunt iniurias acceptas iuſsiſſe depingi in aulane poſſent obliuiſci, at longè plures curarũt, ut potius eorũ facta egregia pinge-

pingerentur continuata per memoriam uoluptate, quam dum illa agerent, cō ceperant: nihilominus, neq; color ipse, neclux aut spectaculum uel imagines possunt adeò mouere animi affectus, uel sonus. Nam duo in uniuersum ex uisu ad animi affectus mouendos habentur, tenebræ ad tristitiam & metum, pictura regionum amœnarū ad iucunditatem, sed irā quæ moueant picturæ alacritatemúe aut cōmiserationem, non habemus. Videtur ergo ob hæc sonus ipse magis animæ intimus q̃ ullum aliud sensile. Quod si odoratus est in appēdicibus cerebri, uisus in pupilla oculi, gustus in linguæ neruis, uerisimile est magis intimum esse auditum, scilicet in cerebro ipso, atq; ob id magis ab illo moueri animam. Neq; em̃ in aëre concepto à concauitatibus auris, qui nostri pars non est: neq; à tympano, cùm superflua fuisset cauitas interior omnis: neq; enim inter pupillam & cerebrum pars ulla cernitur ad uisum adiuuandum idonea: sed solus sufficit consensus pupillę cum cerebro: nam ad nos per spiritus deffertur imago, non em̃ uisus esset unus, nec in uno tempore fieret, sed ueluti è secūdo speculo & decimo simul, & eodem tempore reflectitur imago, ut à primo ita sensus uisus ex pupilla in cerebro & in corde & anima simul relucet. At ergo non potuit in tympano uel neruo densiore fieri auditus, sed in cerebro ipso, ob q̃d magis moueret affectus. Sed & magis incorporeus est sonus, ut qui instrumentum proprium non afficiat, nisi cum immoderatus fuerit, at omnis color, omnis lux oculum afficit, ac, ut ita dicam, tingit, neq; successiones illas ob id adeò minutas oculus percipere potest ut auris, sed coinquinatur, ut ita dicam, priorum obiectorum reliquijs atq; imaginibus. Vt in uniuersum constet puriorem esse auditus sensum etiam animæ nostræ propiorem quàm uisum.

Quibus constitutis uidendum est, quomodo sonus permutet affectus: hoc autem nō quia animam, quæ immortalis est & immaterialis, sed quoniam aut corporis eam partem, quæ est animæ instrumentum, id est, spiritum, aut animæ principalē coniunctionem qua corpori annexa est. Vt enim corpus deserit aut impeditur à corporis commercio corpus immoritur: hoc præsentiens animus, fiunt illa duo præuia ad mortem timor & tristitia. Vt contrà, lætitia non est nisi communicatio animæ corpori, & quatenus communicatur solum de uita cogitat, atq; ob id quasi immortalis, qui lætatur obliuiscitur mortis. Ergo animę ratio illa erit, quæ ut cognoscit perfectè exhilaratur dulcedine uocum, & hoc fit in diapason. Vt uerò imperfectè diapente, ut imperfectius diatessaron, at cum ex diatessaro & diapente perficitur diapason, accidit ei idē, quod quærēti gemmas in matrice dum inuenit, & ei qui ex tabulis arcam cōficit, & puero cū adolescit, & generaliter ei qui ex imperfectis perfecta colligit: ex quintæ enim & quartæ sensu imperfectarū consonantiarum

nantiarum percipit perfectam diapason. Videamus ergo an aliquid sit simile in animæ facultatibus, nec dubiũ est quin ex sensib. exterioribus atq; interioribus fiat intelligentia. Et sensus quidẽ exteriores sexquitertia cõstant: est enim illorũ imperfecta cognitio: maior longè memorię unius & rationis reliquarumq; facultatũ, ex quibus intelligẽtia oritur. Iam uerò habemus exactam similitudinẽ facultatum animę humanę, q̃ cognoscit. Nunc ulterius ꝓcedamus et uideamus, an sit aliqua etiã coniunctio inter illas, nam similitudo etsi sit una originis causa, non tamen sola digna est ut à Philosopho numeretᷣ inter causas ordinis & naturalis uinculi. Non est ut tetrachordorũ genera ad partes animę cõparentur, cũ sint uoluntaria diuisione, non natura constituta. Sed si quis hoc uelit, magis ad rationem ꝓprietatis respiciat, suauitas in chromatico, subtilitas in Enarmonico, stabilitas in diatonico: Vt Enarmonicũ ad mentem uerè referri posit, chromaticũ ad sensus: diatonicũ ad uitã naturalemq; facultatem. Sed, ut dixi, iam ꝓpius accedamus, cõcitatior sonus, ut Doricus ad alacritatem pertinet, ad pugnam, ad uim animę irascibilis: Phrygius ad uoluptatẽ, Lydius ad intelligentiam remissione corporeorũ affectuum. Sed nõ quęrere decet aut laborare, ut malè inuenta aut distributa aptemus ordini naturę, sed ut res rebus. Diximus quatuor esse differẽtias nobiliorũ affectuũ animi, scilicet, timoris, spei, iracũdię seu sęuitię & cõmiserationis, lętitię, tristitię, impetus ac remissionis. Et uideᷣ musica nec hoc ęqualiter mouere, sed primũ uideamus an hi soli affectus sint maximi, quippe deesse uidenᷣ amor atq; odium. Et mihi dubiũm non est quin hi potentissimi sint omniũ præter metũ. Sed metus cũ causa, affectus propriè nõ est, sed potius scientia quædã. Proprium enim perturbationum est excedere rationem: at metus mortis, ꝓprię aut de filio, non est à ratione alienus, nec excedit metas, modò inanis non sit aut falsus, ob hoc metum excludemus ab hoc negocio: tum maximè ob id quod nulla musica est quæ metũ excitet cùm ea, nõ opus sit in eo, qui sit cum ratione coniunctus. Indicio est q; potius illũ excudit abrupta musica, sicut & omnia alia quæ perturbant rationem, ueluti solanũ & madrangora atq; cicuta. Amorem igitur & odium nõ excitat musica, quia amor & odium alicuius sunt amor & odium, musica aũt generales solum mouet animi affectus. Et commiseratio, licet sit Didonis aut Phillidis, tamen est generaliter miserentis. Quęramus ergo rursus qui sint affectus generales animi. Et sanè uidenᷣ esse lætitia atq; tristitia, impetus & remissio: sęuitia ac misericordia & audacia. Sũt tria ferme cõiũcta simul impetus & sæuitia atq; audacia, quoniã cũ motu perturbato animi sunt eiecta ratione. Ob id unũquodq; horũ ab iracundia deriuatᷣ. Quapropter & ira rationẽ expellit aut suppeditat. at ratio perturbat, aut ab immodicis sonis, aut incõptis et magnas mutationes

nes habentibus atq; asperis. Hæc autem, ut ita dicam, nulla est musica. Sed neq; musica ulla tristitiam gignit, cum ut dixi, tristitia nil aliud sit quàm mortis imago, musica aūt uitam fouet. Vnde nō immeritò fertur Xenophilus musicus centū quinq; annis sine aliquo incōmodo uixisse, quod singulare esse exemplum in humana uita refert Plinius. Relinquitur igitur tandem, ut musica maximè moueat tres affectus lætitiam, remissionem & misericordiam. Et quod ex his postmodum ad labores insurgamus intentius, hoc non est ex musicę ui aut facultate, sed cōsequentibus ad illa alia causis. Neq; ergo horū causas ex diuisionibus atq; distributionibus uoluntarijs musicæ cōsiderare oportet, sed ex ipsa rerū natura atq; essentia. Veluti intentionis et remissionis, asperitatis atq; suauitatis celeritatis ac tarditatis, cōsonantium aut dissonantium uocū atq; mutationis: hæ enim differentię præcipuę sunt uocum, uel etiam teste Aristotele. Verùm nō obscurum est: quemadmodum remissiones fiant animi affectuum, cū remittuntur uoces aut intendantur ad earū intentionem. In lib. de Audibilibus.
Sed non est æqualis ratio, quoniam natura nostra ad remissionē naturaliter inclinata est, ad intentionem non ita, sed per uim quandā aut medio uoluptatis, aut cum anima purior est à corporis impedimentis. Et ob id ad studia nil aptius est pura sobrietate: nihil ineptius crapula atq; temulentia. At lętitię causę sunt, & cōcordia uocū, & mutatio ex aspera in suauem, nō secus ac eius qui euadit è paupertate uel è molestia aliqua aut dolore aut alio incōmodo, tum intensio uocū ac liber sonus. Vnde in lętitia solent homines exclamare. At ad cōmiserationem mouendam omnia remitti oportet ex magna in parua, adeoq; deficientem ex aspera in leuem, ex ueloci in tardam, ex dissona in consonantem. Antiqui ergo (ut author est Cælius Rhodiginius) Dorico ad temperantiam & moderationem utebantur, scilicet quòd non haberet præcipites lapsus, neq; arduas intentiones: Phrygio ad impetum & bellicum ardorem, scilicet per asperas intentiones: Lydio ad fletus & lamentationes per casus & remissiones longas ac suaues: ideo funeribus peculiaris: Mixolydio ad commiserationem, ut defectiones interponantur & breues abruptæq; remissiones, iuuantq; in hoc plurimum & sensus uerborum, familiaris hic tragædijs: Aeolicus qui & Ionicus tranquillitatis animi author est somnumq; conciliat: Dorico non absimilis sed suauior & mollior: ideò chromatici generis. Quę uerò ad cœli motus referuntur, diapason quidem refertur ad motum diurnum, nam maximo constat, & exactissimo interuallo, unusq; est in omnibus & iucundissimus & omnia continet, uelut & diurnus motus. Proprius autem tàm erraticis quàm fixis, qui etiam æqualitati propinquior est, & ad maiorem distantiam scilicet declinationis signiferi ab æquinoctij circulo ad diapente refertur. Rursus diatessaron quòd minimo cōstat interuallo ac maximè inæquali, & per se quidem quasi non necessario ad motum in latitudinem refert, is enim Lib. 9. ca. 3.
exiguus

exiguus est & inæqualis. Ex horum itaq; duorum cõpositione quemadmodum et ex diatessaro & diapente conformatur diapason, pulchra construitur exortus & occasus syderum ratio, quæ primo motu cõstat.

Porrò de participatione diapente, quam non solũ usurpamus in instrumẽtis fistularum organis dictis: sed etiã in fidibus monachordorũ seu clauichordorũ (ita.n. nunc uocant instrumẽta quib. caruerunt antiqui) nõ alia est ratio, quàm q̃ dicta est constituendarũ consonantiarum in ditonis & semiditonis sextaq; uraq;. Vt cũ quatuor consonantiæ suauiores efficerent, necesse fuit unã, scilicet diapentẽ uariari. Exempli gratia, sint fides expositę octo, & ut constituat proportio h ad c, ut 128 ad 80, id est ut 8 ad 5, c facta est remissior octogesima, quare cũ 81 diapente habeat ad 121 cũ dimidio, erit ad 80 maior $1\frac{1}{2}$, id est octuagesima parte 120, quare intentior diapente. At in diapaso omnia ad idẽ redeunt: horũ etiam causa semitonia nigra illa addita sunt. Sed hęc tractatio ꝓprium locũ exigeret, secus esset nimis curiosi illa huc traducere. quemadmodum, & ut uellemus Philosophiam naturalem, moralẽ, & mathematicã ad musicã traducere ꝓportionẽ. Melius sanè fuisset subtilioribus rationibus hac mensuris motuũ astrorũ ꝓut cõuenit (quantũ fieri potuit) aptasse.

a	ut
b	re
c	mi
d	fa
e	sol
f	re
g	mi
h	fa

Propositio centesimasexagesimaseptima.

Proportionem musicam ad sapores & odores coaptare.

Com. Melius fecisset Ptolemęus, si hãc ꝓportionem ad sapores & odores et picturas, quemadmodũ inuenimus nos, applicasset, uel ut Vitruuius ad machinas, poterat eñ hoc scire, cum Vitruuius plusq; centum quinquaginta annis Ptolemęũ antecesserit. Et quanq; Latinè scripserit, non tam turpè erat latina legisse, aut cõuersa ab alio quopiam intellexisse, q̃ nesciuisse necessaria pulchraq; inuenta aliorum clarorum uirorum, & quod deterius erat, rerũ memorabilium loco fabulas subtexuisse. Ergo ut ad rem ueniam: musica proportio bifariam inuenit in saporibus: simpliciter, & ex comparatione, & simpliciter quidem summa suauitas ad diapason refertur: est enim suauissimus concensus in saporibus, ergo dulce ei respõdet, ut simplex, quid enim suauius esse potest in utroq; genere. At pinguis, qualis in carnibus & ouis benè pręparatis ad diapẽte refertur, est enim & ipse suauissimus post dulce, atq; in suo genere perfectus, diatessaron uerò optimè salso cõuenit. Hic enim per se improbus est & insuauis, sicut etiam sapor salsus est, diatessaron aũt cum diapente perficit diapason, & cum diapaso inutile est, et discordat, ita sapor salsus cum pingui summam delectationem affert: cum dulci adeò parum congruit, ut melius societur cũ amaro, uelut in oliuis benè salsis. Ergo salsus sapor cum diatessaro ad unguẽ congruit rursus semiditonus cũ insipido, & astringens cum ditono conueniunt ad unguem, nam uterq; nõ illepidus, & cum dulci conuenit, ita semiditonus & ditonus cum diapa

so con-

ſo conueniunt,uterque etiam horum ſaporum parum mouet ſenſum,& inter ſe ſunt quaſi ſimiles quod ditono accidit & ſemiditono,ſed & neuter horum cum pingui conuenit,neq; ditonus aut ſemiditonus cum diapente congruit,diſcordat enim hęc compoſitio non parum.Rurſus & in hoc ſimiles ſunt quod diateſſaron cum ditono & ſemiditono plurimum conuenit,ita & inſipidum, & aſtringens cum ſalſo bellè cōueniunt.Diateſſaron enim cum ditono ſextam efficit maiorem,& cum ſemiditono minorem quę utriq; conſonant,non tamen plus ſuaues per ſe ſunt,quòd dulci & pingui carent,ut nec ſexta maior aut minor, q̃d neq; diapaſon perficiant neq; diapente: Acris autẽ ſapor ſextæ maiori ſimilis eſt, acidus minori: mutuo conueniunt cum inſipido acris,& cum aſtringente acidus, quemadmodum & ſexta maior cum ſemiditono,& minor cum ditono copulatur perficientes diapaſon:ſed minus ſuauem, quia abeſt diapente ibi,quia abeſt pingue: auſterum uero cum acri moderato conuenit,propterea bene uterq; cum inſipido iungitur, unde illud Epigrammatici:

V t ſapiant fatuæ fabrorum prandia betæ,
O quam ſæpe petet uina piperq; coquus.

Piper enim acre eſt,& uinum auſterum eſt,Et iuſta querela Ciceronis in Epiſtolis familiaribus,qui à maluis fatetur ſe ictum, ut deciderit in lienteriam:conueniunt ambo hi ſapores cũ dulci & pingui, uelut & utraque ſexta maior & minor cum diapaſon & diapente,at neuter cum ſalſo,nam neq; diateſſaron cum ſexta maiore uel minore iungi poteſt. Amarus autem ſapor tono perſimilis eſt,diſſonus enim per ſe eſt ſemper,& amarus per ſe odioſus tonus origo eſt omnium conſonantiarũ,ita omnes fructus,ſeu dulces ſeu aſtringentes,ſeu acidi, ſeu acres prius amari ſunt:tonus præterea nulla cum conſonantia peius coit quàm cum diapaſo , ita neq; amarus ſapor infelicius iungitur quàm cum dulci,amarus quoq; ſapor cum ſalſo magis conuenit quã cum ſalſo,ita tonus additus diateſſaro,perficit diapente dulciſsimam conſonantiam,ut multi oliuas benè ſalſas prætulerint faſianis : tantum conuenit ſalſo cum amaro, amarus, quoq; ſapor leuis non abhorret à pingui, deteriorem tamẽ aliquanto efficit, ut intortis ex abſynthio ouis & caſeo, atque in uitibus in quibus coma abſynthij incocta fuit parum, degenerat tamen ſapor ille à pingui:ita tono addito ad diapente fit ſexta maior, non adeò ſuauis ut diapente,attamen nõ prorſus inſuauis. Similiter ſi tonus addatur ad ſemiditonum aut ad ditonum ex altero fit diateſſaron, qui non concordat ex reliquo tritonus omnium aſperrimus. Ergo cum idem fiat coniuncto amaro cum inſipido,ac deterius cũ aſtrin-

gente,uelut in acerbis glandibus, quibus nihil tristius gustari potest.Manifestum est igitur optime conuenire hanc saporum diuisionem cum musica proportione.

Cumq́ sapores ex septem planetis pendent manifestè, Saturnus em̄ habet astringens,quoniam frigidus est & siccus.Iupiter pingue cōtraria ratione,& quoniā hic suauis est,ille tristis,aere & austerum cōueniunt soli,apparetq́ in eis uis maxima ad spiritū uitalem cōfirmandum,uiresq́ oēs adauget,uelut & Sol.Venus habet dulce:demonstratione hoc non indiget.Mars salsum & cū peruersè dispositus est,amarū.Luna insipidum. Mercurius acidū,etenim frigida est & humida Luna,& Mercurius tenuitatē quandam habet cū temperamēto moderato,cuiusmodi fermè est acidus sapor,quanq́ ad frigiditatem declinet,parū enim habet uiriū Mercurius q́d minima sit stellarum,ut suprà docuimus.Huiusmodi ergo ratione considerata Luna ad semiditonū pertinebit Mercurius ad sextā minorem, Sol ad sextam maiorem,Mars ad tetrachordū, Saturnus ad ditonum, Iupiter ad diapente,Venus ad diapason,unde plena illius dona uulgaris felicitatis opum honoris amoris & uoluptatis,post quem est Iupiter,ut sine his duobus omnino nulla possit esse felicitas.

Sed & in circulo signiferi aliquam musica proportio habebit rationem: diapason em̄ erit & totius ad dimidium, & besis ad trientem,& dimidij ad quadrantem,& trientis ad sextantē, diapente aūt totius circuli ad bessem,& dodrantis ad dimidiū,& dimidij ad trientem,& quadrātis ad sextantē,diatessaron aūt totius circuli ad dodrantem,& besis ad dimidiū,& trientis ad quadrātem:itaq́ in hoc solo cū Ptolemęo concordamus,in reliquis duobus nescio quaratione Ptolemeus omiserit unam cōiugationem,nam cū essent quatuor in diapason & diapente,tres tantum numerauit. Reliquas aūt quatuor per integra signa numerare licebit,ad rationē,tamen aspectuum deducere non possumus,propterea efficaciam quandam habent etiam signorum mutationes,sed harmoniam non perficiunt, nam & si sumamus sesquiquartam & sesquiquintam, ut in his sesquialteram, seu diapente constituamus,aut tria aut sex signa accipere oportebit:utrunq́ fuerit,reliqua pars ad diatessaron pertinere minimè potest:quamobrem conuenientius esset meo iudicio,ut totus circulus non ad diapason,uelut Ptolemæus,referretur, sed potius ad diapason diapente: ita enim constitutis quatuor, quinque, sex,duodecimq́ numeris,constaret tota ratio harmonica, diuiso etiam diapente in ditonum & semiditonum.sed de hoc satis.

Reuertamur ad sapores, in quibus diximus aliam esse rationem musicam iuxta cōpositionem:cum enim inter sapores qui quouis modo

modo conueniunt, dupla fuerit optimi saporis proportio ad deteriorem, medius uerò ad deteriorem sexquitertia, optimus ad medium sexquialtera, sapor ille optimus erit. Et primum quidem id in pingui tanquàm medio dulciq; & salso experiamur, similiter in salso, acri, atq; insipido. Manifestũ est enim quod horum optimus est insipidus, quia per se ferri potest, salsus autem medius, acris deterrimus, superabit ergo insipidus salsum sexquialtera, acrem dupla proportione, salsus acrem sexquitertia. Rursus dulcem copulemus cum acri, & cum insipido aut cum acido, & insipido præstabit, ut dulcis dupla, aut quadrupla, aut octupla proportione insipidum superet, id est, per diapason, uel bis diapason, aut ter diapason: acidum uero insipidum sexquitertia superabit. Alia rursus ratio in coniunctionibus saporum ad sensum uniuscuiusq; referenda est, in quo enim est summa uoluptas comparatione ad illum, hic statuemus diapason, optimumq; constituemus saporem, dimidium illius quod ad uires attinet ex minus iucundo sexquitertium, ad illum minus iucundum ex medio. Exempli gratia, proponamus ut alicui austera maximè iucunda sint (nam salsa nemini, quòd nullum animal præter hominem, imò ne plantæ quidem nisi admodum paucæ, & sui generis salso alantur, iucunda esse possunt: cum salsum amari pars sit, eoq; deterius quod acutum sit salsum, unde in sale nullum animal nascitur: in absynthio, quanquàm ualde amaro, exiguum muscarum genus, nigrum tota æstate oritur, & in ruta uermiculi) is ergo austeri, quantum satis erit sumet, dulcis tãquàm medij. gratia exempli (nam optima ad extremum oppositum uix transire queunt) bessem accipito huius, gratia exempli, tanquàm deterrimi astringentis dodrantem, ut sit dulcis ad astringentem dupla proportio. Sic ergo constituetur iuxta naturam propriam musica proportione sapor iucundissimus.

Idem quoq; in odoribus & eadem ratione, sed ex saporibus hoc cum intellectum sit, frustra fuerit consumere tempus, eadem enim in omnibus ad sciendum proportionem intelligenda erunt.

Propositio centesimasexagesimaoctaua.

Picturarum proportiones explicare.

Est pictura imago rei corporeæ quanquàm, & per illam, & actiones, & cogitationes, sed non nisi ut per corpora significantur: ut ergo corpora ipsa referamus, coloribus opus est, nam corpora, colorata sunt, secundò ipsa rerum natura scientiaq; illarum, unde pictorem multiscium esse necesse est. tertium est, ut minimas earum differentias explicare norit. quartum, ut affectiones, uelut in ira- Co=

toruborem, ciliorum cōtractionem, tumorem faciei in ambulante inclinationem quandam, flexionem cruris atq; similia. quintum est lux coloribus exhibēda, sed de horum nullo propositum est hic loqui, quandoquidem hæc usu magis & consideratione, quàm ratione constent proportioneue, nec sint adeò admiranda ut neque simplex magnitudo quā sexto loco reponere possumus. Tria ergo uidentur esse præcipua quorum nunc ratio habenda esset, ut sint in totum nouem, sed unum ex his relinquemus, tum quia alienum ab hac consideratione, tum quia alibi pertractatum atq; etiam ab alijs, neq; adeò admiratione dignum scilicet magnitudo picturarum respondens magnitudini corporum iuxta situs differentiam, nam quę altiores sunt paulo latiores atq; in superiori magis parte quam in inferiore, multò autem longiores esse oportet, sic & quæ à latere erunt eadem ratione iuxta aspectus ingredientium rationem. Verum hoc ut dixi omittamus, & de duplici miraculo in pictura loquamur, scilicet distantia magna quam in parua tabella referimus, et corporeitate quam in plano repræsentamus. Horum autem duorum aliqua communia sunt aliqua propria. Dicemus ergo primū de corpore ita pingendo, ut palàm extra tabulam prominere uideatur. Hoc autem primum ex forma sumitur, nam si corpus in plano sit necesse est, ut partes illius quædam prorsus abscondantur, partes aliæ non prorsus, aliæ prorsus sint in conspicuo. Ergo picturam talem fingere oportebit, quæ partes singulas pro ratione ostendat aut occultet. Secūda ratio est quod ima corporis obscura sunt, summę partes lucidę & claræ ac lumine quasi dealbatæ: media, media quadam ratione ut in columnis, tantumq; potest hæc ratio, ut uel sola picturas fallere nos faciat corpora eas esse putantes. Oportet autem imum esse ad unguem simile in colore colori anguli loci & summum parti quæ se oculis maximè subiectam præbet & claram: media uerò qualia ex umbris obscurari solent. Tertia ratio est pro modo partium iuxta obliquitatē aspectus: nam inspicienti ab in c d ex e oculo: depingemus in c d iuxta obliquitatem suam, quia cum c d uideatur per lineas e a c & e b d, & eleuatum in situ a b, necesse est ut uideatur in situ a b, ergo eleuatum à c d. Est & alia consideratio proportionis ad proxima remotaq;, gratia exempli, si homo esset post columnam a b, lateret eius pars, quæ est propinquior parieti c d, ergo si depinxerimus hominis partes tantum dextram, reliquum sub umbra, cogitur oculus iudicare columnam eleuatam à pariete. Demum omnia hæc ita sunt subijcienda oculis, & per minimas differentias



rentias & animaduersiones ita dijudicanda, atque experimento subjcienda, tum proprio, tum aliorum non artis inexpertium, ut res prorsus absoluta uideatur, atque in hoc multum refert multiplices partes secundum longitudinem coloribus distinguere ad hoc aptis, qui sunt obscurus, subobscurus, cinereus, qualis silicis candidus sine luce, demum etiam aliquid nigri adijciendum, nam diuisio secundum longitudinem multum impedit, hanc repræsentationem iuuant, & extrema bene coaptata, uelut scapi imi, & capitula & supremi, tum trabeationes ex materia coronæ, zofoni, tænia, epistylia, plinthi, echini, hypotrachelia, astagali, apophyges. Quæ etiam in parte inferiore cum spira seu basi & limbo & toro & plintho inferiore, & stylobata, et alia tænia summa diligentia, & cum eleuatione ac magnitudine ultra columnæ limites extendantur. Sic in stylobata ratio diapente constat, cui solet addi utrinque sexta pars pro coronice, manifestum est autem, quod in ea constat musica ratio diapason ex diapente & diatessaro, compositi nam duæ sextæ partes, altera utrinque adiecta tertiam conficiunt ut sit diatessaron supra diapente. In regionibus autem & spatijs depingendis eadem fermè seruanda sunt duobus tamen adiectis, quorum unum est ut longinquissima pars, nō per nigrum aut obscurum, sed cœruleum colorē, qualis in cœlo determinanda est (nisi nox fingatur) nam cœlum longissimè à nobis distat, ita nubes coloribus proprijs, & montes cum niuibus, & spatia uelut fluminis alueus, mare, lacus, atque hæc omnia per colores distantiæ finguntur, uelut fluminis pars propior clara & lympida, & colore aqueo cernitur remota obscura, quæ maximè procul abest nigra. Sed maxima est confirmatio in comparationibus: ut si arbores propè magnæ sint, & homines & animalia, in remotiore autem parte minimi, ac quasi puncti magnitudinem referentes, atque ut in his musica non geometrica aut arithmetica proportio seruetur. Equidem si quis iudicio hæc consequatur, ac diligentia quæ scribi non possunt, sed contemplatione habentur, sensu quoque, quem experimentum docet, nec ipsum mandare literis, licet ex rationibus tamen, quas hic docemus intelliget parum differre repræsentationem à re ipsa corporea. Sed de his hactenus, quæ si diligentius quis persequi uelit sine artis experientia, plus adimet perfectioni rei, quam adijciet. Hoc enim aliâs declarauimus. *In primo Dialectica.*

P 4 Propositio

Propositio centesimasexagesimanona.

Proportionem musicam in instrumentis declarare iuxta compositionis rationem.

Cor. Tria sunt instrumentorum genera, in quibus maximè relucet ratio compositionis musicæ quæ à nobis nunc sunt demonstranda, scilicet machinæ bellicę, ut catapultæ & balistę & scorpiones, & hydraulica instrumenta ad modulationes parata, quæ antiquo tempore maximè in usu fuerunt nunc desita, de quibus Vitruuius agit
Cap. 15. ad in decimo libro. Tertium est æneorum instrumentorum, quorum
18. & in etiam usus desijt in scœnicis theatris, ad intendendam uocem cum
cap. 13. modulatione, ut etiam clamor audientium & uulgi cum uoluptate
Cap. 5. excipiatur, de quo idem in quinto libro egit. Sed nil melius quàm
» uerba ipsius explicare de hoc tractantis, sunt autem hæc. Musicen
» autem sciat oportet, uti canonicam rationem & mathematicam no-
» tam habeat: præterea balistarum, catapultarum, scorpionum tem-
» peraturas posit rectè facere. In capitulis enim dextra ac sinistra
» sunt foramina homotonorum, per quę tenduntur ergatis aut sucu-
» lis & uectibus è nerno torti funes, qui non præcluduntur, nec præ-
» ligantur nisi sonitus ad artificis aures certos & ęquales fuerint. Bra-
» chia enim quæ in eas tentiones includuntur cum extenduntur æ-
» qualiter & parter utraque plagam emittere debent. Quod si non ho-
» motona fuerint, impedient directam telorum missionem. Item the-
» atris uasa ærea, quę in cellis sub gradib. mathematica ratione collo-
» cant, & sonitũ discrimina, quę Gręci ἠχεῖα uocãt, ad symphonias mu-
» sicas siue concentus componunt, diuisa in circinatione diatessaron
» & diapente & diapason, uti uox scœnici sonitus cõueniens in dispo-
» sitionibus, tactu cũ ostenderit aucta cũ incremẽto clarior et suauior
» ad spectatorũ perueniat aures. Hydraulicas quoque machinas & cæ-
» tera q̃ sunt similia his organis sine musicis rationib. efficere nemo
» poterit. Capiamus ergo primum illud q̃d est manifestius, scilicet de
» hydraulicis organis quorum meminit Suetonius in Nerone: Reli-
» quam diei partem per organa hydraulica noui & ignoti generis cir-
» cunduxit, ostendensque singula de ratione ac difficultate cuiusque dif-
» ferens iam se prolaturum, ut constet illa fuisse magni opificij quæ
» nostra ętate desiere. Restat unicum & ualde leue exemplũ auiculæ
æneæ uel ligneæ resonantis. Certum est aëre effici sonum, sed ita misceri aquæ, ut dulcior & mollior non solum euadat, sed etiam acutior ac modulatior. Eadem autem ratio maris: sed cum aquæ corpus moueatur, uidetur difficile seruare proportionem. ea prima difficultas. secunda est, quod cùm aqua moueatur, uix fieri posse uidetur ut totum seruet uocis integrum tenorem. tertia ob illius consumptio-

ſumptionem. Propterea nil mirum eſt ſi Nexo de his ſubtiliter di-
ſputauit, mirum fuit quod in tanta animi perturbatione niſi ad
amentia, ut illi putant, referatur. Sed quid iam amplius uagor, extat Lib. 10. ca.
compendioſa ratio conſtructionis illius apud eundem Vitruuium 16.
ubi Philander ex Atheneo ſonus hydradis ſuauis admodum atq; Lib. 4. cap.
iucundus auditu eſt: ita ut omnes concinnitate capti conuerterent, 24.
fuitq; Alexandrinę urbis inuentum authore Cteſibio tonſore, eſt
autem magnæ Clepſydræ inſtrumentum non abſimile, ſunt enim
fiſtulæ in aquam contortæ, quæ, cùm aqua à iuuene quopiam per-
cutitur, axinis per organum tranſeuntibus inflantur, periucũdum-
que ſonum emittunt. Eſt autem aræ rotundæ hoc inſtrumentum
perſimile inuentumq; Ptolemæi ſecundi Euergitę temporibus, de
quo eundem Cteſibium ſcripſiſſe ferunt. Fiebant autem ex ære &
baſis eligno cum regulis, dextra ac ſiniſtra ſcalari regula compactis,
aqua autem in ęrea arca continebatur. Facilè autem eſt per hæc reli
qua inuenire: nam epiſtomijs includebatur aër atq; reſerabatur, &
modus erat per uectes: non tamen octo fiſtularũ & exinde uocum
numerum inſtrumentum id ſuperabat organa noſtra ut locupleti-
ora ita aſperiora. Liquet ergo ſi fabrilis omnis ars ad Architectum
pertinet, illum etiam hac ratione oportere eſſe peritum muſicæ. Lib. 5. ca. 5.

De Vaſis uerò æneis theatri quod melius eſt quàm ut eundem «
authorem conſulamus, dicentem uaſa ęrea pro ratione magnitudi- «
nis theatri ita fabricentur, ut cum tangũtur, ſonitum facere poſsint «
inter ſe diateſſaron diapent, ex ordine addit diapaſon, poſtea inter «
ſedes theatri conſtitutis cellis ratione muſica ibi collocentur: ita uti «
nullum parietem tangant circaq; habeant locum uacuũ et à ſummo «
capite ſpatium, ponantq; inuerſa & habeant in parte quę ſpectat ad «
ſcenam ſuppoſitos cuneos ne minus alios ſemipede, contraq; eas «
cellas relinquantur aperturę inferiorum graduum cubilibus lon- «
gę pedes duos altæ ſemipedem. Et ſi non erit ampla magnitudine «
theatrum, media altitudinis tranſuerſa regio deſignetur, & in ea tre «
decim cellæ duodecim æqualib. interuallis diſtantes conſornicentᷣ «
uti ea echea quæ ſupra ſcripta ſunt, ad neten hyperboleon ſonan- «
tia in cellis quæ ſunt in cornibus extremis utraq; parte prima col- «
locentur, ſecunda ab extremis diateſſaron ad netẽ diezeugmenon, «
tertia diateſſaron ad neten parameſon, quarta ad neten ſynemme- «
non, quinta diateſſaron ad meſen, ſexta diateſſaron ad hypaten me- «
ſen in medio unum diateſſaron ad hypaten hypaton. Quæ ſequun- «
tur & ad intelligentiam prædictorum melius ex Gulielmo Philan- «
dro emendata ſic tranſcribemus: Eas regiones in tredecim cellas «
diuidit æqualibus interuallis: id eſt, cellas paribus uiciſsim inter- «

ſticijs

» sticijs dispositas distribuit sex hinc atque hinc & unam mediam, quæ
» tamen non usus, sed partitionis & responsus causa fit in media præ-
» cinctione. In ima præcinctione ponuntur uasa, quę habent harmo-
» nię rationē, hoc modo. In cornuū cellis collocantur quæ sonitū ha-
» bent netes hyperboleon. Subsequuntur utrinque quæ sunt ad neten
» diezeugmenon interuallo consonantia diatessaron. In tertijs cel-
» lis sunt quæ ad neten paramesen interuallo item diatessaron, quæ
» sunt in quartis tono solummodo distant & sunt netes synemenon.
» In quintis cellis sunt ad mesen interuallo diatessaron. In sextis cellis
» ad hypaten meson, itē diatessaron spatio. In media cella sunt ad hy
» paten hypaton interuallo diatessaron. In media præcinctione sunt
» uasi chromatos, collocantur autem in cornibus uasa quæ sunt ad
» paraneten hyperbolem. In secundis cellis ad paraneten diezeugme
» nō spatio diatessaron, in tertijs ad paraneton hynemenon spatio dia
» pente. In quartis ad lichanon meson internallo diatessaron. In quin
» tis ad lichanon hypaton, itē diatessaron. In sextis ad paramesen q̊d
» spatium ad paraneten hyperboleon est diapente ad paraneten hy-
» nemenon diatessaron. In chromatis media cella nulla sunt uasa,
» quod à lichano hypaton ad proslambanomenon, aut ad aliam o-
» mnino decem & octo uocum nulla sit consonantia, sunt enim hæ-
» mitonia tantum duo & tonus. In tertia præcinctione collocantur
» uasa diatoni. Et in cornibus quidem ea quæ sunt ad paraneten hy-
» perboleon. In secundis cellis ad paraneten diezeugmenon spatio
» diatessaron. In tertijs ad paraneten hynemenon diapente. In quar-
» tis ad lichanon meson diatessaron. In quintis ad lichanon hypaton
» diatessaron. In sextis quæ ad proslambanomenon diatessaron spa-
» tio. In media quæ sunt ad mesen, quod ea ad proslambanomenon
» habet consonantiam diapason, & ad lychanon hypaton diapente.
16. Hæc autem ex figura patent in opere de Subtilitate descripta.

Porrò quod ad machinas attinet. Sit catapulta, cuius rudens ab quam oportet trahere, si emittere debeat lapidem, aut scorpio sagittam ad aliquod signum puta c, cum ergo sonus c a & c b homotenus fuerint, non solum æqualiter pertractæ erunt c a & c b, sed etiam æquales: nam si æquales essent, & inęqualiter tractæ, aut inęquales & inæqualiter tractę sonū diuersum reddēt euidenter. At si inęquales & ęqualē sonum reddant, erit tñ ut fidis notæ quæ strepitum edit duplicem, & effigiem oculis multiplicē, unde sagitta in partem aduersam dirigitur rudētis intentioris, atque hæc ex Vitruuio eodem dum de his agit.



Propositio

Propositio centesimaseptuagesima.

Coniugationes cuiusuis numeri breuiter inuenire.

Sint gratia exempli decē homines, & patet quod possent esse sin guli, & hoc decē modis, quia sunt decē, ut Petrus & Ioannes: item, possunt esse omnes simul, & hoc uno modo tantum, & possunt esse duo, & hoc potest uariari q̄draginta quinq; modis: & possunt esse octo, & manifestum est, quod totidē modis uariantur, scilicet quadraginta quinq;, nam cum erunt octo, duo qui relinquūtur, uariari possunt 45 modis, ergo & illi octo ad unguē totidem modis. Et similiter tres quot modis uariantur tot modis septē, & quot modis quatuor tot sex: quinq; autem quia sunt dimidium decem, pluribus modis uariantur. Et ideò pro ordine huius detrahes unū, ut si sint undecim uiri pones decem, si decem pones nouē, & colliges naturalem seriem numerorum, ut infrà uides uno semper termino deficiente: & ex priore ordine, ubi uidebis semper etiā duplicari numeros: ut 3. 6. inde sub 6. 10. & 20 à latere, & sub 20 35. & à latere 70 duplum 35, & sub 70 126, & à latere 252, & hoc, p cognitione q̄d recte sis operatus. Secundò animaduertes sequētes ordines fieri ex recta linea priorum, ue

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	10	15	21	28	36	45	55		
4	10	20	35	56	84	120	165			
5	15	35	70	126	210	330				
6	21	56	126	252	462					
7	28	84	210	462						
8	36	120	330							
9	45	165								
10	55									
11										

lut sextus ordo est 7. 28. 84. 210. 462. ita incipiendo in primo ordine à 7, & tendendo ad dextram, inuenies illos eosdem numeros ad unguem, & ita in septimo ordine 8. 36. 120. 330. à sinistra inuento 8 in primo ordine, & procedendo ad dextram, inuenies 36. 120. & 330. Tertium est quod numeri ultimi à medio sunt ijdem, ut 462 & 462. 330 & 330. 165 & 165. 55 & 55. 11 & 11. Et seorsum, ut dixi, remanet 1. Oportet igitur colligere numeros angulares, ut à latere uides, & fit 2047 numerus coniugationum, tot enim modis possunt uariari. Et si essent decem tantum, ut ab initio proposui, primus ordo finitur ad 10, secundus ad 45, tertius ad 120, quartus ad 210, quintus ad 252, sextus redit ad 210, septimus ad 120, octauus ad 45, nonus ad 10, decimus ad 1. Et ita colligeretur summa ex extremis numeris angularibus 1023. Et tot erunt coniugationes. Hic uides quia numerus 10 est par, et quod adempta monade, relinquitur 9, qui est impar quòd medius qui pertinet ad quintum ordinem est maxi-

mus, & eſt 252, & eſt coniugatio quinarij: hoc uolui dixiſſe, ut intelligeres rationes colligendi ſingulos ordines ſeorſum. Quod ergo attinet ad collectionem maximi numeri, primus ordo ſeruit ſemper ultimo relinquẽdo monadem, & ſecundus penultimo, & tertius antepenultimo, & ita de alijs, nam ſi ſecundus uariatur 55 modis, & penultimus uariabitur 55 modis. Et ſi tertius uariatur 165 modis, antepenultimus uariatur 165 modis. Et ita de alijs.

11
55
165
330
462
462
330
165
55
11
1
2047

10
45
120
210
252
210
120
45
10
1
1023

Corm. 1. Hæc autem ratio ſatisfacit multum, & eſt neceſſaria in temperiebus corporis humani. Vt in ſecundo, De dentibus. Et etiam ut quælibet diſciplina quàm breuiſsimè tradi poſsit, ut gratia exempli, medicina tota in una pagina, dico medicina nõ ſolum Græcorum, ſed etiam Arabum & Latinorum, & etiam longè plus: nam ſi tradatur uigintiquatuor regulis ſimplicibus, & ex illis fiant coniugationes 16777215, manifeſtum eſt quod erunt regulæ omnes hæ multo plures, quàm contineantur in omnibus libris Græcorum, & Arabum, & Latinorum, qui extant. Et tamen perſpicuum eſt, uigintiquatuor regulas una pagina commodiſsimè contineri. Et hoc aliâs docui, quanquàm credam me erraſſe in ſupputatione, nam locum inuenire non potui. Vnum eſt id certum, quòd hæc ratio quàm nunc explicabo, eſt uera & demonſtratiua, & facillima.

Cum enim ſuperior ſit uera & demonſtratiua, non eſt tamen facilis, & præcipuè in magnis numeris. Et ideò inueni hanc, quæ (ut dixi) facillima eſt: adde numero propoſito monadem, inde conflari inuenias numerum à monade in eodem ordine, & ab eo detracta monade habes numerum coniugationum. Exemplum, ſi ſint 10 adde 1 fit 11. Vndecimus ergo numerus in proportione dupla eſt 1024, detrahe 1 & relinquantur 1023 numerus coniugationum, ut in priore ſupputatione. Item ſi ſint 11 numeri adde 1 fit 12, duodecimus ergo numerus in proportione dupla eſt 2048, detrahe 1 relinquuntur 2047, coniugationes 11, ut prius in ſuprà ſcripto exemplo. Et ita pro uigintiquatuor regulis adde 1 fit 25, uigeſimus quintus igitur numerus in ordine duplæ proportionis à monade eſt 16777216, ergo detracta monade relinquitur numerus (ut dixi) regularum & coniugationum uigintiquatuor regularum, quæ tamen non ſint contrariæ inuicem: nam tunc eſſent pauciores. Et quia in iſtis numeris duplicandis poſſes facile incidere in errorem, diuide ultimum per 16, & ſi nihil ſupereſt, rectè proceſsit opus: ſin autem

autem aliquid superſit, aberraſti. Vt autem habeas numeros ſingulorum ordinum, in quauis multitudine, deducito numerum ordinis à primo, & diuide per numerum ordinis ipſius reliquum, & illud quod prouenit, ducito in numerum maximum præcedentis ordinis, & habebis numerum quæſitum. Velut ſi ſint undecim, uolo ſcire breuiter numeros, qui fiunt ex uariatione trium. Primum deduco pro ſecundo ordine 1 ex 11 fit 10, diuido per 2 numerum ordinis, exit 5, duco in 11 fit 55 numerus ſecundi ordinis. Inde detraho 2, qui eſt numerus differentiæ ordinis tertij à primo ex 11, relinquitur 9, diuido 9 per 3 numerũ ordinis exit 3, duco 3 in 55 numerum ſecundi fit 165, numerus tertij ordinis. Similiter uolo numerum uariationum quatuor, deduco 3 differentiam 4 à primo ordine ab 11, relinquitur 8. diuido 8 per 4 numerum ordinis, exit 2, duc 2 in 195 fit 330. numerus quarti ordinis. Similiter pro quinto detraho 4 differentiam à primo ordine, relinquitur 7, diuido per 5 numerum ordinis exit $1\frac{2}{5}$, duco in 330 numerum præcedentis ordinis, fit 462 numerus quinti ordinis.

1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	1024
12	2048
13	4096
14	8192
15	16384
16	32768
17	65536
18	131072
19	262144
20	524288
21	1048576
22	2097152
23	4194304
24	8388608
25	16777216

Ex hoc colligitur manifeſtè modus conuertendi proportionem Corm. a.
arithmeticam in proportionem miſtam: dico miſtam, quia oportet addere monadem in priore numero: deinde quia numerum terminorum oportet ſumere iuxta numerum aſsignatum, ſcilicet addita monade: demum, quia oportet detrahere monadem ipſam. Eſt tamen ſumpta à proportione Geometrica ut liquet, ſcilicet continua dupla.

Propoſitio centeſimaſeptuageſimaprima.

Propoſitis duobus quibuslibet numeris, quotuis alios, ſeu in continuum, ſeu medios in continua proportione arithmetica, geometrica & muſica inuenire.

Hæc tota propoſitio pendet ex intellectu diffinitionis earum. Com.
Sint ergo propoſiti duo numeri 2 & 3, & uelim tertium in continua proportione arithmetica, duplico quemuis, ut pote 3 fit 6, de- Diff. 20.

traho 2, reliquum remanet 4 tertius numerus. Item uolo quartum, duplico 4 fit 8, detraho 3 remanet 5 quartus numerus: item uolo minorem 3 & 2, duplico 2 fit 4, detraho 3 remanet 1, si autem uellem minorem uno, non posset, quia esset nihil, sed crescendo potest extendi in infinitum, ita capio 2, & ℞ 10, duplico ℞ 10, fit ℞ 40, detraho 2, remanet ℞ 40 m: 2, & ita si uolo quartum numerum, duplico ℞ 40 m: 2 fit ℞ 160 m: 4, detraho ℞ 10 ex ℞ 160 m: 4, remanet ℞ 90 m: 4, & ita 2 ℞ 10 ℞ 40 m: 2, & ℞ 90 m: 4, sunt in continua proportione arithmetica, & ita potest extendi in infinitum. Sed si uellem unum, aut duos, aut tres terminos, uel quouis medio 5 arithmeticæ, diuido differentiam per 1 p: numero terminorum, & partes addo minori numero. Exemplum, uolo tres numeros medios inter 2 & 7 in continua proportione arithmetica, detraho 2 à 7 remanet 5, diuido 5 per 1 p: quam 3, id est per 4, exit $1\frac{1}{4}$, adde ergo $1\frac{1}{4}$ ad 2 fit $3\frac{1}{4}$ primus terminus, cui adde iterum $1\frac{1}{4}$ fit $4\frac{1}{2}$ secundus terminus, cui adde iterum $1\frac{1}{4}$ fit $5\frac{3}{4}$ tertius numerus: fient ergo quinque termini, hoc modo in continua proportione arithmetica $2\ 3\frac{1}{4}\ 4\frac{1}{2}\ 5\frac{3}{4}$ & 7. Rursus uolo totidem, uolo inter 2 & ℞ 32, detraho 2 ex ℞ 32 remanet ℞ 32 m: 2, diuido per 4, qui est 1 p: numero terminorum, exit ℞ 2 m: $\frac{1}{2}$, addo ergo ℞ 2 m: $\frac{1}{2}$ ad 2 fit $1\frac{1}{2}$, p: ℞ 2 primus terminus, cui iterum addo ℞ 2 m: $\frac{1}{2}$ fit ℞ 8 p: 1, secundus terminus, cui etiam addo ℞ 2 m: $\frac{1}{2}$ fit ℞ 18 m: $\frac{1}{2}$, & ita habes tres terminos medios in continua proportione arithmetica inter 2 & ℞ 32, & ita si uelles quatuor terminos, diuideres differentiam per 5, & si uelles quinque, diuideres per sex. & ita de alijs quibuscunque.

Pro Geometrica proponantur, gratia exempli, 2 & 4, si uelim in continua proportione tertium, duco 4 in semet fit 16, diuido per 2 exit 8. & si uelles quartum duc 8 in se fit 64, diuide per 4 exit 16 quartus terminus, & ita in infinitum, & si uelles minorem 2, duc 2 in se fit 4, diuide 4 per 4 exit 1 tertius terminus, & ita si uelles minorem, duc 1 in se fit 1, diuide per 2 exit $\frac{1}{2}$ quartus terminus, & ita habes quosuis terminos, & est similis arithmeticæ hæc operatio, sed in arithmetica duplicamus unum terminum, & detrahimus alium: in geometrica multiplicamus unum terminum ad productum, & diuidimus per alium. Et si uelim terminum in continua proportione 2 & ℞ 10, duco eodem modo ℞ 10 in se fit 10, diuido per 2 fit 5 tertius terminus, & uelim quartum, duco 5 in se fit 25, diuido per ℞ 10 exit ℞ $62\frac{1}{2}$ quartus terminus.

Et si uelles plures terminos medios in proportione geometrica, deducito maius extremum in se secundũ denominationẽ inferiorẽ, id est, si

eſt, ſi uolo duos terminos ſemel, & deinde in minorem, & ℞ cubica producti eſt ſecundus terminus, idem facio de minore in ſe inde in maiorem, & accipio ℞ cu. Exemplum, uolo duos terminos inter 2 & 3, duco 3 in ſe fit 9, duco 2 in 9 fit 18, capio ℞ cu. 18. hic eſt unus terminus, & ita duco 2 in ſe fit 4, duco in 3 fit 12, capio ℞ cu. 12 pro ſecundo termino. Et ſi uolo tres terminos, duco 3 in 3 fit 9, duco 3 in 9 fit 27, duco 2 in 27 fit 54, & ℞ ℞ 54 eſt primus terminus. Item duco 2 in 2 fit 4, duco 3 in 3 fit 9, duco 4 in 9 fit 36, & ℞ ℞ 36, id eſt, ℞ 36 eſt ſecundus terminus, ſimiliter duco 2 ad ſuum cubum fit 8, duco 3 in 8 fit 24, & ℞ ℞ 24, eſt tertius terminus. Similiter uolo quatuor terminos medios, duco 3 in 3 fit 9, duco 9 in 9 fit 81, duco 2 in 81 fit 162, & ℞ relata prima 162, eſt primus terminus, item duco 2 in 2 fit 4, & 4 in 4 fit 16, & 3 in 16 fit 48, & ℞ relata prima 48 erit quartus terminus, item ducendo 3 ad cubum fit 27, & 2 ad quadratum, & fit 4, & 4 in 27 fit 108, & ℞ relata prima 108, erit ſecundus terminus, & ſimiliter ducendo 2 ad cubum fit 8, & 3 ad quadratum fit 9, & 9 in 8 fit 72, & ℞ relata prima 72 eſt tertius terminus. Habebis ergo terminos in continua proportione 2, id eſt, ℞ relata prima 32, ℞ relata prima 48, ℞ relata prima 72, ℞ relata prima 108, ℞ relata prima 172, & ℞ relata prima 243, quod eſt 3, & ita de alijs in infinitum.

At pro muſica, ſi ſint exhibiti duo numeri minores utpotè 2 & 3, uelim tertium terminum, diuido 2 per 1 differentiam exit 2, detraho 1 pro regula remanet 1, diuido 3 maiorem terminum per 1 exit 3, adde 3 ad 3, fit 6 maior terminus. Similiter capio 3 & 4, diuide 3 minorem terminum per 1 differentiam exit 3, detrahe 1 pro regula, relinquitur 2, diuide 4 terminum medium per 2 exit 2, adde ad 4 fit 6 maior terminus. Stiphelius autem erat in ſua regula, nam ſic 12 4 & 3 eſſent in continua proportione muſica ex ſua regula. Dico ergo, quod ſi proponantur 5 & 7, & uelim muſicam proportionem continuare, detraho 5 de 7 relinquitur 2, diuido 5 per 2 exit $2\frac{1}{2}$, detrahe 1 pro regula remanet $1\frac{1}{2}$, diuide 7 per $1\frac{1}{2}$ exit 4 & $\frac{2}{3}$, adde ad 7 fit $11\frac{2}{3}$, reduc ad integra multiplicando omnia per 3, habebis 35, 21, & 15, in continua proportione muſica, nam 35 ad 15 eſt ut 7 ad 3, & 14 ad 6, eſt ut 7 ad 3, eſt autem 14 differentia 21 & 35, & 6 differentia 21 & 15, & ita poſſes continuare inueniendo quartum, quintum, ſextum, in infinitum. Rurſus ſint propoſiti duo termini maiores, uelut 6 & 4, detrahe 4 à 6 exit 2, diuide 6 per 2 exit 3, adde 1 pro regula fit 4, diuide 4 minorem terminum per 4 exit 1, detrahe 1 ex 4, relinquitur 3 minor terminus, & ita propoſitis 6 & 3

differentia est 3, diuide 6 per 3 differentiam exit 2, adde 1 pro regula fit 3, diuide 3 per 3 exit 1, detrahe ex 3 relinquitur 2 minor terminus, & ita potes inuenire quotuis. Gratia exempli, habeo 3 & 2 maiores, capio 1 differentiam, per quam diuido 3 exit 3, addo 1 fit 4, diuido 2 minorem terminum per 4 exit $\frac{1}{2}$, detrahe $\frac{1}{2}$ ex 2, relinquuntur $1\frac{1}{2}$, erunt ergo 32 & $1\frac{1}{2}$, 1. 6. 4. 3. duplicando 2, ut prius in continua proportione musica, quia ergo 632 sunt in continua proportione musica, & 32, & $1\frac{1}{2}$ sunt in continua proportione musica, erunt duplicando 3. 4. 6. 12. in continua proportione musica. Rursus sint propositi maior, & minor terminus, ut 6 & 2, diuides maiorem per minorem exit 3, cui addes 1 fit 4, diuide 4 differentiam 6 à 2 per 4 iam inuentum exit 1, adde ad 2 fit 3 medius terminus, similiter inter 6 & 3, uolo medium terminum in proportione musica, detraho 3 à 6, relinquitur 3, similiter diuido 6 maiorem terminum per 3 minorem terminum, exit 2, addo 1 pro regula fit 3, diuido 3 differentiam iam seruatam per hoc 3 iam inuentum exit 1, addo ad 3 minorem terminum fit 4, medius terminus, sic uolo inter 4 & 6 medium terminum in continua proportione musica, diuido 6 per 4: exit $1\frac{1}{2}$, addo ei pro regula fit $2\frac{1}{2}$, diuide 2 differentiam 4 & 6 per $2\frac{1}{2}$ exit $\frac{4}{5}$, adde ad 4 fit $4\frac{4}{5}$ terminus medius, duc omnes in 5, habebis integros numeros 30, 24 & 20, & sunt pulcherrimæ regulæ, quia posses diuidere 24 & 20 interponendo medium, id est capiendo 6 & 5, diuide 6 per 5 exit $1\frac{1}{5}$, adde 1 pro regula fit $2\frac{1}{5}$, diuide 1 differentiam per $2\frac{1}{5}$ exit $\frac{5}{11}$, adde ad 5 fient termini $5\frac{5}{11}$ & 6, reduc ad integra fient 55. 60. 66. & quia 30. 24. & 20, etiam erant in continua proportione, & 30 ad 20, erat sexquialter, ideò capiam sexquialterum ad 55, & est $82\frac{1}{2}$, erunt ergo $82\frac{1}{2}$. 66. 60. & 55. in continua proportione musica, ergo duplicando 165 132 120 & 110, erunt in continua proportione.

Adnotat Stiphelius, quod cum fuerint tres termini in continua proportione geometrica, & inter primum & tertium interpositus fuerit terminus in continua proportione arithmetica, quod ibi erit proportio musica, & dat exemplum de 12. 9. 8 & 6, sed ita est intelligendum, ut assumpta proportione arithmetica, ut potè 12 9 & 6 unde ut est 9 ad 6, ita fiat 12 ad 8, tunc isti tres termini 12 8 & 6 erunt in continua proportione musica. Et hoc est pulchrum, si ita intelligatur, scilicet ex proportione Geometrica & Arithmetica constituere proportionem musicam.

Ex hoc

Ex hoc patet q̃d in proportione Arithmetica & musica semper, si duo termini fuerint numeri, tertius erit numerus, & in Geometrica idem erit, si medius & extremus fuerint numeri, erit alter extremus numerus, sed tamen si unus euariet, omnes poterunt esse diuersi. Corm.

Propositio centesimaseptuagesimasecunda.

Proportiones Stiphelij describere.

Considerauit Michael Stiphelius quod sumpsit à Boëtio, quasdam inueniri proportiones tribus numeris constitutas, quæ in nullo trium primorum generum continerentur, sed quædam tamen geometricis aliæ musicis assimilarentur, prima ergo Geometricarum est, quotics proportio secundæ ad primam fuerit, uelut differentiæ secundæ & primæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Velut capio 2, 4, 5, proportio 4 ad 2 est dupla talis est 2 differentiæ 4 & 2 ad 1 differentiam 5 & 4, nam in uera proportione Geometrica fit conuerso modo, quia proportio secundæ ad primam est, uelut differentię tertiæ & secundæ ad differentiam secundæ à prima ut in 4. 6. & 9 proportio 6 ad 4 est uelut 3 differentiæ 9 ad 6 ad 2 differentiam 6 & 4. Com.

2 1
2 4 5

Secũda proportio quam ille appellat posteriorem, est in qua proportio tertij ad secundum est uelut differentiæ primi & secundi ad differentiam secundi & tertij: Velut capio 1, 4, 6, proportio 6 ad 4 tertij scilicet, & secundum est uelut 3 differentiæ 4 & 1, ad 2 differentiam 6 & 4, & hæc similiter differt à Geometrica uera in eo quo in Geometrica uera oporteret, ut proportio tertij ad secundum esset ut differentia tertij & secundi ad differentiam secundi & primi. Differt à priore, quoniam in illa differentiæ seruant eundem ordinem, quamuis transferantur in hac uerò fit conuersus modus.

3 2
1 4 6

Tertia est ut sit proportio differentiæ primæ & tertiæ ad differentiam primæ & secundæ, uelut secundæ ad primam, in Geometrica autem esset sicut aggregati secundæ & primæ ad ipsam primam, tales ergo quantitates erunt uelut 4, 6, 7, nam proportio 6 ad 4 est uelut 3 differentiæ 4 & 7 ad 2 differentiam 4 & 6.

3
4 6 7
2

Quarta proportio similis Geometricæ est cum fuerit proportio differentiæ primæ & tertiæ ad differentiam tertiæ & secundę, uelut secundæ ad primam, uelut in 2, 3, 5 proportio differentiæ 5 & 2 quæ est 3 ad differentiam secundæ & tertiæ, quæ est 2 est uelut 3 quantitatis secundæ ad 2 quantitatem primam.

3
2 3 5
2

Prima autẽ harmonicarũ quæ notha est nec legitima, hoc modo sumitur: Vt sit proportio primæ ad tertiam uelut differentiæ secundæ & tertiæ ad differentiam secundæ & primæ, uelut capio 6 primam 5 secundum 3 tertiam proportio 6 ad 3 est dupla sicut 2 differentiæ

1 2
6 5 3

Q 4 rentiæ

rentiæ secundæ à tertia ad 1 differentiam secundæ à prima. Manifestum est autem quod in uera harmonica proportio differentiarum est primæ & secundæ ad illam quæ secundæ & tertiæ.

Secunda notha harmonica est, ut sit proportio primæ ad tertiam, uelut differentiæ primæ à tertia ad differentiam secundæ à tertia, ponatur 25, prima 21, secunda 15, tertia proportio 25 ad 15 est uelut 10 differentiæ primę à tertia ad b differentiam secundæ à tertia.



Tertia est similis priori, nisi quod sumitur differentia primæ à secunda pro ultimo termino. Exemplum, 25 primus terminus, 19 secundus, 15 tertius, proportio 25 ad 15 est uelut 10 differentiæ primæ a tertia ad b, differentiam primæ à secunda.

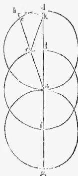


Has proportiones quanquàm exiguæ utilitatis, proponere uolui, ut excogitatis aliquibus demonstrationibus, uelut superius diximus, pulchra theoremata & problemata tradi possent.

Propositio centesimaseptuagesimatertia.

Circulum super centro suo mouere æqualiter, ita quòd omnia illius puncta per rectam lineam moueantur ultro citroq́.

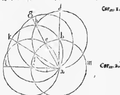
co. Sit a centrum circuli b c, & æqualis ei circulus d e, centrum eius b in circumferentia circuli b c, fixum ita ut ibi moueatur ad motum circuli b c: & moueatur b uersus c æqualiter, & è contrario motu etiam regulariter, & duplo uelocius ex e uersus d, dico omnia puncta d e moueri in linea recta, & primum capio punctum d, quod sit in linea recta centrorum: & moueatur b ad c, & si circulus d e esset immobilis, palam est quòd punctum d cum sit in una linea a b, cum b perueniret in c, d esset in linea a c, putà in h secundum quantitatem, ergo b d ex centro c, describo circuli portionem h k, duco etiam c k, erit ergo angulus h c k duplus a, quare arcus h k duplus b c, nam consistunt in centris circulorum æqualium: igitur cum ex h motu conuerso, & duplo ueloci in eodem tempore feratur d perueniet in k, & ita secundum rectam lineam erit motum eadem ratione ex d in k, quod erat demonstrandum.



Per 20. ter tij Elem.

Ex hoc

Ex hoc patet quòd quando b erit in c peracta quarta circuli, ut in secunda figura erit per motum l e in a:nam cum d a sit dupla c b, igitur in eodem tempore l perueniet ad a,in quo b perueniet ad c. Corm. 1.

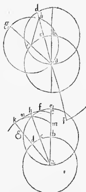


Dico etiam, quod quādo b perueniet ad fin prima figura,d perueniet ad g, quia permeabit totum circulum,& a b d sunt in una recta linea. Et cum b perueniet ad m in secunda figura, d rursus perueniet ad a centrum. Corm. 2.

Ex hoc patet,quòd punctum d permeabit lineam rectam æqualem duplo diametri unius circuli,id est, quantum est linea a g in prima figura. Corm. 3.

Sequitur etiam,quòd d punctum meabit et remeabit per rectam lineam ag,peragendo bis eam in uno circuitu circuli b c, seu duobus circuitibus d c. Corm. 4.

Ostendamus modo, quod punctum d extra lineam centrorum,scilicet in linea d c a f transibit per rectā eandem,ut in tertia figura producatur c d usq; ad k, ita ut c k sit æqualis c a,erit ergo punctus d primæ figuræ m è regione k tertiæ, & dum c mouetur ad e, d perueniat ad g,erit ergo e g æqualis ea, & secet circulus g h rectam a d in h, & ducatur c h. Et erit ut prius angulus h e g duplus h a g, ergo arcus g h duplus e c, ergo g remeauit in h in tempore quo c fertur in e, quare d descendit per rectam in h.



Dico rursus, quòd quanto magis d erit propinquum lineæ d g, tanto minus descendet in recta, quanto magis propinquum longitudinibus medijs,tāto celerius mouebitur, adeò ut in secunda figura apparet motum ex d in g,non descendit nisi per d n,& motum ex g in l descendit ex n in a centrum fixum. Descendat ergo ex e in h & h

in k per arcus æquales, & ducantur arcus h l & k m. Quia n m & n l sunt minores quarta circuli, & maiores sunt f e & f l, & angulus angulo non minor, patet propositum. Ita ergo motus, ut appropinquant pūctis medijs sunt uelociores, & in æquali distātia æquales. Et hoc inuentum fuit Ludouici Ferrarij, cuius meminimus in Arte magna, & nos ei subtexuimus ex nostra inuentione, cuius ille demonstrationem inuenire nequiuit.

Propositio centesimaseptuagesimaquarta.

Progressus & regressus tam sine latitudine, quàm cum latitudine in planetis per solos concentricos circulos æqualiter motos demonstrare.



Com. Sit eclyptica a b c d, & arcus regressus b c in partes quatuor æquales diuisus, & describantur circuli duo b h & e k super e & f, & supponatur orbis superior sub eclyptica tamen, cuius polus in f, qui circumagatur in duplo temporis retrocessus planetæ, & in distantia circuli e k sub puncto e eclypticæ, polus alterius orbis concentrici inferioris, qui circumagatur in tempore retrocessus planetæ, & planeta sit in puncto 6, liquet ergo quòd planeta ille in uno circuitu e k circuli permeabit b c & remeabit, & semper erit sub ipsa eclyptica. Sed enim eclyptica habet rationem rectæ lineæ, ut quiuis circulus maximus. Et si quis reluctetur fingamus rectam subtensam arcui b c, & aliam postmodum æquidistantem in eadem superficie, & in orbe inferiore, & tunc patebit liquidò propositum. Sed si uelim latitudinem describam, maximam latitudinem à puncto b, & ducam circulum magnum per punctum illud: reliqua ut prius, ad unguem: nihil enim refert quod ad demonstrationem præcedentis attinet, seu a d ponatur eclyptica, seu alius circulus magnus.

Ex hoc patet causa cur retrocessus in initio, & in fine sint exigui, in medio sint magni imò maximi, & quomodo perpetuò uarietur latitudo in tempore retrocessus, & ratio omnium, & similiter deincrementis & uelocitate motus.

Cor^m. 2. Ex hoc sequitur, quod cum erratica fuerit in centro seu polo f, & tunc mouetur uelocissimè, quòd tamen erit in opposito solis, & tunc etiam ibi erit ipse polus, quare aliter erit cum ipso sole.

Cor^m. 3. Et quia dum motus est uelocissimi secundum ordinem signorum, tunc erratica superior est soli iuncta, estq; in polo, oportet ut polus f moueatur secundum ordinem signorum, adeò ut cum sol peruenerit ad illius oppositum, orbis superior dimidium perfecerit

circuitus

circuitus, inferior autem integrum. Ergo orbis superior tanto tardius mouetur sole, quantum est id quod peragit polus sine æquali motu in orbe signorum, per motum circunducentis orbis superioris in tempore dimidij circuitus. Inferior ergo cum moueatur duplo uelociùs superiore, ut dictum est, igitur duplo uelocius sole, nisi quantum est duplum motus poli superioris per motum orbis circunducentis.

SCHOLIVM I.

Intelligo autem per arcum retrocessus non solum illum quo planeta retrocedit, nam hic est longè minor arcu processus, sed in quo motus inæqualis est minor æquali, palam autem est hunc fore æqualem arcui uelocioris motus quàm sit motus æqualis.

SCHOLIVM II.

Cum ergo, dum erratica est in polo orbis superioris, ibi quiescat motu eius, motu autem inferioris orbis uelocissimè moueatur seu progrediendo seu regrediendo motuque circulari, & tamen per rectam lineam, igitur uideretur quòd motus circularis partes posset transire in rectum. Respondeo quòd sufficit sola inclinatio ob magnitudinem anguli: nam dum sydus transfertur extra centrum motu orbis inferioris, mouetur uelociter quoad angulum motu orbis superioris.

Propositio centesimaseptuagesimaquinta.

Causam uarietatis diametrorum ex suppositis concentricis demonstrare.

In tribus superioribus planetis & quibuscunque stellis octaui orbis manifestum est, quòd pars quæ respicit nos quantò remotior fuerit à Sole, tãto magis illuminatur. Manifestum est etiam & experimento & ratione, quòd illud quod magis lucet, & est illuminatũ à Sole in nocte, maius uidetur, sicut etiam de facibus nocturnis. Et rursus, quod substantia orbium circa loca quæ habentur pro polis est densior, & quod res in medio denso apparent maiores, sicut de piscibus in aqua, denarijs & baculis. Demonstratum aũt est in præcedenti, quod quando stella fuerit in polo orbis superioris, quòd tunc maximè retrocedit, & ideò cum in tempore maximi retrocessus sit in opposito Solis dũ tres superiores sunt in opposito Solis, multo maiores duabus ex causis esse uidentur, & iuxta proportionem propinquitatis ad Solem commutant quantitatem & tanto minores apparent, quia non possunt, commutare formã, ut illuminat Luna propter æqualitatem substantiæ & luminis proprij copiam, quæ non sinit discerni uarietatem figuræ. In Luna autem secus est, nam in Com.

ipsa

ipsa discernitur ob paucitatem luminis proprij figuræ uarietas, & ob id non apparet maior, imò minor aut mediæ quantitatis in opposito Solis, sed maxima in longitudinibus medijs, quoniam ibi sunt poli motus uarietatis ut dictum est, quę habet locum retrocessus, sed ob motus paruitatem Luna non potest retrocedere, uerùm solùm motus tardatur. Nam licet densitas sit in cœlo superiore & motus uelox nihilominus efficit imaginem maiorem, sicut apparet de pisce in magna aqua in medio, & in parua in imo, nam in parua uidetur longè maior quàm in magna, licet sit in æquali distantia. In Venere autem & Mercurio eadem est ratio distantiæ à Sole ut dictum est in præcedenti. Cum ergo sub Sole multum moueantur motu differentiæ uel secundum successionem, uel contra successionem in medijs longitudinibus, parum tunc uidentur esse minores, quia sunt remotiores à polo orbis superioris. Quod autem propinqui coniunctioni Solis, & ueloces uideantur minores, istud contingit ob primam causam, quia minus illuminantur, ea parte quæ ad nos uergit. Restat ergo solum ostendere cur propinqui Soli & in retrocessu uideatur maiores, cùm utraque ratio obstet, sunt enim remoti à polo orbis superioris & propinqui Soli, causa est quoniam apparent solùm in crepusculis quando sunt sic dispositi, & tunc aër est crassior. Quæ causa facit, ut neque dum uelocissimi sunt semper parui uideantur, ideò non potest constitui certa ratio. imò ista deducta sunt potius ex fundamento falso illius figmenti, quam ex sensu (ita enim argumentantur) retrocedunt, ergo sunt propinquiores terræ, ergo uidentur maiores, & ita fingunt sensu se habere quod falsa ratione ostendere uidentur. quodque istud sit uerum, patet quia nullum instrumentum etiam in aëre clarissimo Aegypti potest ostendere differentiam minorem sex minutis, & hic est fermè diameter Mercurij, nec tanta est differentia in Venere. Reliquum est ut satisfaciamus obiectioni quam faciunt de diuersitate magnitudinis Lunæ propter eclipsim, nam uidetur esse aliquando maior, & aliquando minor in æquali distantia à sectione capitis & caudæ draconis, adeò ut non uideatur posse assignari. dico ergo huius causam esse umbram ipsius Lunæ dubiam, sicut etiam in crepusculis, quoniam Sol in diuerso situ facit diuersam umbram comparatione oculi nostri, maior est enim in hyeme quàm in æstate, & quæ est propior nobis quàm quæ procul, & quæ est in meridie quàm iuxta Ortum uel Occasum, & ideò tam parua differentia & incerta, & quæ aliquando uariat, nullo modo uitiare potest rationem motuum æternorum.

Proposi-

Propositio centesimaseptuagesimasexta.

Rationem centri grauitatis declarare.

Duplicem rationem cētri grauitatis inuenit Archimedes, unam suspensorum ponderum: alteram supernatantium aquæ, in quarum utraq; subtilitatis certè est quantum dignum est authore illo ingeniosissimo, sicut etiam in elica linea, fructus autem non pro ratione laboris, neq; enim ab ætate illa usque nunc inuentus est quisquam, qui potuerit docere, nec ille idem quæ nam utilitas ex huiusmodi contemplatione haberetur, propterea totum hoc una propositione conclusimus.

Dico igitur quòd cētrum grauitatis in appensis æqualibus quadratis aut quadrilateris parallelis est, ubi se intersecant duæ diametri. Et quod in triangulis est punctus in quo concurrant tres lineæ, ductæ ab angulis ad latera illa per æqualia secando. In quadrilatero autem trapezio centrum grauitatis est in puncto lineæ, quæ secat ambo latera opposita per æqualia, ita ut proportio partis eius lineæ, quæ intercipitur à minore æquidistantium, ad partem quæ intercipitur à maiore æquidistantium, sit ueluti dupli maioris æquidistantium cum minore ad duplum minoris æquidistantium cum maiore. Cuiuscunq; portionis à recta linea, & rectanguli coni sectione comprehensæ, centrum grauitatis diuidit diametrum portionis, ita ut pars eius ad uerticem terminata, sit ad partem eam sesquialtera, quæ ad basim portionis terminatur. Cuiuslibet frusti à sectione rectanguli coni ablati, centrum grauitatis est in linea recta, quę frusti existit diametros: qua in quinque partes æquas diuisa, centrum in quinta eius media existit, atque in eo eius puncto quo ipsa quinta sic diuiditur, ut portio eius propinquior minori basi frusti ad reliquam eius portionem eam habeat proportionem, quam habet solidum, cuius basis sit quadratum lineæ illius quæ frusti basis maior extiterit. Altitudo uerò istis utrisque simul æqualis lineæ quæ dupla sit minoris basis frusti, & basi maiori eiusdem, ad solidum quod basim habeat quadratum basis minoris frusti, altitudinem uerò istis utrisq; simul æqualem lineæ quæ dupla sit maioris basis, & basi minori. Et hæc de prima, multaque alia pulchra declarat Federicus Comandinus, in suo libro de Centro grauitatis, ut potē. Quod cuiuslibet portionis conoidis rectanguli axis à centro grauitatis ita diuiditur ut pars, quæ determinatur ad uerticem reliquæ, quæ ad basim terminatur dupla sit, & longè subtiliora quę quilibet uidere poterit apud illum.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Partes omnes consentiunt in grauitatem medij, quoniam una aliam non uult centro mundi fieri propiorem.

De secunda præcipua sunt, quod si magnitudo aliqua humido leuior ea in grauitate proportionem habebit ad humidum equalis molis, quam pars magnitudinis demersa ad totam magnitudinem, & hoc intelligitur quando magnitudo illa fuerit è genere solidorum rectorum & rectangulorum. Secunda est, quòd quæ similia sunt superficiebus, ita ut axem habeant in medio, secundum situm axis merguntur & prominent, & si aliter merguntur, redeunt. Tertia, quòd quę angustiora sunt, ab opposita parte uerò latiora, inclinantur ad partem acutiorem, quia sic facilius descendunt. Quarta est, de corporibus non æqualibus, ipsa enim necesse est, ut ab hac se inflectant, & ratio horum diuersa est iuxta rationem proportionis partium quæ merguntur adinuicem. Quinta est, quòd mersa in humido, quanto minus mersa fuerint, tanto facilius & eo frequentius commutantur.

Propositio centesima septuagesimaseptima.

Si proportio aliqua ex duabus proportionibus eiusdem quantitatis ad alias duas componatur: erit proportio illarum duarum eadem proportioni producti ex proportione in primam duarum quantitatum detracta priore illa quantitate, quæ ad duas comparatur, ad eandem priorem quantitatem.

Sit proportio a ad composita ex proportionibus e ad d & e ad c, dico quòd proportio d ad c est, ut producti ex proportione in d detracto c ad ipsum c. Et nos superius exposuimus conuersam huius. Erit enim per secundā demonstrationem illius proportio a ad b, uelut producti ex e in d, & e ad productum d in e: at productum d in e & in proportionem, est idem quod productum proportionis in d in ipsum e: igitur cum in uno sit productum e in c, & d in e, in alio productum ab in d inde in e, quæ sunt æqualia, detracto producto e in c ex producto proportionis in d & inde in e, relinquetur, productum c in d æquale producto ab .i. proportionis in productum d in e, detracto numero c in c: igitur ducto c in d, & diuiso per productum a b in d numero c, exibit e, igitur cum illud productum fiat ex d, scilicet in c, & ex e in productum proportionis in d dempto numero c, erit proportio d ad c, uelut productum ex d in proportionem, detracto eo ipsum c, uelut c sit 12, d 4, e 6, a b erit 5 proportio d ad e, uelut d in a b, id est 20, detracto c, & est 8 ad c 12.

Com.

	e	
		a
d	e	b

Ex

Ex demonstratione sequitur, quod qualis est proportio c ad a b, talis est producti d in e, ad aggregatum eorum. Si quis ergo dicat, habeo 10, & uolo inuenire duas quantitates, quarum differentia sit 1, & proportio 10, ad eas componat quintuplam, dices quintupla est dimidium 10, igitur inuenias duas quantitates, quarum differentia sit 1, & proportio producti unius in alteram ad aggregatum sit dupla. Et hoc est manifestum. Cor.

Propositio centesima septuagesima octaua.

Proportionem mistionis metallorum, maximè auri & argenti declarare.

Dubium non est, quod mistio non cognoscatur ducto pondere totius in partem auri uel argenti, & productis collectis diuiso aggregato per aggregatum ponderis, idque est per se manifestum, nam qualis est proportio partis ad partem, talis est totius ad totum. Com.

Sed est genus mistionis, quod uocant consolationem. Veluti, uolo ex argento perfectionis decem & septem, & quinque, conflare argenti massam centum librarum perfectionis nouem, ita agendum est. Detrahe 9 à 10, & omni maiori 10, relinquitur 1, hoc suppone 7 & 5, item detrahe 7 & 5, & omne minus 9 à 9, relinquitur 2 & 4, iunge omnia residua fient 8, nam 4. 2. 11. Dicemus ergo quod 8 uncię perfectionis nouem componentur ex 6 uncijs perfectionis decem & una septem alia quinque. Post dices, si unciæ octo fiant 100, sex & una, & una, quot fient, eruntque unciæ aut libræ, aut ut uocant marchæ perfectionis decem, & duodecim cum dimidia, ac duodecim cum dimidia perfectionis, ut septem & ut quinque: licebit etiam propositis terminis pluribus ex repetita operatione idem facere, ueluti sint massæ perfectionis 10. 7. 5. & 2, uolo massam perfectionis ut 8. Tu scis quod ex 10. 7 & 5. fit massa perfectionis nouem data lege sub 6, 1 & 1, nunc habeo iam perfectam ut 9, aliam ut 2, detraho 2 ex 8, relinquitur 6 & 8, x 9 relinquitur 1, iunge fient 7, erunt ergo septem unciæ, in quibus sex erunt perfectionis, ut 9 & 1 perfectionis ut 2, & totum erit perfectionis ut octo. Duc ergo, ut explores ueritatem, 6 in 9 fit 54, duc 2 in 1 fit 2, iunge fit 56 diuide per 7 exit 8 perfectio quæsita.

10. 7. 5 | 9
11
14
8

e
9 2 | 8
1 6
7

Per idem intelliges detractionem ex massa argenti perfectionis 7, detraxi quartam partem perfectionis 10, uolo scire dodrantem qualis

qualis relinquatur perfectionis, duc quadrantem in 10 fit 30, duc 12 in 7 fit 84, detrahe 30 ex 84, relinquitur 54, diuide 54 per 9, residuum 12 & 3, exit 6 perfectio residui.

Si quis dicat propositis argenti pondo 50, & dodrante perfectionis $\frac{11}{18}$, uolo partem assumere, & igne perficere, ita ut purum argentum, quod relinquitur additum residuo, efficiat ipsum perfectionis dextantis & besſis unciæ pro libra, seu $\frac{8}{9}$, diuide $\frac{11}{18}$ per $\frac{8}{9}$ exit $\frac{11}{16}$, duc in pondo 50 cum dodrante, fiunt pondo 34, unciæ $7\frac{1}{8}$, hoc igitur erit aggregatum conflatum ex argento puro & residuo. Detrahe igitur $\frac{11}{18}$ ex integro, relinquitur $\frac{7}{18}$, detrahe pondo 34, uncia $7\frac{1}{8}$ ex pondo 50 cum dodrante, relinquuntur pondo 15 unciæ $6\frac{7}{8}$ (pondo enim uncias continet sub hoc sensu, quia usui seruimus octo) diuide per $\frac{7}{8}$, exeunt pondo 40, unciæ $6\frac{3}{4}$, & tanta pars debuit igne purgari. In ea enim erunt puri argenti pondo 24, unciæ $7\frac{7}{8}$, quæ addita residuo, scilicet pondo 9, unciis $7\frac{3}{4}$, conficiunt pondo 34, uncias $7\frac{1}{8}$ perfectionis dictæ.

Quidam miscuit uncias decem auri perfectionis dextantis, & partem perfectionis dextantis cum dimidio, & aliud perfectionis besſis concreuit massa perfectionis dodrantis unciarum octuaginta, quæruntur pondera reliquarum partium, subtrahe 10 pondus ex 80 pondere, relinquuntur 70 perfectionis $17\frac{5}{7}$, inde detrahe per modum superiorem, & relinquuntur $3\frac{2}{7}$ & $1\frac{5}{7}$, iunge simul fiunt 5, dico ergo, si 6 producit 70, quid producet $3\frac{2}{7}$ & $1\frac{5}{7}$, & inuenies quod $1\frac{5}{7}$ producet 24 & $3\frac{5}{7}$ producet 46, qui iuncti faciunt 70. Igitur aurum perfectionis dextantis cum dimidio fuit unciarum 46 aurum perfectionis, besſis unciarum 24. Reliqua interrogata dissolues per regulas Algebræ, horum modo.

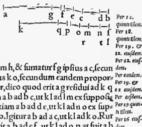
16	21	$17\frac{5}{7}$
$1\frac{5}{7}$	$3\frac{2}{7}$	
5		

Propositio centesima septuagesimanona.

Si duobus totis duæ portiones similes abscindantur, ab eisdem denuo, & abscisis portionibus partes eædem auferantur, denuoque ac denuo, quoties libuerit à portionibus, & à residuis ipsarum quantitatum partes eædem auferantur, erit residui ad residuum, ueluti totius ad totum.

Co^m. Sint duæ quantitates a b & k l, & abscissæ duæ partes similes ex utraque b c & l m, & sit proposita aliqua proportio, quæ sit h, & sumatur portio b d ipsius b c, secundum proportionem h, & similiter

militer l n ipſius l m, iuxta proportionem h, ſumatur rurſus d e ipſius a b pars ſecundum h, & n o ipſius k l, ſecundum eandem proportionem. Et rurſus ſumatur e f æqualis d b, & o p æqualis n l, ut ſint portiones b c & l m ſecundum proportionem h, & ſumatur f g ipſius a c, ſecundum proportionem h, & p q ipſius k o, ſecundum eandem proportionem, & ita procedendo ſemper, dico quod erit a g reſidui ad k q reſiduum, ut a b ad k l. Quia enim a b ad b c, ut k l ad l m ex ſuppoſito, erit a b ad b d, ut k l ad l n: eſt etiam a b ad d e, ut k l ad n o ex ſuppoſito, igitur a b ad b c, ut k l ad l o. Igitur a b ad a c, ut k l ad k o. Rurſus quia b c ad e f, ut l m ad o p, erit a b ad e f, ut k l ad o p, at fuit a b ad a e, ut k l ad k o & a e ad g f, ut k o ad p q, igitur a b ad g f, ut k l ad q p. Quare a b ad g e, ut k l ad q o. Iterum ergo a b ad b g, ut k l ad l q. Ergo a b ad a g, ut k l ad k q. Igitur a b ad k l, ut a g ad k q, quod erat demonſtrandum.



Per 22. quinti Elem. Per 18. quinti Elem. Per 19. & 22. eiuſdem. Per 22. eiuſdem. Per eandem. Per 19. & 22 eiuſdem. Per eaſdem. Per 19 quinti Elem. Per 16 eiuſdem.

Ex hoc patet, quod etſi proportio non maneat eadem in partibus totius, & partis modo ſit eadem in totis ad partes aſſumptas, et in partibus ad partes aſſumptas, nihilominus ſequitur idem. Cor^m. 1.

Sequitur rurſus, quod etſi proportio eadem non maneat quantitatum aſſumptarum ad partes quæ ſumuntur, nec etiam partium modo ſemper pars, quæ aſſumitur ſit totius pars, & alia partis idem ueratur. Cor^m. 2.

Velut ſi prima uice capiam b d partem b c, ut l n partem l m ſecundum h proportionem, & deinde capiam d e partem a b & n o partem k l ſecundum proportionem r, quæ ſit alia ab h, & ſecunda uice capiam e ſ partem b c, & o p partem l m ſecundum proportionem h, quæ ſit alia ab h & r. Et capiam f g partem a e & p q partem k o, ſecundum eandem proportionem, ſed tamen quæ non ſit aliqua prædictarum, ſcilicet h r s, ſed diuerſa ab eis, & uocetur t, dico quod nihilominus erit proportio a g ad k q, ut a b ad k l, quæ patent ex ui demonſtrationum, in quibus nil plus aſſumitur ad demonſtrandum, quàm id quod proponitur in corrolarijs. Co^m.

Ex hoc etiam ſequitur, quod ſecundum quem numerum prima quantitas abſumetur, ſecundum eundem abſumetur & ſecunda. Cor^m. 3

Velut ſi prima quantitas abſumatur ad unguem in quinta detractione, etiam ſecunda k l in quinta detractione ad unguem abſumetur, quod patet per demonſtrata, nam reſidua ſemper ſunt eædem partes ipſarum quantitatum. Co^m.

Cor^m. 4. Quarto ſequitur, quod ſi detractio fuerit facta eodem modo, & fuerit proportio totius ad totum, ut reſidui ad reſiduum, erunt partes aſſumptæ ſimiles.

Co^m. Velut ſi fuerit facta detractio iuxta propoſitionem, aut primum uel ſecundum corrolarium, & fuerit proportio a g ad k g, ut a b ad k l, erit a b ad b c, ut k l ad l m.

Cor^m. 5. Sequitur etiam, quod ſi fuerit aſſumpta proportio primarũ partium eadem, & facta fuerit detractio in omnibus præter unam iuxta dicta, & fuerit totius ad totum, ut reſidui ad reſiduum, erit ut illa etiam reliqua detractio, ſeu ad tota, ſeu ad partes ſit facta, ſecundum eandem proportionem.

Co^m. Velut ſi ſit proportio a b ad k l, ut a g ad k g, & rurſus ut b c ad l m, & aſſumptæ ſint proportiones eædem ſemper totius, & totius ad partes, & reſiduorum ad partes, etiam & b c & l m ad partes, etiam excepta una ſeu quantitatum a b & k l, ſeu reſiduorum ut a c & k o, ſeu partium ut b c & l m ad partes, dico quod hæ partes etiam erunt aſſumptæ ſecundum eandem proportionem ad ipſas magnitudines, uel partes primas uel reſidua.

Cor^m. 6. Sed & id ſequitur ex his, quod cuiuſcunque ſeu totius ſeu partis ſeu utriuſque pars maior aſſumetur, erit maior proportio totius ad totum quàm reſidui ad reſiduum.

Co^m. Hæc demonſtrantur à Campano, nam ſi ſit maior proportio a b
Rup. 16. quinti Elem. ad a g, quam k l ad k g, erit maior a b ad k l quàm a g ad k g.

Cor^m. 7. Sequitur rurſus, quod in eadem conſtitutione cuiuſcunque maior pars abſumetur, ea quantitas minori numero, uel numeri parte abſumetur.

Co^m. Nam ſi minor erit continuo proportio a b ad a e, quàm k l ad k o, & a e ad e g, quàm k o ad o g, erit longe minor a b ad b g quàm k l ad l g, igitur longe maior a b ad a g quam k l ad k g. Igitur a g citius abſumetur quam k g.

Propoſitio centeſimaoctuageſima.

Si aliqua quantitas in duas partes diuidatur, fueritque alicuius, quantitatis ad partes illas compoſita proportio eiuſdem quantitatis ad partes alias quantitatis diuiſa aliter proportio eadem componi.

Co^m. Sit a b proportio ad partes c d quæ ſint c e, & e d componens f, dico quod non poterit c d aliàs diuidi, ut proportio a b ad illas componat eandem proportionem f. Aliter ſit diuiſa in g, & erit minor c g,

nor c g, minor aut maior c d minore, capiam ergo c d minorem, erit igitur proportio a b ad c d maioris excessus ad proportionem a b ad c g, quàm sit proportio a b ad g d, maior proportione a b ad c e, propterea quod g e communis differentia maiorem habet proportionem ad c d quam g c, igitur maius est aggregatum proportionum a b ad c e, & c d, quã eiusdem a b ad c g & g d, quod erat demonstrandum.

a b f

c g e d

Propositio centesimaoctuagesimaprima.

Cum fuerit aliqua proportio composita ex proportionibus primæ ad secundam & tertiam, & rursus quartæ ad quintam & sextam, ita se habebit proportio secundæ ad tertiam proportionem quintæ ad sextam, uelut producti ex proportione in secundam detracta prima ad primam ad productum ex proportione in quintam, detracta quarta ad quartam.

Sit proportio g composita ex proportionibus a ad b & c, & proportionibus d ad e & f, dico quod quemadmodum b ad c, ad proportionem e ad f, ita producti ex g in b, detracto a ad a ad productum ex g in e, detracto d ad d. Est enim, ut demonstratum est b ad c, ut productum ex g in b, detracto a ab a & e ad f, ut producti ex g in e, detracto d ad d, igitur cum æqualium sint eædem comparationes, erit ut proportionis b ad c ad proportionem e ad f, ita producti ex g in b, detracto a ad a, ad productum est g in e, detracto d ad d.

a

b c

d

e f

Quare erit proportio b ad c ad proportionem e ad f, uelut residui b detracto quod prouenit, diuiso a per proportionem a ad proportionem residui e detracto quod prouenit diuiso d per proportionem ad ipsum d.

Propositio centesima octuagesimasecunda.

Proposita differentia proportionum partium similium ad partes assumptas propositaq; proportione totius ad residua eandem differentiam proportionum totius ad reliquum residui inuenire.

Sint datæ partes b c & e f, similes in comparatione ad a b & d c, & data residua a g & d h in cõparatione a b & d e, similia in differentia proportionis f e ad c l, ad proportionem c b ad b k, dico quod data est differentia proportionis a b ad g k ad proportionem d c & f h. Nam quia proportio f e ad c l, ad proportionem

a g c k b

d h f l e

portionem b e ad c k data est, & c f ad e d, ut b c ad b a, erit ut a c ad l e contineat a b ad b k, ut f e ad e l, c b ad b k, sed a b ad a d, ut d e ad d h, igitur a b ad b d, ut d e ad e h. Sunt ergo duæ quantitates a b & d e, quæ eandem habent compositam proportionem ad g k & k b, & h l & l e, quare per præcedentem proportionis h l ad l e, ad proportinem g k ad k b, ut h l detracto prouentu d e, diuisi per proportionem ad d e ad proportionem g k, detracto prouentu a b, diuisi per eandem proportionem ad ipsum a b. Si igitur nota est l e & b l, erit nota proportio residui h l detracto prouentu d e diuisi per proportionem, quare nota detractio g k detracto prouentu a b diuisi per eandem proportionem ad a b. Est autem a b nota, & proportio nota, & ideo prouentus, & cum sit proportio nota, erit ergo residuum notum, cui addito prouentu fit tota g k nota, quod fuit demonstrandum.

Propositio centesima octuagesimatertia.

Spatium uitæ naturalis per spatium uitæ fortuitum declarare.

Co[m]. Cum constet homines casu uiuere ægrotantes primum sæpe, deinde uiuentes in aëre malo, & ipsum intempestiuis horis subeuntes tristitijs, curis, uigilia, uenere, laboribus perperam se excruciantes, tũ uero immodico cibo & potu, & prauo, & sæpius, quàm oporteat, & intempestiuè, & malè præparato, & uario se replentes, atque sic alij ad sexagesimum, alij ad septuagesimum, rari octuagesimo, rariores nonagesimo uel centesimo anno ita moriunt, ut non casu, neque ui aut morbo, sed potius quasi naturali quadam morte absumpti intereant: de quibus tantum est sermo. Atque ut exemplo commodiore utamur, capiamus annum octogesimum, qui est terminus communis uitæ humanæ, non solum nostra ætate, sed antiquo tempore etiam fuit, ut Dauid testatur in Psalmis, in Cantico Moysis: antea autem si quis moriatur, non naturali morte, sed ui morbi absumptus existimatur. Certum est, quod si homo recta ratione uiueret, quod aliquanto diutius uitam extenderet, neque enim negare possumus, cum in magnis excessibus maximè fectionis uenæ & curarum, quin homo euidentur uitam breuiorem efficiat: quod ergo euidentissimum est in magnis excessibus, in paruis eandem habet uim licet occultiorem. Errorem autem in uita hunc adesse perpetuum, quisque intelligit qui nostras actiones pensitare uelit, cum saltem malam sequamur consuetudinem: iam ergo proponantur iuxta dicta duæ lineæ a b uitæ naturalis exquisitæ rectè longior & c d uitæ

c d uitæ quam is uicturus est, id est, annorum octuaginta, quam cõ-stat esse breuiorem aliquanto. Et proponatur error quadragesimæ partis in ipsa uita, quamuis sit longe maior: quoniam quisque enim est qui non saltem edat bibatque quadragesima parte, plusquàm oporteat in comparatione ad naturam, id est, ut natura fatigatur quadragesima illa parte amplius quàm debeat: idem dico de laboribus, curis, uigilijs, uenere. Sed hoc non est generale: habetque multas exceptiones inuicem pugnantes, ut tandem concludam non concoqui plenè posse, & ob id impurum manere, unde citò dissoluitur, & calorem etiam naturalem extinguit: atque etiam ob id, tum quia debitos labores, & multo minus ad perfectam ætatem perferre nõ possunt, densari nequit & pinguescere, ut duplici causa multo celerius resoluatur, una etiam calorem extinguat. Sit ergo a e talis pars a b, qualis c f, c d. Cum ergo a b consumitur in octuaginta annis, semper seruat proportionẽ cum uita contracta, quæ æqualiter absumitur: quia portiones illæ æquales sunt in minore inuicem sicut in maiore, & inæquales seruant eandem proportionem, sumatur ergo a b annorum cclvij. mensium v. & absumatur semper quantitas æqualis octuagesima a e, & quadragesima a b & residuorum. Prop. 179. Et in cor. 1. & 2.

a e b
c f g

An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.
	257	20	14	168	32	28	106	25	41	65	27	54	36	6	68	13	23
1	250	0	15	163	24	29	103	0	42	63	2	55	34	10	69	12	10
2	242	30	16	158	21	30	99	17	43	60	19	56	32	16	70	10	38
3	235	28	17	153	23	31	95	38	44	58	0	57	30	24	71	9	28
4	228	33	18	148	30	32	92	23	45	55	22	58	28	34	72	8	19
5	222	5	19	144	2	33	89	11	46	53	7	59	27	6	73	7	11
6	215	23	20	139	18	34	86	2	47	50	34	60	25	19	74	6	4
7	209	8	21	135	0	35	82	36	48	48	24	61	23	34	75	4	38
8	203	0	22	130	25	36	79	34	49	46	16	62	22	11	76	3	34
9	196	37	23	126	15	37	76	35	50	44	10	63	20	29	77	2	31
10	191	1	24	122	9	38	74	0	51	42	6	64	19	9	78	1	29
11	185	10	25	118	7	39	71	6	52	40	4	65	17	30	79	0	28
12	179	25	26	114	9	40	68	15	53	38	4	66	16	13	80	0	0
13	174	6	27	110	15							67	14	37			

Vt corrigas tabulam, scito quod numerus quadragesimæ cum superiore annorum numero à leua componit numerum quadragesimæ superioris simpliciter, aut abiectis quadragenarijs. Velut è regione trigesimi anni, sunt anni nonagintanouem, quad. 17 è directo anni 29, sunt anni 103, quad. 0. adde 17 quad. ad 103 fit 120, abijce 40 ter, nil superest, & ita nulla est quadragenaria è regione 29 & 103.

S Rursus

Rursus cum deuenimus ad annos 79, superfunt solum 28 quadragenariæ, & est minus anno, sed hoc fieri ob fractiones & numerorum partes, & etiam si esset aliquis error, esset magis ad augendum numerum annorum 257, mensium sex quàm ad diminutionem, ideo non curaui de exacta ueritate.

Præterea ex hac tabella dignoscis, quod in ultimis annis parum potest produci uita in comparatione ad primos, ueluti in 60 anno supersunt anni 20, ex uita ordinaria, ex exacta paulo plures quàm 25, scilicet 25 cum dimidio. Ergo à 60 anno non poterit per quamuis custodiam homo producere uitam plus annis quinque cum dimidio. Et si dicas tunc custodia maximè opus est, & magis quàm unquam, respondeo quod uerum est, sed non ad producendum uitam, sed ne in morbum incidas: nam ex quocunque morbo homo ab ea ætate perit, cum habeat adeò imbecilles uires. Ex hoc patet, quod Alexius Cornarius, patritius Venetus, cum incœpisset custodiam anno 36, cum posset uiuere 44 annis, iuxta rationem uitæ communis, potuit producere eam annis 79, igitur annis 25 plusquàm uixisset uita communi etiam quòd fuisset sanus.

Si ergo aliquis sit uicturus centum annis uita communi addemus eodem modo trigesimamnonam partem, id est quadragesimam partem, & quadragesimam quadragesimæ huic numero, & unum amplius, & habebimus numerum ut infrà.

An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.	An.	An.	Quad.
	257	20	87	314	33	94	383	11
81	265	3	88	323	34	95	394	3
82	272	34	89	333	5	96	405	6
83	280	32	90	342	26	97	416	27
84	289	0	91	352	16	98	428	13
85	297	16	92	362	16	99	440	11
86	306	0	93	372	27	100	452	22

Et ex hac tabula dignoscemus quantum quisque posit uiuere, quouis tempore ætatis suæ, illud intelligendo quod non est eadem mensura omnibus, ut neque uitæ ordinariæ, nec magnitudinis corporum, nec ingeniorum, nec eiusmodi in aliquibus uita decrescit per uigesimam partem, hic scilicet qui inordinatè uiuunt, alijs uix sexagesima, quanquam paucissimis. Hic ergo numerus maximè concordat cum experimentis duobus, quæ apparuerunt parum ante tempora nostra, scilicet Ioannis de têporibus, qui uixit annis 361, & Richardus de temporibus, annis 400. Et ambo fuerunt milites Caroli Magni, nam non potuerunt omnino prospicere uitæ rationi exquisitissimæ. Referût etiam in India nostris têporibus uiuere ad centum

quinquaginta

quinquaginta annos, cuius causam transferunt in aërem: ego potius in uitæ genus, abstinent enim carnibus, ouis, caseo & uino, u-tunturque fructibus tantum, & uiuebant sine solicitudine ulla & curis. Vnde rectè insinuatum est etiam ultra historiam, quod Adam esset perpetuò uicturus, si non degustasset fructum arboris boni & mali, id est, quod mors nobis obrepit ob, solicitudines & curas. Auenzoar autem cum uixerit multis cum curis, & fuerit in carcere Hali, & ab eo per iniuriam uexatus, & natus in malo aëre, sola ratione uictus produxit uitam ad annos 135, ut testatur Auerroes, quid euenturum erat, si in bono aëre educatus nihil graue, & adeò diuturnum expertus fuisset?

Pro usu autem huius & superioris tabulæ, si quis proponat iuuenem ex stirpe eorum, qui uiuunt sexaginta annis, iam natum decem & septem annos, uelimusque scire quantum uiuere possit, uide è regione 20 annorum in primo ordine, & habes annos 139. Quad. 18. & ab hoc numera 17 annos, & habebis annos 37 è regione, quorum sunt anni 76. Quad. 35, id est, menses 10, dies 15, uel iunge 17, numerum annorum exactorum, & 20 numerum annorum deficientium ab 80, fiunt anni 33, ut prius, è quorum regione habet annos 76. quad. 35.

At scio multos qui parum consyderatè hæc legunt, obiecturos, primum quod neque mihi, neque ulli alij potui, uel ad centum uel ad nonaginta annos uitã producere. Secundũ, quòd si uita humana esset eiusmodi, naturaliter esset ut in pluribus: at uix inuenire licet aliquẽ qui excesserit centesimumuigesimum annum. Et maximè cum scriptum sit: Non spiritum meum in carne ultra centum uiginti annos, & loquitur Deus. Videtur etiam necesse hoc uolenti, cupere totam uitam sub incerto fine, & non uacare, nec negotijs nec uoluptati, quæ sunt duo illa præcipua, quibus uita nostra constat, & maximè amittere bona, adeò secura ob tam leuem & inanem spem. Absurdum etiam esse hoc quod latuerit tot præclaros medicos atque philosophos, quorum nullus de hoc sermonem fecit. Hæc & huiusmodi sunt quæ mihi obijci posse sentio. At rogo quid admirabilius est, an solem esse plus centies et sexagies terra ac mari, an homines tamdiu posse producere uitam? Et plures imperito hoc quam illud credituri sunt: & tamen res illa ita se habet, nec apud sapientes dubia est: nedum incredibilis. Similiter quòd corpus adeò tenue, debeat adeò celeriter circumferri, ut in uno ictu pulsus debeat peragere spatium bis mille quingentorum millium passuum, & tamen & illud demonstrari potest euidentissimè. Ergo ut ad obiecta respondeam serò mihi hoc inuenire cõtigit, infeliciter natus, peius educa-

S 2 tus, &

tus & imbecilli corpore ac natura, quod aliàs dixi, nec forsan in quibusdam sufficiat educatio ab initio, sed requiritur successio, qualis fuit olim per multas ætates, sic progenerantur gigantes & homines ad miraculum usque, docui etiam exacta media ætate, hoc uix fieri posse. Contingunt præterea multa impedimenta. Sufficit nobis scire quid sit in natura hominis, non quæro modò quomodo faciendum: nec est præsentis instituti, quin etiam uerisimile est ad hoc esse uiam quandam compendiosiorem, quæ minimè latuerit antiquos, maximè Hebræos. Et forsan etiam hoc nostro tempore haberi posset quamuis lateat. Vnum est certum, oportere ab initio uitæ (qui uiam hanc exquisitam, quam hic trado, sequi uoluerit) constituere formam uictus, & tum maximè contractam, quoniam (ut uisum est in tabula) ex minimo errore, & breui tempore plurimum temporis uitæ perit. Oportet autem multa adesse, corpus moderatè sanum, & mediocriter saltem constitutum, institutorem sapientem, obedientiam pueri, & per omnes ætates cum patientia summa commoda diuitiarum, & bonum aërem & fortunam blandientem nostro proposito, ne quis casus in tanto tempore aduersus nos impediat, ob tot & tanta quæ necessaria sunt, & assiduè, ideo res hæc fabulosa uisa est ad hanc usq; diem, tum maximè quod nemo eam docuerat. De dicto Moysis non laboro, cum simus medici ac philosophi non theologi. Quin etiam post hæc uixit Abrahamus annis clxxv, Isaacus autem clxxx, Iacobus cxlvij, sed non laboro de his, uerùm relinquo illa sapientibus: melius est ergo ut demonstrationem adducam huius, cum experimento etiam coniunctam. Constat enim quod humidum pingue euanescit per ætates, seu à calore innato, seu ab aëre consumatur, & quod humidum pingue purum, ac densum tardè absumitur, sicut apparet experimento de oleo & sepo salitis, quæ durant longiori tempore, quam si nil tale admistum habeant hæc pinguia, similiter aqua quadruplo celerius, imo longe uelocius absumitur oleo in uase feruente. Et ita de pinguedinibus uariorum animalium de ligno iunipero, quod referunt durare in annum, cur alia non possint ad sex dies. Certum etiam est, quod coctio condenset, & est Philosophi in quarto Metheororum. Si ergo coctio perfecta fiat, & purissimum humidum restauretur, dubium non est, quin homo possit uiuere sexcuplo plus aut etiã octuplo: quia cùm res peruenit ad quendã terminum, tunc acquiritur perfectio quedã ultra omnẽ fidem, sicut uidemus de auro, q̃d prorsus etiã longo tempore ab ignibus nõ ab'su mitur: adeò ut liceat dicere, forsan non esse contra rationem, quod detur humidum, quod nunquàm à calore naturali absumitur, quia non

Gen.ca. 25.
Cap. 35.
Cap. 47.

non est par ratio de auro & humido humano, nam in auro nō est calor nisi ab exteriore igne, sed in humido nostro est calor intus, & secundum substantiam, ut saltem habeamus experimentum longissimæ uitæ & humidi quod uix à calore, & non nisi multis in seculis absumatur. Atque hæc (ne incurramus irrisionem Galeni) de Philosopho qui pollicebatur perpetuitatem uitæ, quanquam non ob id refugiam hoc, ut negem posse hominis uitam esse perpetuam, quod Galenus Philosophū hoc dicentem irriserit, sed quòd uideamus omnia sublunaria interire, quòd sciamus omne compositum debere dissolui, quoniam compositio sit accidens, & accidens est medium inter ea quæ sunt & non sunt: loquor de huiusmodi accidentibus quæ adueniunt. Demum, quoniam calor ille sit in ipso humido: ideo cum hęc non animaduerterit Galenus, potius fuit uates in irridendo, quàm sapiens, ut authoritate eius moueri debeamus. Hanc coctionem non animaduerterunt medici, sed solam illam bonam quę est causa sanitatis, quæ stat cum uigilia, labore & ciborum multitudine, cùm illa exacta non stet nisi cum optimis & paucis ualde cibis, quiete ac somno. Et ideo sunt sex genera coctionum, dico quod ad perfectionem attinet corrupta, imperfecta, imperfecta morbosa, imperfecta quæ emendari potest, has omnes uitare docent medici: bona quæ est cum longa sanitate, cui medici student: ualde bona quam per umbram quasi cognouerūt, & exacta quam nec per somnium quidem uiderunt, quæ sola est causa tantæ longitudinis uitæ, cum tamen nunquam fuerit uel admodum parum interrupta. Hoc autem inter cætera ostendit experimentum de elephantis, quos Aristoteles ducentis annis uiuere constanter affirmat, alius dixit esse trecentis. Vt constet iam in natura animalium & in genere caloris habentis magnum motum, & substantiam tenuem hoc inueniri posse, ut excludamus plantas de quarū uita longissima satis constat, sed quia caret motu euidenti calor in illis, & substantia est crassa animalium comparatione, non laboro. At de elephanto omnes consitentur quòd sit omnium ingeniosissimum, adeò ut multi homines illo industria & cognitione inferiores esse uideantur. Neq; etiam uerisimile est quod natura hominem fecerit hac in parte illo inferiorem, præsertim cum de nullo alio animali apud Aristotelem dubium sit, & ubi modo aliquod dubium esset propter querelam Theophrasti, & illud quod solet prædicari de ceruis, tanto magis uerisimile est indignum fuisse hominem concedere tot animalibus in diuturnitate uitæ. Quamobrem cum hæc tractatio ad libros de tuenda Sanitate spectaret, homines ad eos relego, nam ob id illos conscripsi quòd uiderem Galenum nec hoc

 uidisse

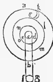
uidisse nec multa alia, sed eorum loco longas & inutiles disputationes interseruisse. Verùm etiam, quoniam eam tractationem diuulsit, ut alia cogamus quærere in libris de Alimentis, alia, de cibis boni & mali succi: tum uerò & tractatio ipsa eduliorum est imperfecta, & multa etiam deficiunt circa genera: in quo est excusandus ob uarietatem regionis & ætatis. Deest præterea maxima pars, quæ nec ibi nec alibi habetur, scilicet, de ciborum præparatione. Quod etiam hæc latuerint tot præclaros uiros, quid mirum? cum Hippocrates uixerit seculo illo agresti, in quo non est mirandum, quod aliquid, pauca quædam & abstrusa omiserit, sed quod tam multa tam bene inuenerit, ut fuerit, sicut de Pindaro dicitur, imò longè uerius quam de Pindaro inimitabilis. De Galeno quid mirum, qui non nisi ueterum scripta collegit, atque utinam saltē bene. De Aristotele is multa inuenit suo Marte, & Theophrastus longè plura. De alijs, dico tam medicis quàm philosophis, hoc est, quod queror, quod in spatio pene duorum millium annorum, non hoc quod ualde reconditum erat, sed nec leue ullum experimentum, uel naturæ arcanum, uel uitæ salutare auxilium inuenerit. Sed litigant de nugis & rebus inutilibus, & etiam quę sciri nō possunt, ac plerunque non sine magna impietate. Quod uerò necesse sit amittere uoluptatem, & negocia prætermittere uolenti hanc uitam longam adipisci, quæ postmodum etiam ualde incerta est: dico quod quantum ad uoluptates & negocia, non esse necesse, sed solum superfluas res, & damnosas & irritas, quas etiam philosophi & ciuitatum institutores, & morum censores docent debere uitari, etiam nullo proposito emolumento, at reliqua cōsuetudo efficit nō solum grata & tolerabilia, sed etiam iucunda. De incerto fine, quid est certum apud homines, nisi hoc nihil certum esse? Verum tamen si quis respiciat ad præmium tam singulare est, & nobile atque utile, ut non luserit operam immeritò, quicunque cum spe tam illustris commodi, & tam exigua iactura rerum, ac minore periculo se huic aleæ experiundæ commiserit. Cum, si quis hoc ipsum adipiscatur, uerè dici possit summum bonum adeptum esse. Non solum compos factus diuturnitatis uitæ, sed cum illa tot uoluptatum, quæ in longo tempore percipiuntur scientiæ tot rerum, quas non nisi temporis longitudo ostendere potest, tot denique casus uidere tum opum incrementum, quod quasi certissimum est in longa ætate & usu sapientia & authoritate plena, adeò ut fermè necesse sit ad principatus speciem deuenire, qui tamdiu uixerit, tum gloria ipsa incomparabili. Hæc autem maxime accidere necesse est, quod ut uisum est, quanto longior fuerit ætas eo firmiores etiā sunt illius partes quæ ad mortis tempus appropinquant

propinquant pari ratione, ut ex tabella prima deprehendere licet, quòd si cum hoc sobolis felicitas accedat, non obscurum est huiusmodi posse dici ultimam hominis felicitatem apud eos, qui humanas res aliquid esse putant. Accidunt autem hæc sponte in seculorum renouationibus, cum humanum genus consumitur, seu qui sit pereunt ob robur, seu ex terra geniti, ut dubitat Aristoteles. Hæsen credit, tum ob aëris puritatem, & maximè quòd alterutro modo ex calidis regionibus & sublimibus locis homines reparari necesse sit, tamen etiam ob uictus simplicitatem, cum in altera superfint soli pisces, in altera ne hi quidem, ut in Arcanis demonstratum est. Atque etiam ob curarum absentiam: siquidem homines illi gaudent, reges ex agricolis haud dubiè terrarum facti, ac quasi securi molestiarum ad hanc ætatem perueniunt longa spatia temporis, & propagandæ sobolis habentes, ut felicissimè uiuant, restituti ex optimis quibuscunque aureæ illi ætati, non solum ob uitæ syncerit atem atque splendorem, sed etiam longitudinem sic appellatæ. Quæ finem habuit dum satis (uti cœperunt) à Saturno in usum traductis: unde etiam falcis insigne accepit. Eadem tamen ætate paucissimi ex infinitis diutius quam nostra uiuere cœperunt, cæteri omnes minus quam nunc, quòd neque uestitus corporum ab inundatione parta, neque aëris puritas à squaloribus maneret, & edulia multo pauciora essent hominibus & incondita.

Propositio centesimaoctuagesimaquarta.

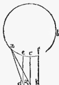
Quæcunque grauia in uorticibus aquarum merguntur, in medio uorticis primum uersa merguntur.

Hanc proponit Aristoteles, sed non quantum necessarium est explicauit, unius enim quæsiti, id est, primi multiplicem rationem reddit. Sed neque illam perfectè, quod amborum causa una sit, ac coniuncta, sic ergo uortex, cuius extremus circulus a b centrum in aquæ superficie c capacitas uorticis d e, ut aqua feratur per spatium d e f g, h k in maiore circulo nauis, aut aliud graue, quod natura sua non esset descensurum (ut falsò exponitur de lapide, nam lapis, nec reuoluitur, nec fertur ad d e circulum intimum, sed præoccupat ex grauitate sua fertur in imum) dico q̃d h k prius circumuoluetur, inde trahetur ad d e, & ubi fuerit ibi descédet, sed si leuius sit necessariò perueniet ad c ante quam descendat. Cum ergo aqua Com



 grauis

grauis sit tota, fertur ad circulum d e, ut descendat. Sed & quia descendit per d e f g, & magis ex centro e, ideo omnes partes circumuicinæ trahuntur ad d e, & ad e centrum superficiei uorticis, tanquàm ad centrum, ut descendant, atq; id primum. Cumq; lignũ descendat partim ꝓpria grauitate, partim attractũ, si fuerit leue corpus, ut pluma, quod natura sua nõ descendat, necesse est ut descẽdat sola ui attractionis, quę nõ est tanta in toto d e quãta in e, igit̃ oportet ut prius perueniat ad c quàm descendat, quia contra naturã propriã descendit ui attractũ. Cum uerò pars quæ in directo c est, uelocissimè descendat, conantur omnes partes aquę, quę circa sunt descendere, et cũ nõ possint simul peruenire, mouentur ad illud linea, dico quia habent initium in e, circulus autem nullũ habet initiũ, igitur uidentur moueri circulariter. Sed cum in circulo partes à cẽtro moueant̃, uelocius mouebuntur, uelocius in elica a b quàm l m, & l m quàm n o. Et ob has duas causas mouebuntur uelocius partes quæ sunt circa c, quàm distantes ab eodẽ, tum quia in medio, tũ quia tardius mouent̃ motu elice. Declaratũ est.n. superius quod unus motus in eodẽ mobili aliũ impedit & retardat. Cum ergo h k sit in spacio a b l m & aqua rapiat̃ motu, dico ad d e mouebit ad d e, & motu dico qui uidetur circularis, nam mouetur motu eius à quo sustinet̃. Mouetur etiam ad d e, quoniam pars illa est humilior, nam semper descendit, omne aũt quod mouetur partim est in termino, à quo, partim ad quem, ideo partim iam aqua illa cum descendat humilior est locus, igitur nauis ad illũ locum feretur. Tertio, quia latus k impellitur, in maiore circulo, ideo maiore impetu quàm h, quare descẽdet & circulo mouebitur, nã si h quiesceret palã est, q̃d nauis circulariter moueret̃, sed h fungitur uice quiescẽtis, quia tardius mouet̃ quã k, igit̃ k mouebitur ad d e & motu circulari aut participe eius. Quarta causa est, quoniam h cupit descẽdere, ut graue. ergo ferri, ubi minus impediatur à motu uiolẽto, at minus impedit̃ in



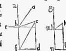
circulo, de qua a b, q̃a a b cũ maioris sit ambitus aqua in eo ulterius ferṫ quã in d e, ob hæc oĩa & in mari & fluminibus ac lacubus cũ naues fuerint in ambitu uorticis iã rapiunt̃ ad illũ, & circulari motu: isq; motus est indiciũ submersionis, quoniã indicat aquã, ibi propè descẽdere rectà uersus cẽtrũ, & ob id prudẽtes nautę magna ui uentorũ & remorũ sępe seruãt se, prӕoccupãtes motũ elicũ recto motu. Cur aũt aqua q̃ est in a, non potius ferat̃ per obliquam lineam ad d uel g, q̃ ad e uel c inde ex illis ad d uel g, præsertim cũ adsit breuior

a e & e d et a g breuior a e et c (ut docet Euclides) causa est quia aqua quæ descendit per e d & e g maiore impetu descendit quàm per a d uel a g ut demonstratum est, ergo non poterit quæ est in e d uel e g loco dimoueri, nec cedere aquæ per obliquam lineam descendenti.

Propositio centesimaoctuagesimaquinta.

Cur homo sedens quanto altius sedet, & quanto magis crura ad femora & femora ad pectus reclinata habet, facilius consurgat, cum tamen hæc opposito modo inuicem se habeant, declarare.

Huius secundam partem Aristoteles in Mechanicis proposuit, Com. sed neque sub adiecta dubitatione, sedens n altius a b pectus, b c femur, c d crus eiusdem uel æqualis, pectus g h, femur h k, crus k l longior b f quam h n facit, ut facilius surgat a b c d quàm g h k l, & tamen anguli a b c & b c d sunt maiores g h k & h k l, quinimo cum uolumus surgere, contrahimus c d & k l propè & è regione a b, igitur patet ratio secundi, propior n est c d ipsi a b quanto angulus a b c minor est, cui æqualis est b c d. Cum ergo quanto propior est c d ipsi a b eo facilius surgat, quoniam particeps magis dispositionis per quam surgit, propior autem quo anguli sunt acutiores, ideo facilius exurgit homo, quo contractiora sunt crura, & anguli femorum ad crura & pectus minora. Hucusque Aristoteles & bene.



Sed cur rursus contractiora dum sunt crura, homo facilius exurgit? Proponantur c f contracta ad perpendiculum, & inclinetur b a in o ut fiant b o & f c equidistantes, ita enim commodius surgimus: necaliter qui sunt imbecilliores: quia ergo b est in directo f, ideo musculi femoris inferiores ob crus, & superiores ob pectus sunt magis tensi & anteriores cruris itidem, ideo maiore ui trahunt particulam. Vnde manente fixo f, & capite etiam & pectore grauitate sua adiuuantibus, facilius homo exurgit quam ad latos angulos cum contractio, ut dixi, musculorum et inclinatio partium superiorum fiat maior.

Rursus pro prima parte problematis, dico quòd quanto altior est b f tanto facilius exurgit, nam supponatur angulus reflexionis a h e æqualis a b c, & b c k æqualis h k f, igitur cum b f sit breuior h f, erit h k breuior b c & f k, f c. quare b c femur, & f c crus erunt uiolentius extensa quàm in situ h k, k f ergo, musculi facilius erigent sedentem altiore loco quàm humiliore, quod erat demonstrandum.



Propo-

Propositio centesimaoctuagesimasexta.

Si fuerit proportio primæ & secundæ quantitatis ad tertiam, ut primæ & quartæ ad quintam, fueritque quarta secunda maior, erit proportio quartę ad quintam maior quàm secundæ ad tertiam. Quod si fuerit maior quartę ad quintam, quàm secundę ad tertiam, necesse est quartam secunda esse maiorem.

Com. Sit proportio a & b ad c, ut a & d ad e, sitque d maior b, dico maiorem esse proportionē d ad e quàm b ad c, quod si maior sit proportio d ad c quàm b ad c, dico d esse maiorem b. Quoniam enim est d est maior b ad d est maior a b per communē animi sententiam, igitur cum sit proportio a d ad e ut a b ad c,

a

b d

c e

erit e maior c, igitur minor proportio a ad e quam a ad c, at proportio totius a d ad e est æqualis proportioni a b ad e, igitur ex communi animi sententia maior proportio d ad e, quam b ad c. Rursus, si maior est proportio d ad e quàm b ad c, igitur per communem animi sententiam maior est a ad e quàm a ad c, igitur e maior quàm c, sed d maiorem habet proportionem ad e quàm b ad c, igitur d maiorem quàm b.

Per 14. quinti Elem. Per 8. eiusdem. Per 10. quinti Elem. Per eadem sæpius repetitam.

Propositio centesimaoctuagesimaseptima.

Si eisdem uiribus & eadem proportione cum auxilio ponderis tertij, quartum pondus moueatur quibus secundum auxilio primi, necesse est quartum pondus tardiùs & maiore cum difficultate moueri quàm secundum.

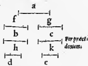
Com. Maneat prior figura, & sint uires a quæ cum pondere b moueant c pondus, et cum d pondere eadem uires sub eadem proportione moueant e, sit autem pondus d maius quàm b, dico e tardius & difficilius moueri quàm c. Nam ex præcedente e erit maius quàm c, & proportio d ad e maior quàm b ad c, & proportio a ad e minor quàm ad c, tum ergo propter uectem magis pressum, tum quia d non mouet e, nisi motum ab a, necesse est ut tardius & maiore cum difficultate admoueat e quo a b mouet c. Et ideo eo perueniri poterit absque dubio, ut a b moueat uelociter e & a d, nullo mouente. Quia hoc accidit cùm d non mouet c nisi quia motum ab a.

Propositio centesimaoctuagesimaoctaua.

Si uires aliquæ moueant cum ponderibus aliqua pondera, ut composita proportio sit eadem proportioni uirium & duorum ponderum mouentium aggregatum æquale duorum ponderum, ubi maior fuerit partium inæqualitas, ibi erit maior difficultas.

Com. Sint uires a, & aggregatum ponderum b c & d e æqualia, & a cum f & g moueat b & c sub proportionibus componentibus eandem

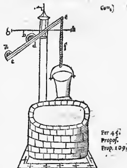
dem proportionem, quam componunt proportiones a & h mouendo d & a, & k mouendo e, & sit maior differentia ponderis e ad d quàm c ad b, dico quod maiore cū difficultate mouebuntur d & e quàm b & c. Nam cū differentia e & d sit maior quàm c & b, & d e & b c sint æqualia, erit e maius c, igitur e difficilius mouebitur ab a & k quàm c ab a & g. Itidem quia e tanto maius est c, quanto b maius est d, & proportio a k ad e & a h ad d, conficiunt proportionem a g ad c & a f ad b, erit ut motus d e sint tardiores & difficiliores motibus b c, per regulam dialecticam, nam difficultas motus e supra difficultatem motus c, est maior quam difficultas motus b supra difficultatem motus d, igitur difficultas motus d & e, maior est difficultate motus b & e, quod erat demonstrandum. Per præcedentem.



Propositio centesimaoctuagesimanona.

Si pondus minus ad longitudinem maiorem sub æquali proportione coaptetur, facilius deorsum trahetur quàm quod maius est & propius.

Sit situla aquæ f annexa tigno in e & ad minuendum pondus addatur ex aduerso elongius seu uincatur pondus a, dico quod cōmodius erit quàm si æquale ad grauitatem addatur b proprius in e, nam quia b equiponderat in d ut a in c, & homo trahens ex e plus potest quàm ex d, igitur facilius trahet ex e quam d. Et quoniā graue minus ponderat quan tō magis distat à medio, licet moueat magis, ergo inclinatum ad medium, cum ergo moueatur uelocius ex e quam d, & semper uelocius descendendo in comparatione a g h, igitur semper magis & magis uelociter ex e quàm d ut sit duplex incrementum & comparatione e e ad e d & descensus ad descensum in utroq; & similiter in reditu, quia facilius impelletur sursum e quàm d per primam rationem. Per 4ª Propos. Prop. 109ª



Propositio centesimanonagesima.

Si fuerit primum graue minus secundo, & secundum minus tertio, proportio autem primi ad secundum multo maior quàm secun-

dı ad

di ad tertium, possibile erit propositis uiribus eisdem addere pondus secundo, ut ipsum & tertiũ moueantur facilius ab eisdem uiribus, & primo uel secundo quam antea.

Sit a põdus minus, c maius, proportio a ad b multo maior quàm b ad c, uires d, & d cum a moueat b & cum b moueat c, dico quòd poterit addi pondus ad b ut d cum a moueat b, & d cum b moueat c maiore facilitate componendo proportiones quam antea: Cum enim fuerit
Per 188. proportio d b ad c minima, quãtumcunq; moueatur b facilè ab ad
Per 187. plus refert difficultas c moti a b d: igitur cum addito pondere, dimidio quod a superat b omnino uincat a d ipsum b, cum eo quod additum est, & tanto minor sit difficultas motus c a b d cum pondere addito, sequitur ut minor sit difficultas motus b cum pondere addito a b a d, & motus c a b cum pondere addito & d quàm b & c a & b cum uiribus d.

Quæst. 28. Ex hoc patet quod qui interpretati sunt Aristotelem, cum non possit nec intelligi nec demonstrari, fucum fecerunt legentibus: nihilominus hoc illis debemus, quod si Phrynis non fuisset, Timotheus non fuisset, nam nisi illi quod fciuerunt protulissent in medium, ego forsan aut illa non intellexissem aut neglexissem. Itaq; & reliquas habes a nobis expositas licet non adeò diligenter, & modum huiusmodi exponendi. Subijciemus autem et hanc, ut obiectę quæstioni, quantum nerui sit (si pœnitus quis res sequi uelit, non addictus nimis authoritati ueterum ut pedem figere uelit, ubi illi res uix tactas reliquerunt) intelligamus.

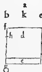
SCHOLIVM.

Vocatur autem hæc proportio auxiliaris. Cumq; fuerit equalis d & a ad b ut d & b ad c, dicetur auxiliaris æqualis.

Propositio centesimanonagesimaprima.

Cum fuerint duo pondera & uires duxerisq; aggregatum ex uiribus & minore pondere in maius, addiderisq; insuper quãtum est productum dimidij uirium in se latus aggregati detracto dimidio uirium, dicetur pondus auxiliare æquale proportionis.

Com. Sint pondera b minus, c maius, & ducatur aggregatum ex a uiribus & b minore pondere in c, & ei addatur quadratum dimidij a, dico quod radix seu latus huius detracto dimidio a est pondus auxiliare æquale, sit productum a b in c superficies & quadratum dimidij a sit e, ita quod tota d c sit superficies quadrata, cuius latus sit f g: f h autem dimidium a dico h g esse pondus auxiliare æquale. Quia enim f g



quadra-

quadratum est æquale quadratis g h, h f & duplo g h in h f, & qua- *Per 4. primi*
dratum f h est ęquale e superficiei, erit quadratum h g minus super- *Elem.*
ficie d in duplo g h in h f, quare productum a b in c erit ęquale qua-
drato g h in se & a, nam duplo g h in h f & iam duplum g h in h f est
ęquale producto g h in a, quia a est duplum h f, igitur qualis est pro *Per 16. sex*
portio a b ad g h, talis g h & a ad c, igitur per definitionem datam *ti Elem.*
g h & quantitas grauitatis auxiliaris æquale.

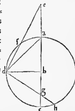
Ex hoc manifestum est, quod si fuerit datum pondus tertium au- *Cor^m. 1.*
xiliare, quod sciemus quantum addendum uel detrahendum ut fi-
at pondus auxiliare æquale, nam inuenta g h si fuerit k maior adde-
mus quod deficit, & si minor quàm k detrahemus ex k quod est
superfluum.

Et rursus inuenta g h ut perficiamus pondus ęquale, augebimus *Cor^m. 2.*
aliquantisper, ut fiat æqualis ad unguem difficultas in motu: iuxta *Prop. 187.*
doctrinam superiùs datam.

Propositio centesimanonagesimasecunda.

Si ex medio diametri linea ad perpendiculum erigatur ad circu-
li peripheriam: ex eo puncto autē quotlibet lineæ ducantur seu in-
tus ad circumferentiam usq;, seu extra ad diametrum, erit proportio
totius lineæ ad totam, uelut mutuò partis ad partem.

Ex media diametro a c. 1. cētro b, ducatur ad perpendiculum b d, *Com.*
& ex d lineæ d a d e d h, dico d e ad d a, ut d a ad d f, & d h ad d a ut
d a ad d g, & d e ad d h ut d g ad d f. Quia n quod fit ex d e in e f, æ-
quale est ei quod ex e c in e a, quod uerò ex e c in e a cum quadrato *Per 36. ter-*
b d seu b a ęquale est quadrato b e, igitur ex *tij Elem.*
e d in e f cum quadrato d b æquale qua- *Per 6. secun*
drato b e, ex d e igitur in e f cum quadratis *di Elem.*
d b & b a æquale quadrato d e. Quadratis *Per 47. pri-*
autem a b & b d æquale quadratum d a: *mi Elem.*
igitur ex d e in e f cum quadrato d a æqua- *Per eandem.*
le quadrato d e. At quadratum d e æquale *Per 2. secun*
est his quæ ex d e in e f, & f d igitur detra- *di Elem.*
cto communi ex d e in e f, erit quadratum d *Per 17. sex-*
e æquale ei quod ex d e in d f, igitur d e ad *ti Elem.*
d a, ut d a ad d f. Similiter quod fit ex h d in *Per 2. secun*
d g, æquale est ei quod fit ex h g in g d cum *di Elem.*



Per 35. ter tij Elem.
Per 47. pri mi Elem.

quadrato d g, at quod fit ex h g in g d est æquale ei quod fit ex c g in
g a, erit quod fit ex c g in g a cum quadrato d g ęquale ei quod fit ex
d h in d g. Quadratum autem d g est æquale quadratis d b, b g igi- *Per 5. secun*
tur d h in d g æquale est ei quod fit ex g a in c g cum quadratis b d *di Elem.*
b g, at quod fit ex a g in g c cum quadrato b g est æquale quadrato

T b a

b a igitur quod fit ex d h in d g est ęquale quadratis d b, b a quę sunt
Per 17. sexti Elem. ęqualia quadrato a d, igitur quadratum a d est ęquale ei quod fit ex
h d in d g, quare proportio h d ad d a ut d a ad a g. Quia ergo pro-
Per 16. & 17. sexti Element. portio d e ad d a ut d a ad d f, & d h ad d a ut d a ad d g, erit d e ad d h
ut d g ad d f.

Cor^m. Vnde manifestum est omnes has lineas in suam interiorem partem ductas rectangulum constituere ęquale quadrato quod circulo eidem inscribitur.

Propositio centesimanonagesimatertia.

Rationem ponderis triplicem explicare.

Co^m. Superius declaratum est quòd id quod quiescit, habet motum
Propos. 26. & 38. Quęst. 19. Mechan. occultum. Quærit autem Aristoteles cur securis pondere pressa nõ diuidit lignum, minore uerò sed moto sed modo diuidit? Diximus motum inesse qui perpetuo augetur, indicium est, quod si ex a descendat, maiorẽ facit ictum, quoniam plurimus aër coadiuuat, ex d autem occultum solũ, et eum qui fit ratione grauitatis, medium ex medijs locis. Omitto modo de motu aucto per uim humanam, de quo uidetur quærere Aristoteles, quilibet enim aër addit super motum iam acquisitum & fit hoc argumentum centies ac millies maius, quoniam in est qui diuidit, pondus autem non ponetrat. Sicut ergo cuneus magis diuidit lignum quam claua, ita quod mouetur sine proportione (ut ita dicam) non solum ob impetũ necesse est ut uehementer diuidat lignum aut lapidem subiectum, & non in proportione distantię. Sicut si pondus in forma securis, & ipsa securis diuidit longe magis ligna quam clauis maioris ponderis & maiore ui descendens: ita pondus motum quam immotum. Hoc adeò perspicuam habet caussam, ut quanto plura uerba adderentur, eo redderetur res difficilior. Habet ergo propriam solum grauitatem & motum occultum. Cęterum est tertium, genus mediũ, cum idem pondus appensum est, uelut f quod dico esse maius & minus occultum quam si iaceret in plano, quoniam sicut tuber & cauitas in qua iacet simul tempore sunt, natura tamen tuber est prius cauitate, ita pondus appensum prius est, contrà nixum uinculi natura & quodammodo tempore, semper enim grauat, & illud semper resistit supra illius grauitatem: Sed pondus quod est in plano occultam omnino habet actionem bifariamq; distinguitur a pondere suspenso: Primum quòd pondus quod quiescit & contra intendi principium simul non solum sunt tempore sed etiam natura. Sed in appenso, ut dixi, pondus prius grauat quam uinculum





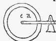








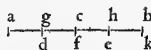
lum contranitatur. Secundò, quia pondus in plano non inchoat motum sed pendens inchoat, ideo quòd est in plano habet prorsus occultum, quod pendet non: & si sit lignum eiusdem molis & duritiei cui appensum sit f & cui insideat, magis attereturid cui appenditur, & priusq̃ cui insidet. Cæterùm quod ad grauitatem attinet æqualia sunt, nam aër in utroque pellit deorsum, ac magis quod quiescit in plano: solum enim planum resistit, in pendulo oncre etiam aer suppositus, quo fit ut quod pendet, minus graue sit. Sed æqualia uidentur.



Propositio centesimanonagesimaquarta.

Proportionem ponderis longioris in medio suspensi ad breuius illi æquale & in medio suspensum, declarare.

Hanc generaliter proposuit Aristoteles in Mechanicis, ostendit eñ quod si a b in e, & d e in f æqualia pondera in medio suspendãtur, quod grauius erit a b quam d e. Et hoc est certum quia a & b extrema plus distant ab hypomochlio. Sit igitur g h resecta æqualis hiccinde d e, pondus est æquale a b, erit g h minus pondere d e in k, igitur per communem animi sententiam k est æquale uerò ponderi a g & h b, igitur cum a g & h b plus ponderent in situ suo quam in situ d e, patet propositum quoad Aristotelem attinet, scilicet quod a b est grauior d e. Quæst. 27.



Vt modò ostendam proportionem, erit proportio h b ad g h ut ponderis h b ad totum pōdus g b, eadem ratione a g ad g h ut ponderis a g ad totum a h, a h autem est æqualis g b & a g æqualis h b ex communi animi sententia, & pondus a h æquale ponderi b g, quia sunt æquales & in eodem situ: igitur a g, h b ad g h, ut ponderum a g h b ad pondus g b. Et ita patet quod quanto longior est a b in comparatione ad d e, tanto a g & h b in comparatione ad g h, igitur tanto maior proportio ponderum a g h b ad pondus a h. rursus est tanto maius quanto a b est longior per demõstrata in prima parte, igitur multo maius est pondus a g h b, quanto longior a b in comparatione ad d e. Per 92. huius.

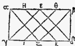
Exemplũ sit ponderis a b 12 ponderis lõgitudinis pedũ quatuor, d e pondus 12 longitudinis duorũ pedum, erunt igit̃ a g, g e, c h, h b unius pedis singule. Et quia a g & h b sunt dimidiũ g h erunt ambæ pariter æquales g h & ideo pondus a g h b æqualia g b ponderi, sed pondus g b est librarum nouem, quia g b est dodratus a b, igitur tota a b est ponderis quindecim, nam g h est ponderis sex, est ergo pondus a b quadrante maius d e.

Propositio centesimanonagesimaquinta.

Si lectus fiat dupla longitudine ad latitudinem melius fulcietur restibus ex medio ad angulos, & eis æquidistantibus quam secundum longitudinem & latitudinem.

Com. Quæst. 25. Hæc proponitur à Philosopho in mechanicis, & dico quod si a b sit dupla a c, & αβγ dupla, & diuidantur a b a c & αβαγ in quotuis partes æquales inuicem, nam supponitur a b æqualis αβ & a c æqualis αγ, & ducantur rectæ lineæ decussatim & ad rectos angulos, & secundū id statuantur restes, quod decussatim positæ utiliores erūt, omitto quod decentius ob spatiorum minorem differentiam. Adducam solùm tres Philosophi rationes: prima, quoniam ligna non adeò facile finduntur nec incuruantur transuersim tracta, ut recta & secundum longitudinem, Et ideo longè plus durabit αβγδ quā a b c d, & cum spondis rectioribus, & ideò etiam cum restibus magis intentis: & erit firmior & pulchrior. Secunda ratio est, quod cum





restes in secunda constitutione æquales inuicem sint, in prima quæ secundum latitudinem duplę, quę longiores erunt magis laxabuntur transuersalibus, & ita turpiores & incommodæ breui reddentur, & in secunda constitutione ęqualiter sustinebunt pondus & reuolutionem cubantis, tum ob æqualitatem longitudinis inter se, tum ob situm similem inter se, tum ad humanum decubitum dissimilē, nam (ut ostensum est) in præcedenti magis grauat pondus in extremis quam in medio, & magis laxantur ob id quæ sunt secundum eundem situm. Et hanc caussam expositores non intellexerunt multi, multo minus tertiam, in qua faciunt demonstrationem Geometricam & computant rem numeris. Deinde non animaduertunt quod in secunda figura assumunt quinq; lineas, cum in prima tantum assumpsissent quatuor. Peius omnibus est quod demonstratio hæc cum de transuersis ad magis transuersas lineas sit non est ad propositum Aristotelis, qui in duabus primis rationibus transuersas comparauit his, quæ à latere ad latus & à capite ad caput deducuntur, ita ubi trifariam decepti sunt, ibi maximè gloriantur. Miserum nunc philosophandi genus: uoluntq; supercilium esse loco doctrinæ. Sint igitur lineæ ductæ ut uides, dico omnes pariter acceptas in prima figura, esse longiores omnibus pariter ac-

Per 34. pri mi Elem. ceptis in secunda figura, quod intendit demōstrare Aristoteles. Ostenso ergo de duabus, idem supposito numero æquali de omnibus

constat.

constat. Demonstrandum est ergo a b & g q'maiores esse αζ & ζβ, nam αγ & γζ sunt æquales & ζδ & δβ ex supposito, quare αζ & ζβ æquales sunt potestate quadrato, αβ igitur ambæ iunctæ lineæ mediæ inter duplum αβ & ipsam αβ, quadratum enim αζ & ζβ coniunctarum est duplum quadratis uniuscuiusque earum pariter acceptis, uelut & quadratum mediæ inter duplum αβ & ipsam αβ, at quadratum coniunctæ ex a b & a c est æquale duplo quadrati a b cum quadrato a c, igitur superat duplum quadrati αβ in quadrato a c, sed quod potest in duplum quadrati αβ est aggregatum αζ & ζβ, igitur a b & a d sunt longiores iunctæ αζ & ζβ quia possunt eo plus quantum est quadratum a c.

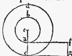
Per 47. primi & 4. secundi Elem.
Per 17. sexti Elem.
Per 4. secundi Elem.
Per eandem.
Per eandem.

Propositio centesimanonagesimasexta.

Si duo circuli super eodem centro eodem motu transferuntur, æquale spatium superant.

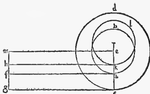
Sint duo circuli a b, c d super eodem centro e qui transferantur super axe per spatiũ c g dum resoluitur c d, tum ergo a erit in f, quia c d contingit planum c g, igitur e c est ad perpẽdiculum c g, ergo punctum a est in f & a f æqualis c g, igitur a b circulus solum reuolutus est semel, & tantum perambulauit spacij quantum c d & æquali uelocitate, cùm tamen seorsum sit proportio spatij ad spatiũ ut circuli ad circulum. Hæc est subtilissima quæstionũ propositarũ ab Aristotele in mechanicis, quam sic quidam soluunt. Supponunt duo: primũ si quid ab aliquo mouetur nihil conferens ad illum motum, ex se ipso per tantum mouebitur spatiũ, per quantum ab illo motore mouebitur: Secundum, eadẽ potentia in eodẽ tempore diuerso modo duo mobilia mouebit æqualia, cum unũ motui assentietur aliud nõ. quod si hæc mobilia seiuncta fuissent, quod aptitudinem haberet seiunctũ uelocius moueretur, quàm dum coniunctum est. Cum ergo inquiunt circulus c d moueatur ab a b circulo, nec conferat quicquam ad motum, ideo tantum transibit spacium

Com.



Per 18. tertij Elem.
Per 34. primi Elem.

Quæst. 25.



c d quantum a b per primum suppositum. Sed quoniam proposito circulo alio non circa idem centrum, utpote k l reuoluetur & perueniet ad h ex demonstratis. Respondet ad hoc, quod idem est, quia unus circulus tantum per se mouetur circa centrum, reliqui omnes non per se circa centrum, sed ab alio circulo primo mouentur, ideò nihil refert seu sint circa idem centrum seu circa aliud, hoc enim fortuitum est. Ideo ad argumentum respondent cauillosam esse hãc disputationem, cum supponat idem ambobus circulis per se centrum esse. Sed non est per se, uerùm per accidẽs. Attamen demiror de huiusmodi solutione. Primum quod ipsemet. Aristoteles de hoc nos docuit in primo Posteriorum dicens. Non est igitur ex uno in aliud genus transcẽdentem demonstrare, ut Geometricum Arithmetica. Et Auerroës in Commento magno inquit, ea uerba exponens. Fieri non potest, ut demonstratio transferatur de arte in artem. Et ibidem docet, quod neque ut ambæ præmissæ sint communes, neque etiam maior tantum, sicut exponebat Alpharabices. Verùm dicit, solum licet in artibus, quæ sunt in comparatione generis ad speciem, ut sit conclusio ueluti physica maior propositio, in subiecta scientia ueluti medicina. Vnde cõcludit Philosophus. Propter hoc Geometriç non licet demonstrare quod contrariorum una est scientia: sed neq; quod duo cubi cubus, neq; alij scientiæ quod alterius: nisi in his quæ ita inter se habent ut altera sub altera sit, ueluti perspectiua ad Geometricam, & harmonica ad Arithmeticã. Et post docet quod etiam non licet demonstrare ex communibus: hæc igitur ratio est ex alienis genere atq; communibus. Quid, quòd non soluit difficultatem quç mathematica tota est & innititur manifestis principijs. Debuit enim ostendere quomodo tardius moueatur circulus maior ipso minore. hoc enim est necesse si eodem tempore debent æqualia spatia pertransire. Accipiamus ergo quod manifestum est, scilicet uectionem esse hanc in qua e centrum perpetuò per æquidistantem lineam fertur in m, nullum autem circulum progressus centri esse causam nisi ut rota mouet currum & currus axem, reuolutio ergo notæ efficit ut spatium e g pertranseat nota, & ideo motus ille circularis non est, quia circularis motus fit manente centro, sed est circulus progrediens uelut & punctum erat in circulo, hoc est discrimen quòd puncta, uariantur centrum autem non. Dico ergo ut melius intelligas quòd talis motus est uelut famulorum fabrorum qui rotam circunducant domũ impellentes, talis enim motus, est rectus, & est impulsionis non autem circularis. Et ideò omnia puncta æqualiter mouentur, & per æquale spatium, accidit autem ut hic motus fiat circunuertendo, sicut

sicut etiam si traheretur fune. Et si quis obijciat quod hæc responsio est eadem cum illa quę tribuitur Aristoteli, dico quod non, quia in illa supponuntur duo falsa, unum quod principium motus aliquando sit in c d, aliquando in a b, quod pro secunda parte falsum est: nam nunquàm principium potest esse in a b, nam si intelligamus de modo motus, non mouetur nec a b nec c d motu circulari, quoniam (ut dixi) motus est uectio, seu tractio, non circularis. Sin autem de causa motus rotæ illa est in circulo semper maximo, scilicet c d & non a b. Et causa erroris horum fuit duplex: cum enim scirent hanc rationem, dubitarunt an circulus c d motus esset potius causa motus circuli a b, an contrà, ideò protulerunt ambos, sicut illi quibus sublata est res aliqua, ut non errent, dicunt hic, uel hic subripuit rem meam. Secunda fuit, quia nesciuerunt distinguere inter motum per circulum & motum circularem, cum sit magnum discrimen: motus enim rotæ est per circulum, quia per circumferentiam eius, quæ est circulus, non autem circularis. Etsi superius appellauerim circularem, cum distinxi in triplicem motum sphęrę circumuolutionem, tunc non curaui de uerbis, quia uerba tum non erant causa erroris.

Ex hoc patet unum, quod est difficilius, scilicet quia certum est, quòd tam c d quàm a b mouentur super rectas, & ita ut singula puncta c d tangant singula puncta c g, & a b singula puncta a f, & tamen c d circumferentia, aut non est æqualis rectæ c g, aut circumferentia a b non est æqualis rectæ a f, aliter si ambæ circumferentiæ ambabus rectis essent æquales, cum rectæ sint æquales, ut demonstratum est, essent circumferentiæ etiam a b & c d, æquales maior minori, quod est impossibile. Non ergo ualet argumentum, iste circulus circumfertur super rectam aliquam, ita ut cum redit ad idem punctum rectam perambulauit ad unguem, ergo illius peripheria est æqualis illi rectæ. Corn.

Melius ergo fuisset huius reddere rationem, in quo est tota difficultas, nam illa (ut dixi) de motu circulari nulla est, si quis tam penitus introspiciat. Sit igitur ut rotæ axis c, transeat in f, & quia c a & f g æquales sunt a centro ad circumferentiam, & a g æquidistans b c, erit per demonstrata punctum g in linea f h, & ponamus quod punctum fuerit m, quod translatum, & retro reuolutum perueneritad h, & secet e m a b circulum in n, dico quod n est punctum g, in quo etiam est animaduertendum de stupore horum scribentium, nec aduertentium quod puncta circulorum a b & c d retrocedunt, uersus a & c, & non uersus o & p, & hoc est quod decipit illos. Corn.

Quia ergo m est h & e f, igitũ cum n sit in linea e m, erit in linea f h, sed n est etiã in circulo a b, igitur cũ nullũ sit punctũ aliud in linea f h, et circulo g q, quę g est n cõmunis sectio, igitur n peruenit in g. Vides ergo quod m retrocessit per angulum m g h, n autem antecessit per angulum n g f, qui est æqualis angulo m g h. Ex quo liquet causa dictorum, & quod non intellexerunt quæstionis fundamentum cum ferantur singula puncta in una reuolutione æqualiter cum centro motu recto: & motu circumuolutionis sunt immobilia, quia tantum retrocedunt in una medietate, quantum procedunt in alia.

Propositio centesimanonagesimaseptima.

Cur lances ad locũ suũ suspẽsi redeãt impendẽtes nõ, demõstrare.

Com. Quæst. 7. Mechan. Aliâs cum uiderem apud Aristotelem & eius expositores hoc problema non sum ausus, quia ex proprijs non mihi occurrebat demonstratio, rationem reddere, at confecta dialectica statim apparuit modus. Sit ergo libra a b appensa ex trutina c d, & sit perpondus educta loco e f, & sublato reuertitur ad locum priorem: Et rursus eadem si immineat g d sustentaculo nõ mouetur: igitur palam est quod in trutina d e grauior est quã d f insistens g d, nõ est adeo grauis, aut omnino non grauior. Neque potest id accidere quod in primo casu angulus e d c acutus, sit in secundo obtusus, nam si ob angulum e d c acutum descẽdit in primo casu e, in secundo casu descendet f, quia pariter f d g acutus est, & æqualis e d c, hoc autem non contingit. Mira ne dicam stultitia an audacia eorũ, qui nihil intelligentes ausi sunt, hæc pertractare, sperantes in tot seculis nullum futurum, qui ignorantiam suam & impostura deprehendat, dicunt enim quod in primo casu producta quadam recta ad perpendiculum, & quæ sit h k maiorem reddi d e quàm d f, neque quomodo id fiat ostendunt, & si (ut dixi) maior sit quã d f in primo casu maior d f quam d e in secũdo casu: ergo si in primo casu d e descendit, in secundo descendet magis d f, at hoc non accidit sed stat.

Oportet igitur hoc esse principium ex Dialectica, quod ostendat e grauiorem esse f in primo casu, in secundo non esse grauiorem, aut leuiorem, ut neq; ad angulum refugere posimus. Ergo supponere oportet quæ manifesta sunt, e esse grauiorem f, aliter enim non descenderet: non prohiberi autem in primo casu motum prohiberi in secundo, aliter uel grauior fieret f, uel maneret eadem grauitas: siquidem maneret grauitas, nec impediretur descendere e in secundo casu, ut in primo, at non descendit. Si grauitas mutaretur, igitur f descenderet secundo casu magis quam in primo. Quod si dicas non tanto fieri grauiorem, igitur f magis depressa descendet saltem, at nunquam descendit, igitur grauior est semper e quàm f, sed in secundo casu impeditur motus non in primo. Causa grauitatis est, quoniam d est centrum grauitatis, quia medium, igitur cum c & d conspirent contra f, necesse est e descendere per superius demonstrata, igitur e descendet in primo casu, quia grauius est ut docui nec impeditum. At in secundo casu e & d sunt grauiora, sed d est impeditum, quia non habet motum, nisi occultum insidet enim g d, igitur tantum ponderat e quam f, ergo prorsus non mouebuntur, facit & ad hoc quòd quæuis latitudo d, sustentaculi prohibet motum, at deesse uix potest. Vides ergo illos nugas palam agere. Primum deest illis dialectica, deinde ingenium acre, deinde quod maius est, uolunt confestim transire ex principijs ad remota theoremata, quod fieri non potest.

Propof. 4.

Prop. 13 3

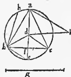
Propositio centesimanonagesimaoctaua.

Cur solidum quod cubus uocatꝰ, pyramide stabilius sit, ostendere.

LEMMA PRIMVM.

Si intra circulum triangulus æquilaterus describatur, & ab uno angulorum per centrum rectà ducatur, angulum per æqualia diuidet, & trianguli latus, & ad angulos rectos ei insistet, ipsa uerò quæ ex centro per æqualia uicissim à trianguli latere diuidetur.

Sit a b c æquilaterus circulo inscriptus, cuius centrum d, ducaturq; ad e f rectà per centrum, & ducantur d b & d c, eritq; ex hoc triangulus a b d æquilaterus triangulo a c d, quare angulus b a d æqualis c a d, igitur arcus b e æqualis c e, igitur arcus b e est sexta pars circuli, quare b e recta latus exagoni, quare b e erit æqualis d e, igitur cum anguli a d f sint utrinq; recti, erit d f æqualis f e, itaq; f d, tertia pars f a & f b dimidium a b quia b c.



Co.
Per 8. primi Elem.
Per 26. tertij Elem.
Per 28 eiusdem.
Per Corr. 15. quarti Elem.
Per 4. primi Elem.
Per 47. primi Elem.

LEMMA

LEMMA SECVNDVM.

Quadratum lateris trianguli æquilateri se habet ad illius superficiem, ut latus eius ad mediam lineam inter latus dodrantis, & quadrantis proportione duplicata.

Com. Quadratum a b est æquale quadratis a f, f b, & quadruplum quadrato b f, igitur quadratum a f est dodrans quadrati a b. Quod uerò fit ex a f in f b est medium proportione inter quadrata a f, f b, rectangulum igitur ex a f in f b, est ex lateribus dodrantis a f, & quadrantis b f quadrati a b, quare cum mediæ inter a f & f b æquale faciat quadratum rectangulo a f in f b, erit proportio quadrati a b ad quadratum mediæ inter a f, f b, ut lateris trianguli ad mediam inter latera dodrantis, & quadrantis quadrati lateris ipsius duplicata: rectangulum autem a f in f b est æquale triangulo a b c, igitur proportio quadrati a b ad triangulum a b c est uelut lateris a b ad mediam inter latera dodrantis & quadrantis duplicata.

(Per 27. primi Elemen. — Per 1. sexti Elem. — Per eandem & 11. sexti Elem. — Per 17. & 20 sexti Ele. — Per 41. primi Elem.)

LEMMA TERTIVM.

Propositio quadrati cubi sphæræ inclusi ad triangulum pyramidis eidem sphæræ inclusæ, est uelut lateris pyramidis seu trianguli eius ad cathetum suum.

Com. Proponatur enim sphæræ diameter g, & latus pyramidis b a, & latus cubi b h, quæ corpora illi sphæræ includuntur: igitur g erit potestate sexquialtera ad a b, & tripla ad b h, igitur b a est potestate dupla ad b h, quod igitur fit ex b a in dimidium suum, est æquale quadrato b h, igitur h h est media inter b a & b f, b f enim est dimidium b a, ut probatum est. Quadratum igitur a b se habet ad triangulum a b c, ut a b ad mediam inter a f & f b duplicata: Quadratum quoque a b se habet ad quadratum h b, ut a b ad mediam inter a b & b f, duplicata igitur proportio quadrati b h ad triangulum a b c, est uelut lateris a b ad cathetum a f.

(Per Corm. 13 decimitertij Elem. — Per Corm. 15. decimitertij Elem. — Per 17. sexti Elem. — Lemmate 1. — Per 67.)

LEMMA QVARTVM.

Proportio lateris pyramidis ad axem illius est potestate sexquialtera.

Com. Intelligatur basis pyramidis triangulus a b c, & conus pyramidis k, & quæ per centrum sphæræ transit ex cono k d, cumque k d a angulus rectus sit, erit quadratum k a æquale quadratis k d, d a, at d a est dupla d f, ut probatum est, igitur potestate sexquitertia f b, k a uerò est quadrupla potestate f b, quia f b est dimidium k a, igitur k a est tripla potestate a d, igitur k a potestate sexquialtera k d, quod erat demonstrandum.

(Per 47. primi Elem. — Lemmate 1.)

Cor. Ex hoc patet quod proportio axis pyramidis ad latus cubi eadem sphæra circumscriptorum est potestate sexquitertia.

Quia enim k a est potestate dupla ad b b, & sesquialtera potesta te ad k d, necesse est ut k d sit sexquitertia potestate ad b h. Com.

LEMMA QVINTVM.

Prisma altitudinem habens pyramidis & triangulum eiusdem basim, æquale est cubo eidem sphæræ inscripto.

Cum enim proportio quadrati b h ad triangulum a b c sit uelut ab ad a f, a b autem ad a f sit sexquitertia potestate ex demonstratis, erit quadratum b h ad triangulum a b c sexquitertium potestate: at cubi b h altitudo est ipsa b h, prismatis autem a b c altitudo est k d, k d autem potentia sexquitertia ad b h, igitur prisma a b c est æquale cubo b h, quod fuit propositum. Com. Per 3 lemmã. Lemmate 2.

Ex hoc sequitur, quod cum prisma sit triplum suæ pyramidi, ut ab Euclide habetur, quod cubus est triplus pyramidi, quam eadem sphæra circumscribit. Cor. Per cor. lemmatis 4. Per 34. undecimi Elem.

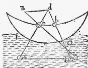
Nunc uenio ad demonstrationem propositionis, & dico quod corpus difficile est ad motum, uel ob magnitudinem basis, cui insidet, uel ob pondus, uel ob formam: nam corpus quod forma est contracta, difficilè mouetur, ut pyramis, contrà, quod prominet à lateribus, facile reuoluitur, ut corpus duodecim basium pentagonarum, & uiginti triangularum: ergo cubi sedes est maior quàm sua pyramis, & pondus triplo maius, & etiam non prominet cubus, ideò pro re stabili positum est corpus eiusmodi. Eo quod ob grauitatem etiam, ut dixi, sit stabilius pyramide eiusdem sphęrę. Quod si etiam assumeres pyramidem, cuius basis esset æqualis quadrato cubi, ipsa se haberet ad pyramidem sphæræ in grauitate, uelut latus trianguli ad suum cathetum, & ideo proportio ponderis cubi ad pyramidem esset, uelut tredecim ad quinque fermè: ergo ratione ponderis esset longè stabilior cubus ipsa pyramide. At in alijs corporibus, quæ rationalia uocantur, non est tanta proportio ponderis, & basis est minor & forma prominet. Ex 7. duodecimi Elem. Com.

Propositio centesimanonagesimanona.

Rationem remorum nauim impellentium inuenire.

Sit a remi extremum, quod manu apprehenditur, b scalmus cui remus insidet: c extremum aliud latius remi, quod uocant palmam, transferatur nixu manus, & motu corporis a in d, ut c perueniat in e, sunt enim æquales a b, d b, b c, b e etiam & anguli a d b contrapositi, quare trianguli a b d & c b e similes, igitur primum quanto maior propositio c b ad b a, tanto maior proportio c a d a d, & ita ex æquali motu longius transferetur remus, seu palma. Secundum, cum motus a d fiat nixu brachiorum & corporis, quanto magis transfertur corpus eo minus opus erit brachiorum Com. Per 15. primi Elem. Per 4. sexti Elem.

rum nixu, & ita minus laborabunt. Et
Prop. 188. quo minus laborabunt brachia, plus corpus laborabit. Et ideò, ut declaratum est suprà, minor labor erit cum æqualiter ambo laborabunt. Tertium, quo minor erit proportio c b ad b a, eo maius spatium pertransibit remex, qui mouet ex a in d, sed tanto facilius
Propos 71. mouebit, quia labor motus b c minuetur, ut supra uisum est per longitudinem a b & d b, ut suprà demonstrauimus. Quartum, cùm remus transierit quoddam spatium iuxta robur, puta ex c in e, necesse est ut eleuetur super aquam, tum quia impediret motum progressus nauis, tum ut transferatur ante: aliter si transferretur ante sub aqua difficilius multo, quam per aërem transferretur, & retroageret tantundem nauim, quantum antea retroactam impulit. His per se notis dico, quòd translato remo ex c in e, necesse est nauim contrà transferri ex f in g: nam quia impedimentum ex aqua transitur c in e, maius est quam nauis superaquam, & remus debet transferri ex a in d, & non potest transferri nisi uel stante naui, & translato c in e, uel stante a b c remo, & translata naui: & tunc necesse est, ut e progrediatur ad h, ita descabit aquam c h, ergo difficultas manet eadem fermè, ex his fit motus compositus, ut palma non redeat usque ad e, sed maneat remus minus inclinatus, & quasi ad perpendiculum in h. Et manifestum est, quòd erit motus compositus ex retrocessu remi & processu nauis. Qui etiam remiges circa medium sunt minus laborarent, si remus æqualiter promineret extra scalmum, sed magis laborant, quia proportio est eadem, & a b est longior, & crassior remus, ut minus flectatur ob longitudinem, aliter si esset æqualis crassitudinis, & multo longior flecteretur aut frangeretur, ideò robustiores remiges ponuntur in medio triremis. Iuuatur præterea motus nauis prorsum ex percussione remi, & impetu iam aquisito cum nixu remi in aduersum subpeueniente. Rursus cum nauis transferatur eodem tempore antè quò a progreditur ad d, manifestum est quòd magna pars est ex motu nauis, non nixu corporis aut uirium: & ita quod celerius mouetur ex c in h, ab initio dum nauis quiescit, aut tardius mouetur, tardius autem dum nauis progreditur.

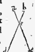


Propositio ducentesima.

Cur temo cũ paruus sit magnam nauim agere potest: & cur cum uarietas sit in prora, ipse constituatur in puppi. Et cum transuersim ab aqua prematur, rectâ nauim dirigat?

Dixi

Dixi quod in hipomochlio parua uarietas fit in motu: igitur à leui causa magnum nauigium impellitur aut uariatur. Cùm enim à trāsfertur ad b, fit minima uarietas in c, igitur a parua poterit transferri, tum uero quod debuit trāsferri ad c, transfertur ad d, nam motus ipse ab alia causa fit, uelut uēto aut remis, ita non est difficultas nisi propter motum aquæ, scilicet ut tabula scindat illam. Ad hoc autem confert illud quod intra nauim prominet ut uectis rationem habeat, & ob id facilius uerti. Com.



Similiter uarietas in puppi exigua est causa magnæ uarietatis in prora, quod autem potest fieri paucioribus & faciliori modo id debet fieri, hac igitur causa in puppi temonem constituere oportet seu gubernaculum.

Cum autem impellatur à mari, necesse est, ut à latere excipiat aquam ita ut tantum pendeat in unam partem, quantum nauis in aduersam, nam si nauis non penderet, gubernaculum rectè dirigeretur: Vt ergo ex duobus obliquis unū rectum constitui tur, ita ex naui & gubernaculo, nam sint a b & c b. & impellatur ad d, impelletur per mediam lineam b e & non per a b neque c b, igitur oportet temonem pendere ex ad uerso inclinationis nauis. Est etiam alia ratio, quoniam nauis securior redditur, nam quemadmodum quod in medio est, facilius impellitur transuersim, quàm quod pendet in contrarium, ita & in gubernaculo. Est & id ob necessitatem, quoniam motus aquæ plerumque est in partem, uelut & uentus ad latus eius situs, secundum quem moueri debet nauis. Sicut igitur & uela & malus inclinantur, ut motum directum efficiant, quia aliò dirigitur nauis quam qui mouet uentus, ita de temone comparatione aquæ.



Propositio ducentesimaprima.

Si duæ lineæ non secantes circuli peripheriam in unū punctū, ex ea coëant, exterius necesse est illas peripheria cōtenta esse maiores.

LEMMA PRIMVM.

Si fuerit proportio primi ad secundum maior quàm tertij ad quartum, erit primi ad tertium maior quàm secundi ad quartum.

Quamuis hoc demonstretur à Campano, quia tamen facile est hic adijcietur. Sit igitur maior a ad b quam c ad d, dico maiorem esse a ad c quam b ad d, quia enim maior est a ad b quam c ad d fiat e ad b ut c ad d eritq; e minus quam a, e igitur ad c ut b ad d sed maior a ad c quam e ad c igitur maior a ad c quam b ad d.

a — c — e
b — d —

Com. Per 10. quinti Elem. Per 16. eiusdem. Per 8. eiusdem. Per 11. eiusdem.

LEMMA SECVNDVM.

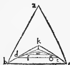
Si fuerint quatuor quantitates, quarum excessus primæ supra secundam, sit minor excessu tertiæ supra quartam, sitque prima non minor tertia, erit proportio primæ ad secundam minor quàm tertiæ ad quartam.

Per 8. quinti Elem. per tes ambas. Per 10. quinti Elem.

Co^m. Sit excessus a supra b c, g b minor excessu d supra e f qui sit h e, dico quod proportio a ad b c est minor proportione d ad e f. Quia enim a est maior d, & b g minor h e, erit maior proportio a ad b g quàm d ad h e, igitur fiat a ad g k ut d ad h e, erit ergo g k maior g b quare k e minor b c ex communi animi sententia, est autem a ad k c ut d ad e f, minor autem a ad c b quàm ad k c, igitur minor a ad b c quam d ad e f.

Per 19. eiusdem. Per 8. eiusdem. Per 11. quinti Elem.

Si intra circulum æquicurium, & super eandem basim figura æquilatera & æquiangula cõstituatur, erũt omnia illius latera pariter accepta minora duobus trianguli lateribus.

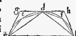


Com. Sit ut proponitur, & producantur b d & c e quæ concurrent intra triangulum, quia anguli d b c & e c b supponuntur ęquales, & ducta d e producantur d f l, & e g l quæ concurrẽt intra triangulum k d e ut propter eandem causam, igitur a b & a c sunt maiores k b & k c, ergo maiores k d, d b, & k e, e c quia sunt eædem. Ductę quoque de simili modo k d & d e, sunt maiores l d & l e, igitur l f, f d & l g, g e, igitur a b & a c maiores sunt b d, d f, f l c e e g g l pariter acceptis. Rursus ducta f g: f l & l g maiores sunt m f & m g, igitur a b & a c sunt maiores omnibus lateribus figuræ inscriptæ.

Corr. 1. Ex hoc patet quod latera polygoniæ figuræ ęquilateræ & æquiangulæ inscriptę portioni circuli sunt minora lateribus trapezij circunscripti eidem peripheriæ.



Co^m. Sit ergo trapezium a g h b circa peripheriã a b, & in ea inscripta figura polygonia æquilatera & æquiangula a c, d f b. Et quia trapezium est figura cuius opposita duo latera sunt ęqualia, & duo anguli supra basim æquales: itemque duo in summitate inuicem ęquales, tãget in medio peripheriam quod patet ductis lineis ex centro ad extrema trapezij. Et ideo etiam punctũ medium polygoniæ, quare ex



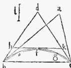
Per 4. primi, & 16. tertij Elem.

hoc

hoc lemmate duo latera g d & g a deducta ad æquicrurium, erunt maiora lateribus polygoniæ, & similiter duo latera h d maiora lateribus polygoniæ inclusæ, ergo latera trapezij erunt maiora omnibus lateribus polygoniæ inclusæ.

Ex hoc habetur demonstratio propositionis: sint duæ lineæ a b & a c quæ comprehendant portionem circuli b c, dico eas esse maiores b c portione, si enim a b & a c sunt æquales diuiso arcu b c per æqualia in f, ducam contingentem h f k, si non faciant triangulum æquicrurium b c d super b c, & cuius ambo latera pariter accepta sint æqualia a b & a c. Et ducam contingentem & habebo trapezium h b, c k. Quare si peripheria circuli b c est minor d b & d c pariter acceptis, habeo intentũ, si non toties diuidã peripheriam per æqualia ut fiat figura polygonia super b c æquilatera & æquiangula, cuius differentia a peripheria sit minor differentia d b & d c à trapezio b h, k c, id est, tribus eius lateribus, nam cum d h & d k sint maiores h k, constat quod d b & d c sunt maiores h b, & k c & h k igitur sit differentia illa l, & differẽtia peripheriæ à lineis polygoniæ minor l: igitur cum peripheria sit æqualis aut maior d b & d c, & differentia a lateribus polygoniæ minor quàm d b & d c, a b, h b, h k, k c, erit minor proportio peripheriæ ad latera polygoniæ quàm d b & d c ad tria latera trapezij, quare minor proportio peripheriæ ad d b & d c quàm laterum polygoniæ ad tria latera trapezij, sed latera polygoniæ sunt minora tribus laterib. trapezij, igitur peripheria b c est minor d b & d c, quod erat demonstrandũ.

Com.



Per 2. & 12 primi Elem.

Per 5. eiusdem.

Per 20. primi Elem.

Per 2 lemma.

Per 1 lemma.

Per Cor^m. 3 lemmatis.

SCHOLIVM.

Hanc propositionem non scripsi quòd esset magni momenti, sed propter modum probandi, si enim respicis ex uno opposito scilicet quod peripheria circuli sit maior trianguli lateribus, ostendo demonstratione non ducente ad inconueniens, sed simplici quod ipsa peripheria est minor trianguli lateribus, & hoc nunquam fuit factũ ab aliquo, imò uidetur plane impossibile. Et est res admirabilior quæ inuenta sit ab orbe condito, scilicet ostendere aliquid ex suo opposito, demonstratione non ducente ad impossibile & ita, ut nõ possit demonstrari ea demõstratione nisi per illud suppositũ quod est contrarium conclusioni, uelut si quis demonstraret quod Socrates est albus quia est niger, & non posset demonstrare aliter, & ideo est longè maius Chrysippeo Syllogismo.

Ex hoc patet quod pars lineæ exterioris quæ tangit circulum inter- Cor^m. 2.

intercepta à linea ex centro longior est peripheria, similiter intercepta.

Co^m. Sit portio circuli a e, & linea a b intercepta à linea c b ex centro, dico a b esse longiorem a e, ducatur b e æqualis a b, ad circumferentiam, quæ illi obuiabit, ducanturque e a, e c eritque angulus e c b æqualis a c b, igitur arcus a d, æqualis d e, quare a d erit dimidiũ a e, & a b dimidium a b, b e, facta enim fuit b e æqualis a b, cum ergo per præsentem duæ lineæ a b, b e, sint maiores a e, igitur per communem animi sententiam a b maior a d.

Per 8. tertij Element. Per 8. primi Elem. Per 26. tertij Elem.



Propositio ducentesimasecunda.

Rationem strepitus ostendere.

Co^m. Fit strepitus ob multitudinem aëris percussi, uelut cum tabulis percutimus: & cauitatum causa, unde ligna & tabulæ leues magis strepunt, & illud Virgilij:

——Sonitumque dedere cauernæ.

Tum uerò ob ictus impetum, impetus autẽ partim uelocitatis causa, partim angustiæ loci. Fulmen edit tonitru in quo & caua nebula excipit aërem, & multum impetuque maximo delatum, obstrepũt autem metalla magis quam ligna eo quòd magis ob continuitatẽ partes moueantur. Indicio est, quod intenta ut æs & tenuia maiorẽ strepitum edunt: & dum sonant tremunt, aurum autem parum sonat, quoniam densissimum est, et minus intentum argẽtum, minus densum, & magis intentum, quod autem intentum est totum simul mouetur, & ob id stridet: lignum autẽ & tabula sonat, non quia ut metallum percutiat aërem, sed quia in eo aër percutitur. Crassum autẽ metallum & lignum non adeò sonant: metallum quoniam non mouet aërem, non enim mouetur: lignum quoniam non mouetur, nec in eo qui est inclusus aër, aër autem facilè mouetur, & ob id in ligno cauo, etiamsi crassum sit, strepitus magnus editur. Ergo etsi tenue sit metallum, quod infixum est tabulę, resonat multum: nõ quia moueatur, sed quoniam aërem in tabula cõcutit. Neque enim tabula per se sola, quæ etiam nimis tunderetur sonum edere magnum potest quoniam cedit: Oportet autẽ non cedere quod resonat, neque metallum si crassum, sed hebetem sonũ etiam tabulę infixum reddit, quoniam neque moueri potest infixum & crassum, nec cauernosum est, & tamen excipit ictum, ne lignum resonet. Velox autem ictus nõ acutum sonũ reddit, & si cum impetu fit: indicio est tonitru & machinę bellicæ ignee, contrà angusta fistula acutũ sonum reddit, etiã remissè inflata. Igitur aër soni causa est secundum motũ, ubi ergo multus aër & magnus motus ibi sonus magnus. Multus quidem aut in ca-

uernoso

uernoso corpore, qui grauissimũ edit sonũ interclusus, ut etiã in uo cibus, aut quia à magno corpore stridulus efficitur, aut inter duo corpora, qui grauitate medius est. Impetu uerò efficit intensus non magnus, nam tonitrus ꝑcul audimus non istum quamuis celerrimum, acutum uerò ob angustiam loci. Atq; hę causę sunt sonorum.

Propositio ducentesima tertia.

Cur scytalis onera portentur facilius, explorare.

Demiror nõ exactè causam manifestissimã Aristotelem non assecutũ fuisse, aut potius ad nos corruptã scripturam peruenisse: nam qui exponũt multo minus intelligũt. Sit ergo currus humilis scytalis incumbẽs a b c. Diximus autẽ suprà quid esset scytala & currus rotis, q̃ sunt longe maiores scytalis e f g h, demõstrandũ est scytalã, quamuis minoris ambitus magis mouere q̃ rotam, cũ ergo de una demonstrauerimus, de oĩbus erit intelligendũ. Quia ergo scytala k l m habet hypomochlion in k et m, & põdus premit in l, igitur rota uersatilis mo uebit tanto facilius, ꝑcedendo, quanta est lõgitudo l m & l k, sed & rotulę illę uersabũt hypomochlion, q̃d est l eõparatione k & m collopum, igitur facilius multo uersabit currus à scytalis q̃ rotis. Et hoc est quod dixit Philosophus. In utrisq;.n. his reuoluit circulus et motus impellit, intelligit mutuã commutationẽ hypomochlij cum collopibus, nam ut trahatur rotulę q̃ sunt hypomochlij loco, collopes terminant in medio: ut aũt uertat axis, qui & hypomochlion in medio collopũ initium sint rotulæ. Ex quo sequit, q̃d quanto lõgiores erunt l k & l m, tanto facilius mouebunt currus, at quanto humiliores, modò non obruantur in terra, quoniam tardius mouentur, quæ minorem habent circuitum, quæ autem tardius mouentur, facilius mouentur, ut suprà sæpius demonstratum est: Ob has ergo duas causas pondera facilius feruntur curribus cum scytalis, quàm cum rotis magnis modò terra non obruantur.

Com. Prop. 114.

Propos. 71

Propositio ducentesimaquarta.

Cur pluribus trochleis pondera facilius eleuentur ostendere.

Dictum est satis de hoc in lib. de Subtilitate, at nunc quod ad demonstrationem attinet eorũ subijciam. Quia.n. singulę rotulę difficulter mouent, igitur necesse est singulas participes esse grauitatis, igitur & totam grauitatẽ esse diuisam: quare ut in pręcedẽti facilius moueri. Habent & rotulę ipsę centrum seu axem hypomochlij, seu fulcimenti loco, ambitum aũt iuxta semidiametrum, uelut collopes

Com. Prop. 71.



seu uectes, quare tanto facilius mouebuntur quanto maiores erũt, & ut plures. Vna enim alterius loco fungitur uectis. Trochlea quidem est, ut uides, instrumentum longum suprà angustius, sed non crassum, in quo plures orbiculi solent collocari, unde sæpe numero trochleæ nomine intelligimus orbiculos ei inclusos, circa quos funis uocatur, ut in trochleis & orbiculi & funes includuntur. Succulis etiam solent capita funium trahi: ut uectis auxilio imò nonnunquàm rotarum facilius pondera eleuantur.

8. de Repub.

Propositio ducentesimaquinta, super uerbis Platonis, de fine Reipub.

„ Est autem ei quod diuinitus generandum est circuitus, quem nu„ merus cõtinet perfectus. Humanæ uerò, in quo primum argumen„ tationes superantes, ut superatæ tres distantiæ: quatuor autem ter„ minos accipientes, similium & dissimilium, abundantiũ & deficien„ tium cuncta correspondentia, & rationem habentia inuicem effece„ runt. Quorum sexquitertium fundamentum quinario iunctũ duas „ efficit harmonias ter aucta quidem: æqualem æqualiter centum to„ ties, quandam autem æqualem quidem, longitudine aũt singulum „ quidem numerorum à diametris rationẽ habentibus quinarij indi„ gentibus uno singulis: non habentibus rationem aũt duobus, cen„ tum autem cuborum ternarij. Totus autem hic numerus geometri„ cus talem authoritatem habet ad potiorem deterioremq́ꝫ genera„ tionẽ. Quem locum Aristoteles ita declarat. Quorum sexquiter„ tium fundamentum quinario coniunctum duas exhibet harmo„ nias, in quiẽs, quãdo numerus diagrammatis huius efficiatͥ solidus.

Quin Polyt. Cap. 12.

Com. πυθμὴν fundamẽtum interpretatus sum, quod radix pro latere in hac materia accipi posset. Par est ut in diuina generatione numerus acciperetͥ perfectus; ut intelligat generationem confestim sequi corruptionem: nam sermo est de corruptione, corrumpitur aũt unumquodq́ꝫ ut aliud generetur, malum enim est ob bonum, non contrà. Liquet autem ex Euclide talem numerum esse octies mille centũ uiginti octo. Et hic est finis omniũ urbium diuinus, cuius quadruplũ uelut in cœli restitutionibus, ac continuato ordine solet obseruari, est propè annus magnus; uerisimile est enim tãto tempore cõfundi decima, scilicet totius circuitus parte. Humanæ uerò intelligit quatuor à monade numeros, aut in quauis ratione principium li- 8
neam superficiem corpus, ut unũ, duo, quatuor, octo pariter 12
octo: duodecim decem octo uiginti septẽ: inter hæc sunt tria 18
spatia, & octo cum uiginti septem sunt dissimilia & deficien- 27
tia: maiora cũ sunt suis partibus à quibus numerantur. Contrà decem octo & duodecim sunt similia atq́ꝫ abundãtia, & corresponden

tem

tem habent rationem inuicem. Hæc Aristoteles omittit, ut ad introductionem, non rem pertinentia, uelut & finem tanquàm ex præcedentibus notum. Vnde uerba Aristotelis sunt ad unguem eadem uerbis Platonis, scilicet: Quorum sesquitertium fundamentum quinario iunctum duas efficit harmonias: loco autem ter aucta quidem, scribit Aristoteles: efficiatur solidus, id est cubus, ut in quadratum suum ducatur: loco autem uerborum æqualem æqualiter centum centies, usque illuc à diametris rationem habentibus quinarij ponit numerum diagrammatis. Est autem diagramma, quod Plato uocat diametrum, cum numerus potest fermè duplum numeri alterius, ut 3 duplum 2, & 7 duplum 5, & 17 duplum 12, & semper numerus hic dimetiens, excedit duplum alterius uno, quod ex his patet, quæ ab Euclide demonstrata sunt in decimo libro. Quare si debet esse quadratum eius monade maius duplo, alterius quadrati, & duplum alterius quadrati est par, igitur addita monade erit impar, ergo latus eius dimetiens impar semper: latera autem ipsa quadratorum, quæ duplicantur aliquando paria sunt ut 2, & tunc quadratum dimetientis est unum plus duplo ut 9 est maius 8 monade, si uerò latera imparia sint, erit quadratum dimetientis uno minus duplo, ut 49 quadratum 7 est minus uno 50, duplo 25, quadrati 5. Ex quo patet agnatio, ut ita dicam inter 7 & 5.

Cum ergo dicit, quorum sesquitertia est, ac si diceret, ex horum numerorum serie sumemus septenarium principium epitrite, & dimetientem 5, quos simul iungemus.

Propositio ducentesimasexta.

Rhombi passiones quasdam declarare.



Com.

Sit a d recta diuisa in k per æqualia, cui superstent k b & k c ad perpendiculum inter se æquales, & singulæ earũ minores k a & k d, & perficiat figura quadrilatera a b d c, cuius latera erunt omnia æqualia inuicem, & anguli a & d oppositi, & b & c oppositi etiam inuicem equales. Sed b & c maiores erunt a & d: & ideo talem figuram appellauit Aristoteles rhombum à piscis similitudine in medio latioris quã in extremis, cuius tamẽ longitudo latitudine maior est. Dicit ergo Aristoteles, q̃d si rhombus ipse circumuoluatur, ita ut b transiret per b a c, & a per a c d, a maius spatium transiret ex recta, scilicet a k d quàm b, quod transiret b k c. Et ad hoc assumit, quòd cum angulus c sit maior a, igitur duæ lineæ a c d sunt minus curuæ quam duæ b a c, igitur b a c habent ratio-

Per 4. primi Elem.

Per 25. primi Elem.

Quest. 23. Mech.

nem currui,& a c d recti. Ergo si in æquali tẽporis spatio b, superet b a c & a, a c d, magis per rectam feretur a quàm b, sed quod d rectum est maius occupat spatium: igitur uelocius fertur a in d comparatione habita ad a d quàm b in c, comparatione habita ad b c.

Pro intellectu reliquorum ab eo dictorum, & quorundam mirabilium, proponatur alius rhombus illi æqualis, in tabula pictus delineatis lateribus & diametris, qui sit l m o n, & diametri l p o & m p n, & abscindatur hic ex superficie, & superponatur ita, ut punctal m o n ordinarim cadant, & aptentur pũctis a b d c, & p aptetur ipsi k. Et tunc si rhombus l o totus moueretur, necesse est, ut moueatur secundum latus aliquod, ut pote l m, & æquidistans a b, igitur dicetur moueri super latus aliquod, scilicet a c: atq; hic est motus, quem Aristoteles uocat motũ a b super latus a c. Si aũt fingamus quiescere latus aliquod l o, uel pars lateris, non posset omnino moueri in superficie a d rhombi: et ita nõ perinde esset ac si a d rhombus moueretur, quod tamen supponit Aristoteles. Neq; etiã si quiesceret punctum aliud quam p haberet rationem motus regularis, quod ab illo supponitur: reliquum est igitur, ut rhombus l o moueatur uice rhombi a d seruando centrum, id est punctum p in puncto k. Dicamus ergo primum de motu composito Aristotelis, & pòst de nostro.



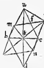
Moueatur l m super a c, æquidistans semper a b, ut seruet situm quem habebat ita, quod extremũ lineæ l m sit semper in linea a c, & l punctum quod gerit uicem a, descendat tantum in linea a d, quantum l extremum in linea a c: dicit Philosophus, quod a seu l semper descendet in linea a d, & erit in e a. Supponatur q; latus l m fit f g, & erit l n, f t, ducatur aũt ex r puncto sectionis diametri, & lateris l m linea r q, æquidistans a f, igitẽ rhombus a q r f est similis rhombo toti a b d c, & ꝓportio a f ad f r, ut a c ad c d, sed a c est æqualis c d, igitẽ a f est æqualis f r, sed l descendit in l m, quantũ est a f ex supposito, igitẽ punctũ l semper erit in linea a d. Post deficiunt quædam uerba: ob quæ nemo intellexit sententiam Philosophi, & tamẽ ausi sunt impo nere lectoribus, tanq; intellexissent, tres simul errores admittendo, scilicet Aristotelem ob propriam ignorantiam, ut stultum accusando, qui falsa dicat, & demonstrare nitatur: produnt seipsos cum sua impudentia. Et lectoribus imponere conantur, debet ergo sic

Per 4. sexti Elem.

» legi (b in ipsa b c diametro latum, ubi latus b d moueatur in latere b a, & b æqualiter uersus d in b d, æqualis enim est ipsa b e) Tunc enim constat ut hic dixi, m moueri per b c rectam ut l per a d: Dicit ergo cũ b d moueat in b a, transit unico motu totã b a, & punctum

tũ tamen b, quod mouet duobus motibus, non pertransit nisi b c, quæ potest esse minor b a: nam cõstat quod quãdo m erit in a, o erit in c, & quia m descendit in o, in eodem tempore, ergo o erit in c, & trãsiuit semper per rectam b c: igitur m est minus motũ duobus mo tibus quàm m l unico tantũ. Et quia aliquis dicere potuisset non est mirum, quod m sit minus motum duobus motibus quàm l m latus unico tantum: quia m mouetur motu contrario motui lateris: nam latus m o mouetur in latere b a ascendendo, et punctum m uersus o in ipso m o descendendo. Dicit Philosophus, hoc est mirum, quia cum idem contingat in motu l, cuius latus mouetur per a c, & l per l m recedendo in partem contrariam, nihilominus uelocius motum est l, quàm latus l m, quia a d est longior a c. Ex quo patet, quod questio Philosophi est una tantum, & non duæ. Et est cur motum duobus motibus in rhombo, in uno mouetur uelocius latere tantum moto uno motu, in alio tardius: Et quia aliquis dicere posset, quod d b c possit esse lõgior a c: Dicit Philosophus, uerum est, sed ego possum inuenire talem rhombum, qui etiam habeat a c longiorem, & tunc nihilominus sequit quod dico. Aliud aũt, quod docet ex hac demonstratione, est quod ex duobus motibus rectis diuersis potest fieri unus motus rectus diuersus: igitur idem punctum, puta formica poterit simul, & semel moueri duobus motibus rectis diuersis. Et hoc est, quia primus motus est rectus solum secundum formam, & non secundum materiam: & alter secundus, scilicet mistus est secundum materiam & non secundum formam per rectam.

Ex hoc sequit aliud magis mirũ, et est iuxta nostrũ motum rhombi l o in rhombo a d, fixo centro p in centro k, & moueat quomodo libet l, dico quod l f semper æqualis erit a f, quia em k l & k a sunt æquales, cũ essent una linea ante motum ducta, l a erit angulus k l a, æqualis angulo k a l, sed angulus k a c est æqualis angulo k l m, cum angulus k l m esset idẽ angulo k a b, & angulus k a b est æqlis angulo k a c, igitur angulus k l m est æqualis angulo k a c, igit resi duus f l a est æqualis residuo f a l, quare f a æqualis f l. Si igitur quantum procedit latus m l in a c, tãtum descendat punctum in linea l m punctum perpetuo, erit in linea a c, & per eam mouebitur. Vnde sequitur quod



Per 5. primi Elem.
Per 34. primi Elem.
Per 6. primi Elem.

Quod punctũ l mouebit duob. motib. uno recto in linea, scilicet l m, & altero circulari. s. circa centrũ k, & tñ mouebit uerè motu recto tñ in alia linea, scilicet a c, & hoc est primũ admirabile. Aliud est Cor. 1.

Quod punctũ l mouebit duobus motibus, & per ipsos mouebit ad unguẽ uno motu equali uni eorũ, ita quod alius motus nihil addet Cor. 2.

nec

nec minuet. Patet quia mouebitur, gratia exempli, primo motu ex l in f, & pòst motu circulari, & ucrè erit motum ex a in f, qui motus est æqualis motui priori proprio, & solo ex l in f.

Propositio ducentesimaseptima.

Proportionem agentium naturalium in transmutatione considerare.

Com. Sit latitudo a b ad conuersionem terræ in aurum medium perfectionis a b sit c, & medium a c d b, cuius dimidium sit e b. Et fiat commutatio a c in f g, tempore dimidium f g, g h in g h deberet peruenire ad perfectionem d, quoniam ratio a c ad c d, ut f g ad g h. At uerò dum transiret terra ad perfectionem c tota resistebat, iam adepta perfectione a c non resistit, nisi pro medietate, at proportio cuiuslibet quantitatis ad dimidium alterius producitur ex proportione eadem & dupla, dupla igitur est proportio agentis ad imperfectionem a c ei quæ est ad a b, igitur in dimidio temporis g h acquiret perfectionem c d, & sit g k dimidium g h, erit ergo tempus totum f k, in quo acquiret a d. At ratio hæc constare non potest, nam si diuidatur spatium a b in trientes fient trientes duo, & quarta pars in perfectione a d: sed iam multo citius acquiret quam in f k tempore, quod est dimidium & octaua pars. Sed hoc non cogit, quoniam partes primæ sunt semper contumaciores, & ut disponuntur fiunt magis obedientes, non iuxta proportionem simpliciter, sed ut sunt in materia, & ideò hæc actio est similior proportioni excessus, & est Arithmetica quam capacitatis scilicet Geometricæ.

Com. Ex hoc patet, quod res quæ ad summam maturitatem perueniunt, maximè acquirũt perfectionem in exiguo tempore, ut gemmę, aurum, infans. Ergo oportet maximè iuxta finem cauere, ne detur occasio ulla accelerandi partum.

Propositio ducentesimaoctaua.

Mota res à centro grauitatis per priorem motum in reditu uelocius mouetur, quam si quieuerit.

Com. Sit a b electus pensilis, in quo homo aut patera, in qua aqua uel uinũ, & sit cẽtrum grauitatis d, quod necessariò est in linea loci, cui annexus est lectus a g, & in patera loci medij manus continentis pateram cũ centro quæ sit a g, quibus stantibus ostendendum est primò.





LEMMA PRIMVM.

Omne graue motū à centro grauitatis, restituto ad eundem situm
pondere mobili aut inmobili, continente ultra centrum grauitatis
naturalis uiolenter fertur.

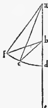
Seu sit pondus per se non fluctuans in pensili lecto, seu humor in Com.
patera, quum pōdus moueatur solum ratione una, scilicet lecti pen-
silis homo uel plumbum, humor autem aqua uel uinum bifariam
& ratione pateræ si mobilis sit in a laxa manu, & etiam per humo-
rem ipsum redeuntem ad locum suū: adeò quod si esset & immobi-
lis patera, humor saltem refflueret propria inundatione ad locum
suum centri grauitatis, licet in patera esset immobilis locus grauita-
tis uelocius & maiore cum impetu, adeò ut transeat uersus e, cū su
erit motus primus ex e in f, et restitutio ex f in e: seu in immobili pon
dere mobilis continenti, ut in lecto pensili: seu in immobili conti-
nente, scilicet postquàm ad locum suum restitutum fuerit per uim
retenta patera à manu iuxta situm priorem in a, mobili autem con-
tento, id est, humore, multo autem magis contento, & continente
mobilibus. Vt si patera & humor ipse simul moueatur, nam & pate
ra transgredietur locum suum, & humor duplici motu superau-
ctus transgredietur motum naturalem. Cum enim a d est remotum Propos. 3 o.
a g, & est in f, mouetur maiore impetu, quam sit pro ratione pon-
deris, ut demonstratum est, igitur transibit ad e, cum ergo redeat
ad g motu naturali, necesse est ut motus uiolentus sit ualidior ea
parte naturalis, qua d resistit, dum est in g, ne dimoueatur à g, si igi-
tur tractum ad c, superauit uim qua manet in g, in eo quod moue-
tur ad f, igitur in reditu mouebitur tantum ultra g uersus e, quan-
tum est acquisitum ex ui transitus ultra g uersus f, quanto ergo ma-
ior est arcus e d, tanto maior est d f, & quanto maior est arcus d f,
tanto maior d h.

Ex quo patet, quod quanto magis remouetur d à g, tantò maio- Cor. 12
re impetu fertur uersus extremum aliud & ultra medium.

LEMMA SECVNDVM.

Omne pondus appensum est graue comparatione medij graui-
tatis, ad hoc ut ab eo remoueatur, quantum est pro ratione anguli
ex quo appensum est.

Sit d appensum in a & in b, & sit angulus c b d, triplus angu- Com.
lo c a d, dico quod tripla est uis quæ transfert d in e ex b, ei quæ
transfert ex a, quoniam enim mixtus est in b & a, igitur a d æqua- Per 16. pri
lia spatia æquales uires exigentur: igitur uirium proportio ut mi Elem.
angulorum, at quanto maior est a d in proportione ab b d tanto
maior est proportio anguli c b d ad angulū c a d, igitur quanto ma-
ior



ior est a d tanto facilius remouet æquali spatio d uersus e. Et licet remoueantur ab ipso d, semper eadem proportio manebit, manente eadem longitudine b d & a d, nam proportio d f ad d c, est uelut f b d ad c b d, & ut d f ad d e, ita f a d ad c a d, quare f b d ad c b d, uelut f a d ad c a d, quare f b d ad f a d, ut c b d ad c a d, quod fuit propositum.

Per ult. sexti Elem. Per 11. quinti Elem. Per 16. eiusdem.

LEMMA TERTIVM.

Grauitatem ponderis appensi aut fluidi in comparatione ad remotionem à centro grauitatis inuenire.

Com. Nam cum d trahetur per planum ut suspensum, & non tractum a d, erit dimidium ponderis appensi, igitur ex lemmate secundo, patebit proportio laboris in remouendo d à loco proprio in quancunque partem & distantiam, & in quouis loco sit appensum.

Per 16. huius.

Coro. 2. Ex hoc sequitur, quod poterit annulus tam altè appendi, ut iuxta proportionem anguli & leuitatem propriam cum filo tenuissimo, & ut fuerit latus, & positus è regione oris, ut ex sermone circumagatur quaqua uersus, & percutiat labra uasis aqua pleni fermè, ut uideatur plane responsa dare.

LEMMA QVARTVM.

Quanto magis remotum fuerit pondus ex eodem centro à recta linea, tanto maiore impetu agetur, ut ultra locum medium feratur non æquali, sed producta proportione.

Com. Sit a b, & ut dictum est, non est ei pondus, nisi quatenus remouetur a recta, & in c summam habeat grauitatem, & d sit medium b c, dico ergo quod multo maiore impetu feretur ex c in b quam ex d, nam cum c sit summa grauitas, erit saltem dupla grauitati d, sed d grauitas est penè infinita, ut demonstratum est in comparatione ad b, ut iuxta situm remotionis à linea b, cum ergo proportio singularum partium c d ad singulas d b medietatæ b c distantes sit maior dupla augendo, erit proportio c d ad d b, uelut proposita h k dupla g f, & h e dupla e f, e k h ad e g f quadrupla, igitur & eo maior quo acquisitus est impetus ex demonstratis, quare proportio motus & impetus ex c in b, est multo maior impetu ex d in b quadrupla proportione.



Lemmate 2.



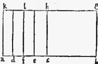
Per 30. huius.

Ex his

Ex his omnibus concluditur propositum in prima figura, & est Co^m. quod si b c inclinetur uersus e, mouebitur a d, certo impetu uersus e. Et quia si prius b c inclinatum fuerit in f, redit a d, dum b c reuertitur ad proprium situm ultra lineam a d g usque ad h per primum lemma. Et cum b c inclinatur ad b f peruenit, quantum b c inclinata ad f, scilicet ad e, igitur ex motibus b c in f & in e tanto plus mouetur d ultra e, quantum est productum d e in d h, ideo multo plus quam si solum motum fuisset d ex recta a g, etiam quod non moueretur b c. Multo plus ergo moto etiam b c, ut diximus.

Propositio ducentesimanona.

Si superficies rectangula in duas partes æquales diuisa intelligatur, quæ ambæ quadratæ sint, itemque in duas inæquales, erit parallelipedum ex latere mediæ partis in totum superficiem maius aggregato parallelipedorum ex partibus inæqualibus, in latera alterius partis mutuo in eo, quod fit ex differentia lateris minoris partis a mediæ latere in differentiam maioris partis superficiei à media superficie bis, & ex differentia amborum laterum inæqualium iunctorum ad ambo latera æqualia iuncta in minorem partem superficiei.



Proponatur a g diuisa in duo quadrata æqualia a h, h b, & latera erunt a c, c b, & in duo inæqualia a d d g, quarum latera sint b c, a f, dico quod parallelipeda a c in c g, & c b in c k, & sunt æqualia parallelipedo ex a c in a g, excedunt parallelipeda ex a f in d g, & b c in d k, in duplo f c in d h, cum eo quod fit ex f e in d k semel. Quia ergo parallelipedum ex a c in a g est æquale parallelipedis a f & f c in a h, h d, h k, quare parallelipedis a f in a h, h d, d k, & f c in d k, & c e in d k, & f e in d k, & f e in d h bis. Ad parallelipedum a f in d g, est æquale parallelipedis a f in a h, h d. Et parallelipedum b e in d k, parallelipedis a f, f e, c e in d k. Detractis similibus relinquetur f c in d l, l c, e h bis, quod est f c in d h bis, cum eo quod fit ex e f in d k simul, quod est propositum. Co^m.

1 a f in a h	f c in a h bis
2 a f in h d	f e in d k
3 a f in d k	
4 f c in d k	
5 c e in d k	

1 a f in a h	4 f c in d k
2 a f in d h	5 c e in d k
3 a f in d k	

SCHOLIVM.

Dico etiam, quòd duæ lineæ b e & a f sunt minores duabus a e, c b simul iunctis, nam quia d b, e b, c b, sunt in eadem proportione, & d b est maior e b, erit maior differentia d b ad e b, quam e b ad c b, igitur maior d e quam e c, quare e c est minor medietate d c, & ideo multo minor medietate a c. Et similiter, quia a c est maior a f, & a c, a f, a d sunt in continua proportione, maior erit c f quam f d, & ideò constat quamuis longum esset, si quis uellet demonstrare perfectè, quod b e & a f iunctæ sunt minores tota a b seu duplo a c.

Per conuersam quasi 8. quinti Elem.

Exemplum, sint h b & h a 25, & a e, c b 5, producta mutua 250, sitqúe g d 49, & erit b e 7, sit autem d k 1, & erit a f 1, quia ergo a f est 1, a e 5, erit f c 4, & quia e b est 7, & b c 5, erit e c 2, quare etiam e f 2, productum ergo ex e b in d k est 7, & ex a f in d g 49, totum aggregatum 56, differentia a 250, est 194, qui fit ex duplo f c, quod est 8 in d h, quæ est 24, & fit 192, & ex f e, quæ est 2, in d k, quæ est 1, & fit: quod additum ad 192 facit 194. Similiter capio 450, cuius dimidium est 225, c g & c k 225, & c a & c b 15 singulæ. Et ponatur d g 441, eritqúe e b 21, & d k 9, & erit a f 3, igitur cum b e sit 21, & b c 15, erit c e 6, a f uerò est 3, igitur f e est 6. Producta mutua æqualia 6750, inæqualia 1521, differentia 5238, quia ergo f c est 12, duplum eius est 24, ductum in d h, quæ est 216, nam d k ex supposito est 9, fiet ergo 5184, cui si addam, quod fit ex f e, quæ est 6, in d k, quæ est 9, sitqúe 54, erit totum 5238, quod erat propositum.

Cor^m. Ex hac demonstratione liquet, quod si linea in duas partes æquales diuidatur, & duas inæquales, quòd parallelipeda æqualium sectionum pariter accepta excedent parallelipeda inæqualium sectionum, simul iuncta in eo quod fit ex tota linea in quadratum differentiæ partium æqualium ab inæqualibus.

Propositio ducentesimadecima.

Si duæ lineæ ad æquales angulos ab eodem puncto peripheriæ circuli reflectantur, necesse est angulos cum dimetiente factos æquales esse. Vnde manifestum est protractam diametrum angulum suppositum per æqualia diuidere.

Co^m. Resiliat radius d b c ad æquales angulos, ut fert natura rerum

dum

dum à plano resilit (licet refragante Plutarcho) ita ut anguli c b e, & d b f sint æquales, dico angulos ibidem d b a, & c b a æquales esse: & quod si trahatur latus a b usque ad g, quod anguli d b g & c b g etiam erunt æquales. Primum patet, quia anguli a b e & a b c & a b f æquales sunt, sunt enim residui ad angulos contactus eiusdem circuli & rectæ, igitur additis æqualibus ex supposito c b e, d b f erunt per communem animi sententiam a b c & a b d æquales. Secundum, cum sint a b c & a b d æquales, & duo anguli a b c, c b g æquales duobus rectis: itemque a b d, d b g duobus rectis æquales: Et omnes recti inuicem æquales ex petitione Euclidis erunt per communem animi sententiam, æquales residui quoque c b g & d b g. Per 16. tertij Elem. Per 13. primi Elem.



Ex hoc patet, eam quæ resilit lineam semper ultra lineam à centro ad punctum, ex quo resilit ductam ferri. Corr. 1.

Constat quia linea ex centro diuidit angulum per æqualia, ergo cadit media inter illa quæ incidit, & quæ resilit. Cor.

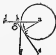
Ex hac etiam patet, quòd constituto angulo in centro a b c, & ducta linea a d à puncto a, sciemus quo resilit in linea b c: ducta enim c d, faciemus angulum c d e æqualem a b c, & erit angulus a d g æqualis angulo e d h, igitur d e resilit ex a b a d linea. Corr. 2. Per 23. primi Elem.



Propositio ducentesimaundecima.

Si duæ lineæ ex duobus punctis peripheriam contingentes in eandem partem protrahantur, semper magis distabunt inuicem ea ex parte, & nunquam concurrent.

Duæ semidiametri a b, a c ex terminis earum duæ contingentes b f, c e, dico quod quanto magis protrahentur in partem e f, tantò magis distabunt, nunquàm concurrent: Nam angulus a c g rectus est: angulus uerò c a d, si sit rectus e g, nunquam concurret cum a d, æquidistabit enim ei: si autem sit maior recto aut ex altera parte erit minor, & ita concurret, ergo in alteram partem ductæ nunquam concurrent, sed perpetuò magis distabunt. Si ergo minor recto sit angulus c a b, igitur e c ex eadem parte concurret cum a d: concurrat ergo in g: & quia e g cadit extra circulum, igitur diuidet b f, quæ tangit circulum. Sit ergo ut diuidat Com. Per 29. primi Elem. Per 13. primi Elem. Per 6. & 4. sexti Elem. Per 5. petit. Euclid. Per 6. tertij Elem.



uidat in h, igitur h e & h f cùm angulum constituant, quanto magis protrahentur eo magis distabunt, nec unquam concurrent.

Propositio ducentesimaduodecima.

Si ab eodem puncto ad circuli peripheriam, lineæ quotuis ducantur, tres inuenire lineas, quæ nõ in alium punctum reflectentur.

Co^ru. Quouis constituto puncto ueluti a extra circulum b c d, dico posse trahi tres lineas ad ipsam circuli peripheriam, uelut a b, a c, a d, quæ ad alium punctum non reflectentur. Ducantur ergo a e ad centrum, & a b & a d ad contingentes illius peripheriam, quas constat non reflecti sed progredi, a c autem reflectitur in seipsam per demonstrata superius, igitur constat propositum.

Per 17. tertij Elem. Per 61. tertij Elem. Prop. 210.

Corm. 1. Ex hoc patet, quod omnia puncta sub linea contingente possunt reflecti ad ipsum per arcum interceptum à contingente, & ea quæ ad centrum.

Com. Id est, quod omnia puncta infra lineam a b f ductam quantumlibet possunt reflecti per arcum b c ad punctum a æqualibus angulis. Quoniam ex a per c b reflectuntur ad quælibet puncta infra a b f, eo quòd termini sunt punctum a, per ea quæ sunt hic demonstrata, & a b f, ipsa ergo si extrema in extremis, media in medijs continentur per regulam illam Dialecticam: igitur omnia puncta sub a b f etiam in infinitum producta continentur in reflexione à puncto a per arcum b c.

Corm. 2. Et rursus, si à circulo ad circulum extremæ ducantur, nec illæ reflectentur, sed transibunt: mediæ autem omnes reflecti poterunt à quouis puncto.

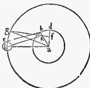
Quia si a b sit Sol, c d Luna, Sole minor extremum in utroque luminari a c, b d quæ contingant utrunque circulum, quod facile fiat, ductis a c & b d ex punctis non oppositis, æquidistarent enim, sed iuxta quantitatem dimetientis minoris. Erit ergo ut h e non reflectantur, aliæ omnes mediæ reflectentur per demonstrata à quolibet puncto, ergo idem de totis circulis & punctis.

SCHOLIVM.

Propositis duobus circulis lineam ambos cõtingentem ducere.

Propositorum circulorum a & b centra iungam recta a b, super quam ut semidiametrum describo circulum b c, & ex puncto a ad perpendiculum a d, ex quo abscindo æqualem semidiametro b c lineam d f, ex f duco a d perpendiculum f g, ex g in a duco a g, & æqualem angulo g a d, b a h abscindo h k æqualē d f seu b e, duco aūt b e, ut sit æquidistās h k, duco h e, quā dico contangere utrunq; circulū b k: produco b k, & quia duæ lineæ b a & a k sunt æquales duobus lineis a g & a f, duæ enim prodeunt ab eodem centro, reliquæ sunt residua æqualium d f & h k, & angulus b a k æqualis g a f, ex suppofito erit angulus g f a æqualis angulo b k a, g f a autem rectus fuit, quia g f a d perpendiculum erecta fuit, itaque b k a rectus est, & ideo b k h rectus, quare cū b e & k h sint æquales, & æquidistantes, erit angulus e oppositus b h k rectus, igitur duo anguli e b k & e h k duobus rectis æquales, quare cum sint æquales inuicem, quia oppositi in parallelogrammo uterque eorum rectus erit. Recti ergo sunt anguli e & h, & lineæ b e & a h ex centris circulorum, & angulos illos constituit lineæ e h, igitur e h contangit utrunque circulum.

Com. Per 11. primi Element. Per 3. primi Elem. Per 23. primi Elem. Per 31. primi Elem. Per 4. primi Elem. Per 13. primi Elem. Per 33. primi Elem. Per 32. primi Elem. Per 16. tertij Elem.

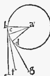


Propositio ducentesimatertiadecima.

Proposito circulo atq; in eius peripheria puncto signato lineas contingentes ultra citraq;, & etiam ab ipsomet deducere.

Sit circulus b c d, & in eius peripheria c punctum descriptum, & sumatur b d portio minor quadrante, in qua punctum c, & ducantur a b, a c, & ducantur b e, c f, d g, ad perpendiculum, & constat propositum, & quod nunquam ex eadem parte conuenient ex eadem parte ex demonstratis supra.

Com. Per 11. primi Elem. Per 221.



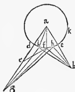
Propositio ducentesimaquartadecima.

Si extra circulum duo puncta æqualiter à centro distantia signentur, erit punctum reflexionis æqualis, in medio arcus intercepti inter lineas, quæ à centro ducuntur ad illa puncta. Si uerò unum centro proximius fuerit altero punctum æqualitatis in peripheria, tanto longius uersus breuiorem lineam, quanto punctum aliud à centro magis distiterit.

Co. Sint puncta b c, æqualiter distantia à centro a circuli d e, & reflectantur c f, b f, dico f esse in medio arcus d e: producta enim f a, erunt anguli d a f & e a f æquales: supponitur enim primū f esse in medio: igitur cum a b & a c sint æquales, & a f communis, erit a f c æqualis a f b, igitur reflectentur æqualiter: ergo si æqualiter reflectentur, ex f reflectentur, ut ex secunda parte: quare ex medio.

Per 2 1. ter. tij Elem.

Per 4. primi Elem.



Per 2 1 o. Propos. Sumatur rursus punctum g, remotius ab a quam b, dico quòd reflexio erit in arcu f e. Nam non in e, quoniam sic g e d esset æqualis b e k, cui rursus est æqualis b e d, ergo g e d æqualis b e d, pars toti. Sed neque ultra e, nam multo magis pars æqualis esset toti aut maior etiam. Sed neque ex f, nam eadem ratione pars esset maior toto. Neque in toto arcu f d: nam sit punctum l, & ducantur a l, g f, igitur g l a maior g f a, g f a autem maior e f a, igitur g l a maior c f a, æqualis ex supposito b f a, b f a rursus maior b l a: multo igitur maior g l a quam b l a, non ergo reflexio æqualis esse potest. Cum ergo reflexio fiat, & non ex arcu d f, nec puncto f, nec e, nec ultra e, nec extra d, erit necessarium, ut fiat ex puncto in arcu e f.

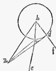
Per 2 1. primi Elem.

Per 1 Cor. præcedentis.

Cor. 1. Ex hoc patet, quod linea a puncto ducta, quo longius fertur, eo etiam longius resilit.

Co. Cum enim a c b maior sit a d b, & angulus e c b æqualis a c b & f d b æqualis a d b, erunt duo anguli a c b & e c b, maiores a d b & f d b, quare reliquus f d a maior a c e, igitur d f resilit latius quam c e.

Per 2 1. tertij Elem.



Cor. 2. Ex hoc patet, quod tales lineæ quæ resiliunt nunquam concurrent.

Co. Scilicet c e & d f nam constat ducta c d, angulos e c d f & d e, maiores esse duobus rectis, ergo non concurrent in partem e f.

Per conuersionem 5 petit. Euclid.

Propositio ducentesimaquintadecima.

Punctum reflexionis punctorum inæqualiter distantium à centro, æqualiter distat à lineis ductis à centro ad puncta, æqualiter distantia alterutrinque.

Co. Sint g h a & b h a æquales, & abscindatur h f æqualis h b, & producatur h b usque a d c, ut sit h c æqualis h g, & producantur f a & c a, quæ

c a, quæ secent peripheriam in d & e, dico quod punctum h est medium inter e & l, item inter d & k. Nam cum h f & h b sint æquales ex supposito, & anguli b h a & g h a æquales, & linea h a communis, erit angulus b a h æqualis f a h, igitur arcus h l æqualis arcui h e. Similiter angulus g h a est æqualis e h a & c h æqualis h g ex supposito, & a h communis, igitur ut suprà angulus c a h æqualis g a h, igitur per eandem arcus h k æqualis arcui h d, quare h punctum in medio d & k, & in medio etiam e & l, quod est probandum.

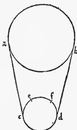


Per 2 16.
Per 4. primi Elem.
Per 26. tertij Elem.

Propositio ducentesimasextadecima.

Si fuerint circuli duo inæquales, & extra utrunque punctum ad illud ex minore reflexè per magnam partem minoris à maiore peruenire poterunt.

Sint duo circuli, maior a b, minor c d, & punctũ g, extra utrunque, dico quod a d g ex c d poterũt reflexè produci a b in c d, quia enim ex a b quibusuis punctis possunt duci lineæ reflexè ex c d, & ideo cum puncta in a b uarient reflexionem ex c d, aliter pars esset æqualis toti, patet intentum.



Cor^m. 1.

Ex hoc patet, quod oculus in quauis parte terræ constitutus, in qua Lunam uidere posit, poterit eam uidere per radios reflexos à Sole.

Cor^m. 2.

Ex hoc rursus patet, quod eodẽ modo oculus poterit uidere superficiei Lunę illuminatę partẽ per radios reflexos à Solis corpore.

Hoc patet, quoniam si circuli Solis singuli, qui illuminant Lunã ostendunt per primum corrolarium huius partẽ circuli Lunæ per radios Solis reflexos ab ipsa Luna, putà secundum portionem circuli e f, igitur cum liceat in Sole accipere magnam partem superficiei eius, quæ Lunam illuminat, in qua continentur infinitæ portiones circulorum, & hæ singulæ mittunt radios reflexos ex Luna ad punctum g, igitur g uidebit portionem superficiei Lunæ secundum longitudinem e f per radios Solares à Luna reflexos: quod est propositum. Co^m.

Propositio ducentesimadecimaseptima.

Oculus uidet partem superficiei Lunæ illuminatam à Sole per radios reflexos à Solis corpore: nec tamen potest uidere imaginem ipsius in Luna tanquam in speculo.

Com. In præceden. Quoniam per illos, ut demõstratum est, potest uidere, & illi sunt robustiores, ergo per illos uidet, omnis enim operatio tribuitur digniori causæ & potentiori. Item, quoniam uidemus Lunam in nocte immittere radios per fenestram uelut Sol: irradiare autem non est nisi habentis tantum lumen ex se, ut hoc possit facere, aut ut spargantur, aut ut reflectantur: ex se tantum non habet ut adparet hora deliquij: neque spargit, sic enim non impediret Solem hora deliquij, Solis ergo reflectis. Ergo uidemus per radios reflexos. Non tamē per eam uidemus Solem, ut in speculo obiecto, quoniam Luna primū lucet proprio lumine, & rubro sicut pruna, quod autem debet fungi uice speculi, oportet ut careat colore, & sit uelut aqua, & ut sit purum. Deinde, quia Sol est maior Luna, ideò uidetur ut paries in speculo, uidetur enim non res reflexa, sed quod ipsum speculum sit paries, & ita Sol uidetur, ut totum quoddam, & non potest ob id cognosci. Et etiam magnitudo luminis per quam oculus non potest distinguere Lunam ab imagine Solis: nam ea his quæ per speculum uidentur, oportet duo cognoscere, speculum, & rem quæ uidetur, sed magnitudo luminis prohibet speculum uideri, ergo non poterit uideri aliud tanquam in speculo, sed solum speculum cum lumine tanquam res una. Et ita de Luna. Accedit magnitudo distantiæ: nam in superflua distantia non cognoscitur superficies speculi, sed solum rei obiectæ imago, & illa habetur pro superficie speculi, ergo oculus non distinguit inter speculum, & rem uisam, ideò non uidet tanquam è speculo. Ex quo sequitur, quod Luna iudicabitur longiùs abesse quàm absit, quia quod uidemus ex ea est Solis imago, quæ longius multo abest à nobis ipsa Lunæ superficie. Cum ergo sint quatuor causæ, quarum unaquæque impedire posset, quominus Sol non uideatur in Luna tanquàm in speculo, quanto magis cùm omnes adsint in Luna, & simul concurrant.

Propositio ducentesimadecimaoctaua.

Rationem maculæ Lunæ indagare.

Com. Supponamus primum quæ sunt manifesta, inde addamus quæ sunt uerisimilia ualde, post uerisimiliora ex dubijs, ubi ratio utrinque pugnare uidetur, demum dicemus de quæsito. Manifestum est igitur, quod Luna distat à nobis circiter $\overline{CLX}$ MP. dimetiens igitur orbis Lunæ est circiter CCC$\overline{X}$.$\overline{X}$ MP. igitur ambitus $\overline{M}$M P. igitur in hora circuit

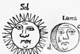
circuit circiter XLII MP. Ergo in ictu insensili penè, id est, tempore ictus pulsus infantis laborantibus acutissima febre II MP. quoniam quinque tales ictus continentur penè in ictu uno uiri temperatæ naturæ, & IIII ictus pulsus fermè uiri temperati complent spatium horæ. Igitur Luna mouetur rapidissimo motu & simili motui fulguris. Ex quo patet quod est corpus expers grauitatis & perfectum, quare nec mistum, nec uitiatum.

Est etiam rotunda, tametsi enim ob distantiam maximam posset uideri rotunda, etiam quod non esset, uerisimile tamen est, cum umbram talem efficiat in deliquio Solis, & cum exit è tenebris terræ, tum quia perfecta est quod sit rotũda, aut prope rotunditatem, sed quod est perfectum & diuinum (quia seruat æqualitatem, hoc enim demonstratum est, quod æquale solum reperitur in diuinis quod ad motum attinet) exactè tale est, igitur Luna est exactè rotunda in circuitu secundum superficiem orbis. Ergo etiam undequaq; & secundum profunditatem: nam in commutatione nõ posset latere inæqualitas. Et etiam non est uerisimile ullo modo, quod corpus perfectum & diuinum sit informe. Esset autem necessariò eiusmodi, si esset exactè rotunda secundum longitudinem & latitudinem, & secundum profunditatem alterius figuræ. Verisimilius est ergo, Lunam esse ut ignem quẽdam densum per se lucidum, sed inæqualiter luminosum, non solum ob substantiæ densitatem, sed copiam luminis & puritatem, quæ impuritas non illi accidit, quia mista, sed quoniam est inæqualium partium rararum ac densarum & mediarum. Neq; solum collustratur à lumine ex his quæ diximus, tum etiam quia collustrata non lucent procul, ut neque montes, qui plurimum absunt, quamuis non tale procul ut Lunã, imò nec nix quę illis insidet, sed nix est multo cãdidior per se quàm Luna, quam constat lumine Solis destitutam esse rubrã, ergo Luna relucet radijs Solaribus elisis uelut à speculo. Et si quis in orbe Lunæ esset media die serena, non uideret terram luminosam, quæ multo maior est Luna, & paulo plus à Sole distat, & quandoq; illi propior est quàm Luna. Macula autem Lunæ est qualis depingitur cum ore, oculis & naso, sed quod magis spectatur est os ipsum: adeò ut Plutarchus non de macula Lunæ, sed de ore Lunæ inscripserit. Non uerti autem Lunam, ex hoc probat Philosophus secundo de Cœlo. Igit̃ ab Oriente in Occidentẽ uerti sub, & suprà necesse est. Scilicet ut oculi infrà os supra appareat. Videtur autem magis in plenilunio ob differentiã luminis, & tota quoniam pars uersus nos etiam tota illustratur. Et ex illo loco apparet, quod Auerroes nesciuit Geometriam,



Tex. 49.

metriam, sicut semper fuit mos Philosophorum cōtentiosorum, ut nil sciant, sed solum garrire. audierat hoc ab aliquo malo Geometra, & reposuit in suos libros: nam nos, ut suprà uidisti, demonstrauimus oppositum. Quod uerò sit macula illa ex umbra terræ, uerum non est, quoniam una esset & non diuisa, & occuparet totam illius faciem: nec est uerum quod mutaret situm, quia superficies terræ est nonupla superficiei Lunæ. Sicut terræ superficies est minor trigesima parte superficiei Solis. Nec spargitur lumen Solis in Luna, nam sic esset ambitus ut uia lactea: cum autem Luna delinquit in Oriente, est glauca & purpurea, cum in cœli medio rubra, cum in Occidente nigra uidetur, nam ab utraque parte tenebris operitur: ex Oriente ab umbra terræ, ab Occidente ab obscuritate loci. In medijs locis medijs coloribus, quos Astrologi terraticis tribuunt: hoc autem quandiu tota deliuerit, quod tempus horam uix implere potest. Ergo partes peruiæ non remittunt lumen, ideò obscuræ apparent, quod in uitreis speculis à quorum partibus plumbum excidit: nam nigræ illæ apparent, reliquæ splendidæ, ob id sydera aliquando per illam relucent, & aliquando non. Et Solaris eclypsis tempore, non lux tota Solis perit: atque ideo ut uidemus, &
2. Apoteles Ptolem. uariant colores eo tempore, non tamē collustrat splendidè Sol ob crassitiem Lunaris corporis hæc inferiora, tum etiam ob diuersitatem partium, & ad situm. Nam si Sol sit ad situm a b, transibunt mul ti radij, si c d paucissimi aut nulli, sed ut ubi tenuior est Luna in ambitu, & Solis radij densiores transeunt, & sydera pellucent contrarijs causis minus, ut iuxta medium nequaquàm. At Lunæ maculam radij efficiunt, etiam si tota subtus opaca esset, cum peruia uel tantillum fuerit in superficie, ut



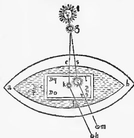
uenis opus non sit. Et iuxta hoc macula illa, ut liquet, ad perfectionem corporis Lunæ pertinet magis quam pars splendida, quamuis prima cogitatione oppositum uideatur. Est enim duplex perfectionis genus in cœlestibus corporibus, & ob densitatem cum remittit, & ob perspicuitatem cum à Sole, ut uniuersali quodam principio illuminatur.

Propositio ducentesimadecimanona.

Ratio nem eorum quæ apparent circa Solem speculo in aqua posito declarare.

Com. Sit peluis a b aqua plena: speculum in ea c d e f quadratum, aut perfectè, aut oblongum submersum in ea: Sol primum solus in g oculus

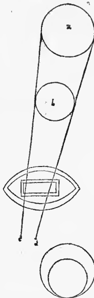
oculus ex aduerso in h, ita ut ad æquales angulos posit uidere Solē in k, dico q̃d depresso oculo in m, uidebit alium Solem maiorem uersus marginem aduersum in l, & longè splendidiorem: quia enim radij reflectūtur ex k, utro busti & à medio den fiore ad rarius, qui non inflectent, erunt pauci, & ideo Sol in k minor apparebit, et languidior: maior au



tem pars deflectetur à perpēdiculari ad m, igitur Sol apparebit maior & ualidior longè splendentibus radijs, adeò ut uix ferri posit. Sed quoniam angulus ex supposito m l f maior est h k e, igitur cum oculus iudicet se uidere a d æquales angulos, uidebitur g depressior & propior labro in t, sicut n m est infra h, ita t infra g, quare etiã ut angulus m l f sit æqualis angulo t l f, necesse est ut l sit ultra k: aliter t uideretur quasi tangere aquam. In hora autem deliquij Solis, uelut hodie v. Idus Aprilis hora sexta diei, cū diligentissimi statuerint medium eclipsis in quinta, & supposita fuerit obscuratio à Ioanne Stadio partium nouem cum besse, & tempus horæ unius & m:26, fuit tamen maior & longior: quoniam luminaria fuerint propiora una parte caudæ Draconis, quam ipse posuerit in tabulis, & hoc quia supponit æquinoctium tardius diebus duobus quã apud Alphonsum: & forsan sufficiebat una dies, scilicet ut esset die decima Martij horis decemocto à meridie: nam tunc omnia responderent obseruationi: in qua apparuerunt quatuor Lunæ: & quidem ab initio fuerunt duæ orientaliores e regione, scilicet o p, & una occidentalior n, & tantum distabat n a k quantum o: Et clarum erat quod p erat, sicut secunda iris parua & non candida, sed rubra purpureo mista, quoniam ex reflexu o oriebatur: apparebat autem a latere illo, quoniam Luna dextram partem obtegebat, ideo illa erat minus luminosa, & uerus Sol erat in k, modo Lunæ, modo Solis imaginem referens ubi transisset eclipsis medium, non amplius tres illæ Lunæ apparuerunt à dextra & à sinistra, sed una ultra nos

in q

in q, & duæ uersus nos in r & n & quæ erat in r, erat similiter parua & purpurea rubraq́ue, & mutato speculo uariebatur situs q & r u, id est, ut modo essent quasi in medio laterum e & f, quandoque transuersæ. Et hoc contigit ob mutationē loci k propter speculi uariationē.



Causa est, quoniam Luna cū permeet Solem non è regione rectæ lineæ oppositæ nostro uisui, & solum momēto, & in longis temporū interuallis possit obtegere illum. Sit ergo ut Sol obtegatur à Luna medijs partibus, & sint radij extremi in speculo: a c & a d, igitur erunt tanquam duo Soles, sed uterque illorum geminatur, ideò fiunt tres: medius enim ob Lunæ perspicuitatem integer, apparet, ideò modò sub forma Solis, modò Lunæ laterones ambo sub forma Lunæ: ideò erūt tres, quib. addita Luna p, quæ est reflexa a secunda, fient quatuor. At dices cur non fit reflexus secundum directum oculi, ut Lunæ appareant ultra citraque Solem? Dico quod Luna diuidente orbem reflexus fit ad latera, quia radij transuersim feruntur cum autem non diuiditur fit prorsum & retrorsum. Sed cur dices Lunari forma? quoniam partes Solis quæ uigent, eiusmodi forma apparent, Iconem uides à latere.

Propositio ducentesimauigesima.

Causam cur Sol æstiuis diebus exoriens umbram ad meridiem, cum in meridie ad boream mittat, explorare.

Com. Dico quod ubicunque terrarum in nostro hemispherio, Sol ubi fuerit in Oriente seu Occidente uidebitur, cum sub circulo æquinoctij fuerit è regione, nobis etiā si homo sub arctico circulo habitet, & ita

& ita respicienti ad polum umbra erit à dextra in sinistram, dum oritur & à sinistra in dextram dum occidit. Et quod dum erit in meridie umbra uerget ad Septentrionem. Tertiò dico, quòd in his qui habitant uersus Septentrionem à tropico cancri umbra in Meridie, quocunque tempore anni borealis erit. Quartò, quòd iisdem toto dimidio anni ab æquinoctio uerno ad autumnale, umbræ oriente & occidente Sole sunt meridianæ transuersæ: & muri respicientes boream illuminantur. Sit finitor a b c d in regione boreali, cuius uertex e & f polus, eleuatio poli supra finitorem a f, æquinoctij circulus b q d, cui parallelus borealior Solis uia per cancri initium, g h l m n, circulus magnus per uerticem, & intersectiones æquinoctij, & finitoris b h e m d, Meridiei semicirculus superior a f e l q c. Cum ergo uertex regionis sit in e, & circulus magnus b h d transiens per uerticem, transeat per centrum terræ ex diffinitione circuli magni, & linea à uertice grauium habitantium sub uertice e, tendat ad centrum terræ ex demonstratis ab Aristotele, & suppositis ab Astrologis, quòd grauia omnia tendunt ad centrum terræ, erit quodlibet graue seu murus seu homo, seu per ultimam petitionē, seu per demonstrata in undecimo ab Euclide murus, & homo quiuis incola regionis in superficie circuli uerticalis b e d. Igitur dum Sol est in b uel d, umbræ erūt à dextro in sinistrum, uel contrario modo, & ita Sol uidebitur esse è regione nobis: & murus faciet umbram orientalē uel occidentalem. Et hoc est primum. Et quoniam cum Sol erit in Meridie, tum erit in q, igitur erit umbra ad Septentrionem, cum e sit loco gnomonis & murus. Et hoc est secundum. Tertium etiam patet, quia Sol nunquam transibit punctū l in Meridie uersus boream, sed regio supponitur borealior l, igitur tempore meridiei umbra semper hic borealis erit. Et quoniam b h e m d secat parallelos, qui sunt in Septentrione ut puta tropicum in h & m, igitur oriente Sole, & occidente rursus per totum arcum g h & m n, uidebitur borealior quàm in b uel d parte arcus magni intercepti inter arcum magnum transeuntem per uerticem & locum Solis, ubi secat finitorem & puncta b, & d: & ita erunt umbræ Meridionales toto hoc tempore, & hoc est quartum.

Propos. 8

Y Ex quo

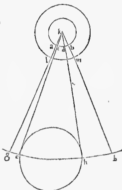
Cor^m.1. Ex quo sequitur, quod in hoc toto tempore ueris & æstatis, cùm Sol in Meridie uideatur esse post tergum, & in Meridie, & dum oritur à parte Septentrionis. Ergo ab ortu Solis ad Meridiem uidebitur ferri motu diurno, linea obliqua à Septētrione in Meridiem: & à Meridie ad Occasum, alia obliqua linea à Meridie in Septentrionem: ut in figura, ut si Sol sit in a in Oriente, b in Meridie, c in Occidente, & uertex nobis in e.



Cor^m.2. Sequitur etiam, quòd si tempore æstatis possemus in media nocte uidere Solem, in cœli medio uideretur, tantundem uersus boream declinare, quantum in Meridie ad Meridiē. Et hoc quia circulus æquinoctij b q d, tanto borealior est in parte inferiore circulo per uerticem, quanto in superiori est australior: quoniam circuli magni se secant per æqualia. Et si hoc est uerum de Sole sub æquinoctij circulo, quāto magis erit uerum de Sole sub tropico æstiuo?

Cor^m.3. Ex præcedenti patet, q̄d Sol in media nocte borealior uideretur sub æquinoctij circulo tanto, quāto uidetur australior seipso, dum est sub tropico cancri, quia circuli se secant ad angulos oppositos æquales: igitur si uerticis circulus maiorem facit angulum superiorem cum æquinoctij quam tropici borealis circulo, igitur & inferiorem: homo autem & uisus iudicat australe & boreale iuxta inclinationem circuli ducti per locū Solis ad circulum ductum per locum uerticis.

Per similem 15. Propos. primi Elem.



Propositio CCXXI.

Magnitudo Lunæ & cæterorum astrorū dignoscitur ex proportione aliorum ad eam iuxta distantiam: ipsius uerò iuxta rationem pupillæ ad Lunam distantiæ ratione.

Co^m. Sit pupilla a b, quæ in circulo l m, posita in eodem centro, comprehendat portionem no tam l m, ideo clauso oculo altero eandem portionem uidebit totius cœli, ut liquet ex demon

stratis

ſtratis in Elementis Euclidis, igitur nota l m nota erit pupillæ, & ideo g h quanta ſit portio cœli, quia k eſt etiam quaſi centrum cœli Lunæ, ſit ergo Luna c d, erit tanta portio g h notæ, quanta e f pars pupillæ, per quam uidetur ipſius a b: e fautem ſimiliter eſt nota in n o, igitur & c d in comparatione ad totum circulum. Quia uerò g h eſt nota, & in Sole conſpicitur arcus notus æqualis, ergò erit nota diuerſitas aſpectu ob diſtantiam noſtram à terræ centro, quare altitudo Lunæ nota, & eius magnitudo, eius enim ad ſemidiametrum oculi, ut c d ad e f. Hoc autem eſt craſſa Minerua additum, ut quis intelligat difficiliora eſſe quæ craſſa uidentur, quàm quæ elaborata. huiuſmodi autem diuina, de quibus mox dicendum erit.

SECVNDA PARS DESVPER
Principia.

DIFFINITIO PRIMA.

Proportio imperfecta ſeu poteſtate eſt duarum quantitatũ, quæ ſic ſe habent, ut nullæ duæ aliæ in eodem genere inueniri queant.

DIFFINITIO SECVNDA.

Proportio media eſt comparatio rei non habentis quantitatem, quæ tamen mutari poſſit ad rem, quæ quantitatem habeat.

DIFFINITIO TERTIA.

Proportio ſublimis ſeu ordo dicitur duarum ſubſtantiarum, quę quantitatem non habeant, comparatio.

PETITIO PRIMA.

Infinitum quod imaginem habet quãtitatis, quantitatem autem non habet, neq; eſt quantitas.

PETITIO SECVNDA.

Repugnans eſt ſuper quod nulla eſt potentia.

PETITIO TERTIA.

Non poſſe ſuper ea quæ repugnãt, nullam declarat imperfectionem, neq; infinitum non eſſe negat.

PETITIO QVARTA.

Infinitum infinito maius eſſe non poteſt.

Propoſitio ducenteſimauigeſimaſecunda.

Quantitates quæ æquales eſſe nõ poſſunt in eodem genere, maius tamen & minus recipiunt, ſunt in proportione poteſtatis.

Sint propoſiti duo anguli, gratia exempli, a rectilineus, b uerò in circumferẽtia circuli, qui poteſt eſſe maior, & minor rectilineo propoſito, & nunquàm poteſt eſſe æqualis, ut declaratum eſt ſuprà, dico proportionem b ad a eſſe poteſtate, nam ut uiſum eſt, poteſt eſſe maior & minor, & eſt maius & minus uerè, & ideò ſunt in eodem genere, & uterque eſt continua quantitas, igitur in tranſitu neceſſe eſt, ut ſint æquales aliquando ſed non actu, hoc enim repugnat, igitur poteſtate. Con

Y 2 Propoſitio

Propositio ducentesimauigesimatertia.

Quantitates quæ actu æquales esse non possunt, in nulla proportione actu esse possunt.

Com. Sint duæ quantitates quæ æquales esse non possint, ut in priore exemplo a & b, dico quod non possunt esse in aliqua proportione in actu, aliter sint in proportione c, & ducatur c in b, fiat d, erunt ergo d & a æquales, quod est contra suppositum, nam supponitur quod nulla quantitas ex genere b sit æqualis a, sed d est ex genere b & æquale a, & ideo suppositum non manet, igitur a & b non sunt in aliqua proportione in actu.

Per 9. quinti Elem.

Propositio ducentesimauigesimaquarta.

Neque temporis totius ut imaginamur ipsum esse infinitum, neque æui uitarum proportio ulla est ad tempus quod potestate est, ut potè diem uel mensem.

Com. Tempus ipsum ut infinitũ est, aut in actu est, aut refert quippiam in actu, pars autem temporis solùm est potestate, quia nullum tempus in actu est, neque annus, neque mensis, neque dies, neque hora aut momentum, sed si totum tempus non esset actu, nihil esset actu, neque totum neque partes. Igitur totũ tempus, uel aliquid loco eius est actu, partes autem potestate, sed ut uisum proportio infiniti nulla est, & ad rem quæ actu non est, igitur tempus nullam habet proportionem ad annos, neque menses uel dies. Quare qui dicunt, quod mille anni sunt unus dies, in philosophia errant, secus apud Apostolum, ubi de diuinitate agitur. Ergo anni sunt longũ tempus, & dies breue, quia dicuntur in comparatione inter se, & non secundum proportionem ad infinitum. Quia sit infinitum a, & duæ quantitates b maior, & c minor, uel ergo proportio a ad b c, est una uel diuersa, si una, ergo b, c erunt æquales, si maior est ad c quam ad b, ergo infinitum est maius infinito, ergo non est infinitum, quod est contra petita.

Per 9. quinti Elem. 4. Petit.

Propositio ducentesimauigesimaquinta.

Proportio media non est ex ratione agentis sed patientis.

Com. Proponatur a quantitas, quæ debeat mutari ab uirtute quæ non sit in materia, & palam est quod non poterit permutari in instanti, quia simul esset, & non esset ergo repugnaret, neque etiam potest non esse, ut demonstratum est in Hyperchen, quia repugnant necessariò & essentiæ Dei, neque moueatur à certa proportione, quia b caret omni quantitate, ergo nihil ostendit uim ipsius b esse finitam, quod ergo moueatur tardè celeriter

b

a

Per 3. Petit.

leriter paruum magnum, istud contingit totum ex conditionibus a,id est, materiæ & quantitatis: uelut, gratia exempli, si a esset in uasculo palmi, non posset implere iugerum, & hoc nō ostendit ullam imperfectionem in b. Et sicut homines omnes sunt in carcere huius mundi, & tamen uidentur esse sibi liberi, & appellant solū illos esse in carcere qui sunt in ergastulo, ita omnis materia, & omnis quantitas habet conditiones, per quas (ut ita dicā) constringitur, & repugnat eas mutari, & ideo uitā agunt sine ulla proportione. Quod uero dictum est, supra dictum fuit, per exemplum dictum est, nō quia ita sit, finge ergo quod in aliquo pariete, non sit albitudo, nisi unius gradus, illa non operabitur nisi per unum gradū, etiam si calx esset infinitè alba, & similiter de luce Solis, ergo omnes mentes mouent sine proportione, & non possunt dici finitæ uel infinitæ, quia ipsæ sunt expertes omnis quantitatis, imò omnis relationis ad quantitatem, & hoc est quod latuit multos, & maximè propter dictum Philosophi, est ergo omnis operatio iuxta id quod est in materia, & non quod una mens maiores habeat uires, alia cum non sit in eis, neq; maius neq; minus.

Propositio ducentesimauigesimasexta.

Proportio sublimis non consistit in magnitudine, sed ordine iuxta quem differentia est eius quod est ante & post.

Non enim potest esse comparatio iuxta magnitudines motas, co^m. quoniam uel sunt corpora cœlestia, uel elementaria, elemētaria esse non possunt, quia illa cum sint corruptioni obnoxia, id est, transmutationi, secundum qualitatem nō possunt esse subiecta incorporearum substantiarum, neq; à primis substantijs moueri, neq; etiam excipere primò lumen suum, sed mouentur per uim influxam à cœlestibus corporibus, neq; etiam per motum corporum cœlestiū, nam illa non mouentur secundum proportionem mentis ad corpus, sed iuxta rationem finis, à qua circumscribuntur, & ideo quod Saturnus moueanir uelociore motu, quàm Iuppiter ab Oriente in Occidentem, hoc non est, quia uitæ quæ mouet Saturnum sit robustior uita quę mouet Iouem, cum sint una & eadem: uel si dicas quod sint diuersæ uita Saturni, non tamen est ualidior in comparatione ad suum cœlum, uita Iouis non moueret celerius Saturnum ab Occidente in Orientem, quàm uita Iouis Iouem, quod est falsum, sed talis motus uelocitas est ratione finis, quia oportet ut pariter moueatur eo moni, & quia cœlum Saturni est maius, ideo celerius mouetur quam Iouis, & hoc ratione corporis mobilis, & nō ratione proportionis ad corpus. Dico etiam, quod non habent potestatem aliam, per quam subeant proportionem, nam quæritur cuius com-

paratione illa proportio oriatur, nam non ad corpora, quia neque ad cœlestia, neq; mortalia, ut dictum est, nisi fingamus alia corpora, quod est absurdum, neq; etiam ratione incorporeorum, nam non possunt destruere se inuicem, quia inferior non potest tollere superiorem, neq; multo minus potest uelle. Hoc est enim nefas cogitare, neque superior inferiorem, quam producit quam amat: & ideo dico, quod sunt in proportione sublimium, id est, ordine perfectionis, qui consistit in propinquitate ad primam causam. exemplum, Sol est longe perfectior sua luce, quæ est ei propria, quia Sol est substantia, & lux est proprium, & lux Solis est multo perfectior lumine, cum sit (ut dixi) lux proprium & in Sole, tanquam in subiecto, lumen autem extra & accidens. Nec tamen dicendum est, quod Sol sit potentior luce, aut lux lumine, idem dico de anima & facultatibus eius, & functionibus, inter quas nulla cadit proportio perfectionis, tamen differentia conspicua est, & ideo poterit impediri functio, & non facultas, et facultas tolli remanente anima. Forsan dices, quod istæ non sunt substantiæ, & ideo oporteret, ut omnia incorporea Deo solo excepto essent accidentia, dico quod in incorporeis non est sicut in anima, quæ est iuncta corpori, neq; ut in Sole quod est corpus, sed tanta est perfectio producti incorporei, quod ipsum est substantia. Et ratio est quia substantia differt ab accidente uel ratione corporis, ut aqua à frigiditate, & hoc non est in incorporeis, ut manifestum est, uel quia unum sit subiectum alterius, & ideo substantia, ut est principium comparationis, & in se ipsa dicitur substantia, & ut comparatur ad extra & ad operationem suam, cuius est principium dicitur facultas: ut eluti uita cœlestis substantia est, ut uero cœlum pulchritudine illius delectatum mouetur ad obsequium, dicitur facultas in illa uita, & non est nisi substantia, tamen ipsius uitæ adeo ut sola ratione differant. Tertia differentia est, quia substantia non est in subiecto, sed facultas est in subiecto, uerùm in incorporeis, ut dixi, non differunt nisi sola ratione, uelut pater & homo, nam pater necessario est homo, & est substantia, ut ad aliud comparatur. Quarta differentia est ratione propriæ naturæ quæ non dependet, nam substantia non pendet sicut accidens & facultas, uerùm ubi genita fuit non amplius pendet: respondeo, quod in incorporeis producitur, & non repugnet productio substantiæ, quia si non repugnat generatio hominis, quod sit substantia, multo minus etiam incorporeorum. Relinquitur ut obijcias, quoniam substantiæ incorporeæ semper fuit, ergo nunquam fuit ueræ substantiæ: ad hoc respondendum est per interemptionem, nam de uera responsione non est hic locus, quod

eadem

[redacted] stantiæ mortalis, ideo contingit hic error ex [redacted] rum quæ maximè similia esse uidentur, nam cùm accidentia producantur in tribus temporibus, & incorporea in nullo, substantia autem mortales solum in uno tempore, ideò productio incorporeorum uidetur esse similis productioni accidentium, cum tamen productio substantiæ mortalis sit uerè media inter illas, nam substantia mortalis producitur in uno tempore, accidens in omni substantia immortalis in nullo, necesse est autem extrema magis differre inter se quàm à media, igitur substantiæ incorporeæ ordine & perfectione differunt, non tamen proportionem habent. Et si quis dicat, quod ultima substantia esset ęquè potens, ut Deus: respondeo quod non est uerum, quia uel loqueris de perfectione, & ita demonstratum est, quod Deus est ipsa perfectio, ultima substantia est imperfectissima: uel loqueris de magnitudine, & ita non sunt æquales prima & ultima substantia, quia non possunt comparari, sicut lumen non potest comparari lumini, quod sit dulcius uel amarius, grauius uel leuius, maius enim & minus, & æquales sunt differentię quantitatum, uitæ autem non habent quantitatem operationis, quia, ut dixi, est absolutissima ratione finis, neque potentiam ad aliquid, quia sunt in æterno actu, & hoc secundum philosophos, & iuxta rationem numinis naturalis, nam secus religio & fides tenent, quia supponunt mundum esse creatum, & sic potentia differentiæ ab actu, quia [redacted] creauit, & antea non creauerat, & tamen poterat creare.

Ex hoc patet, quod nulla substantia incorporea est finita nec infinita, nec extensa nec contracta, quia omnia ista pertinent ad quantitatem, quarum illę omnino sunt expertes. Cor.

Propositio ducentesimauigesimaseptima.

Vitæ iuxta numerum perfectionum in comparatione ad cogitationem nostram proportionem quandam habent.

[redacted]

ig[redacted]mundo tota incorporea non est numerus. Si enim Deus esset [redacted] numero non posset esse [redacted] commune, & uniuersim am- pl[redacted] contineret, quæ omnia sunt [redacted] da [redacted] nefaria & [redacted] (ut dixi) menti humanæ [redacted] red[redacted] similitudinem sensilium, à quibu[redacted] numeros, sicut in partibus hominis, aut cœli, aut aëris iuxta situm, aut magnitudinem. Est etiam alius modus iuxta quem Aristoteles numerauit mentes quæ mouent corpora cœlestia, quod absurdum non est, uelut si quis numeret digitos, in pulsante chelim, erunt quatuor aut sex, non tamen est numerus ille

Lib. 7. cap. 4. uerè plurium, cum ad unum hominem referuntur. Et cum sit mundus hic imago superioris, ut ille dicebat, & inferior potestate contineat infinitas partes, infinitas ordinis ratione superior continebit. Sed non infinitas numero. Exempli gratia, proponamus quod Solis uis dirigatur ad nos usq; impedita per nebulas, ut nōnunquam contingit: erit ergo perfectio una, sed ordinata omnium radiorum: adeò quod si infinita uasa applicarentur aqua plena infinitæ rationes iridis apparerent, quæ omnes continerentur potestate in radiis illis ratione comparationis ad uasa & irides, per se autem, ut sunt perfectiones essent in actu.

Propositio ducentesimatrigesima.

Proportio incorporeorum ascendentium semper maior est.

Com. Prop. 171. Cum proportio illa sit quasi similis decori, & ideo musicæ geometrica maior est in maioribus ac magnitudinibus, ut suprà docuimus. Sed non est neq; geometrica, neq; arithmetica, nec musica, nec per recensum, essent enim quantitates quæ compararent: unaquæq; enim harum inter quantitates constituta: at illa est ut producentis ad productum. [redacted]

cur ergo Sol & Iupiter nō sunt locati in supremis orbibus, cum sint nobiliores & maiores & [redacted] res, cæteris erraticis, dico, quod fuit ob mun[redacted] si fuissent altiores mundus inferior frigore [redacted] quandoquidem uel sic frigore premantur, in hyeme etiam sub torrida plaga, & sub polis ac iuxta eos semper.

ſemper. Et orbes ſuperiores nõ indigebant lumine Solis, quod apparet in nocte ſerena, cum etiam adeo à nobis diſtent. Vnde ſi canicula eſſet in cœlo Lunæ, plus luminis afferret centuplo quàm Luna, cùm diſtantia ſit quingentupla diſtantiæ Lunæ à terra. Et ſi Sol eſſet factus adeo maior, ut in orbe Saturni conſiſtens caleſaceret terram æqualiter, ut non exurereturin æſtate, hyeme neceſſe eſſet, ut nimium gelaſceret. Sin autem æquale eſſet frigus in hyeme, exureretur terra per æſtatem, quando quidem nec ſic illam pati poſsint, qui in torrida plaga habitant. Et ſi Sol eſſet ubi eſt Luna, & eo minor non illuminarentur orbes ſuperiores. Ideo nobilitas non eſt in orbibus ob altitudinem, ſed ob ſubſtantiam incorpoream quæ illi dominatur. Et eſt in loco congruenti toti corpus, uita autem non eſt in loco.

LEMMA.



Et proponantur a & b in proportione dupla altitudinum & magnitudinum, & cõparentur ad d, erit ergo angulus a d c maior b d c, quare ſi ſunt æquales uires in a b, refrigerabitur magis d ab a quam b, & ita patet utraq; pars dicti in fine propoſitionis.

Propoſitio ducenteſimatrigeſimaprima.

Tres eſſe mundos, atque inter ipſos nullam eſſe proportionem: nec numero eos definiri.

Cum palam ſit eſſe corporeum mundum ut elementa, & incorporeum ut Dei, & medium eſſe neceſſe eſt uitarum & hominum ac cœleſtium, quòd primum ſenſu patet, ut cœli, hominum & animalium, atq; plantarum, & ratione etiam, quoniam extrema contraria nõ propriè medio copulantur, ut incorporeum ac corporeum. Dico igitur nullam eſſe inter hos proportionem atq; numerum faceremam de numero conſtat, quoniam non ſunt tres, quia ſint in ordine numerorum, ſed ut principium, medium, finis, & perfectum, perfectius, perfectiſsimum: ſcilicet poſitiuum, comparatiuum & ſuperlatiuum. Et quoniam ſunt extrema cum medio, ideò ſunt in proportione ſublimi etiam & non propria. Quod ſi eſſent maximè mundi ut ad corpora, ſed corpora nõ mouentur niſi iuxta finem uitæ, & non uim: ipſa enim ſi poſſet habere uoluntatem infinitam moueret in inſtanti: quia corpora non reluctantur animabus ſuis, ſed quantus eſt actus in animabus & uitis, tanta eſt potẽtia ad unguem in corporibus, ergo non contingit proportio in mundo uitarum uera niſi illa ſublimis. Neq; enim finita eſt quæ nullis circumſcribitur terminis, neq; infinita quo finitam preſupponit, ſed neque inter mundum & incorporeum & uitarum cùm mentes non moueant, Com.

uitæ

uitæ moueant: & quod mouet necessariò mouet, & quod non potest mouere, quoniam omnia æterna sunt: & in æternis idem est esse ac posse: igitur inter mundum incorporeum & uitarum nulla est proportio uera, sed solum sublimis, nec numerus: nisi ut à nobis fingitur. Velut si dicamus in tabula, & in negocio est principium medium finis, & hæc possunt dici tria quatenus distinguuntur: sed nō ob hoc dicendum est tabulam, aut negocium habere tres partes, multo minus esse tria negocia aut tres tabulas.

Propositio ducentesimatrigesimasecunda.

Omnis motus naturalis, quanto uelocior est, tanto propior est, & magis simillimus quieti.

Com. Hæc propositio primo intuitu uidetur esse falsa, quoniam cùm motus sit contrarius quieti, & efficiat actiones quieti contrarias, quantò uelocior erit tanto remotior à natura quietis & magis dissimilis, propterea intelligere oportet primum, in quo sensu uerba sint accipienda, nam hæc propositio, & authoritate, & sensu & duplici ratione euidenti manifesta est. Oportet igitur primū scire quo [illegible] attinet tria esse discrimina: quietem in eodem: transitum [illegible] per medium: & transitum ad alium sine medio. Duorum primorū exempla notissima sunt, tertij est hoc, si urceus aqua plenus exponatur Soli, & efficiatur iridis imago in tabula: inde sublata tabula eadem iris appareat in muro, erit transitus sine media, quia quod sit eadem dubium non est, ijdem radij & idem corpus speculare, quod uerò transeat sine medio, primū sensus docet, secundum

Tex. 121. ratio, quia fit in instanti, ut Secundo de Anima. Rursus Sol illustret urceum aqua plenum: appareat ex hoc iris in muro, interponatur aliquid, & transferatur urceus, apparebit iris alia loco, & non transiuit per medium, uidetur idem de intellectu, & ui imaginandi, quibus ex Germania transeo in Indiam subitò: & eodem modo ex anima salicis, in hac planta fit transitus in proximam nec per medium, quod etiam uidemus in igne & ellychnio proximo, & id sæpe accidit tum præsertim cum nuper extinctum fuerit.

Iam ergo id supponamus, quod etiam ad rem parum facit, sed ad intelligentiam satis, uideamusq́, quare sit quod motus opponatur quieti, & manifestū est, quod differentia loci est causa, nam in quiete res manet in eodem loco, in motu transit ad alium locum, & quantò medium est maius, tantò motus est manifestior, unde sequitur, quod in his quæ ualde lentè mouentur, illa uidentur quiescere, & post aliquot tempus deprehendimus mota fuisse, nunquàm tamen moueri, sicut in Sole, Luna, stellis, unde illa opinio Philosophorū existimantium omnia semper moueri, nō omnino potest tam bene

reprobari,

reprobari, quia licet sensus nõ cognoscat moueri, cognoscit tamen mota esse, & id sufficit: multa ergo cognoscuntur mota esse quæ nõ cognoscuntur moueri, uelut lapis grauis superstans terræ, quem ui demus post annum descendisse per duos digitos, & tamen semper uidetur quiescere. Igitur cum in pari tempore quę uelociter mouen tur plus spatij superent, maius etiam relinquunt medium inter locum, & locum, & ob id magis remota sunt à quiete, & magis illi cõtraria: hæc igitur est ratio cur quæ uelocius moueantur, minus quieti similia aut proxima existimentur. Dico ergo, quod illa quæ naturaliter uelocissimè mouentur, sunt magis similia & magis proxima ipsis quiescentibus quàm quæ tardè: cum enim omnis motus naturalis necessariò etiã sit regularis, ut qui à uirtute Dei fiat, erit uel per lineam obliquam aut rectã. Quoniam uerò multarũ recta est perfectissima, & obliquarum circularis, erit omnis motus naturalis circularis aut rectus: dico ergo quòd in utroq; uerũ est quod dicitur. Et primũ in circulari ille motus est propinquior quieti, in quo partes sunt propinquiores suo loco, sed si uelocissimus sit motus, nunquàm ita sunt extra suum locum, qui enim in potestate sint proximæ ei: ergo partes illę inde se habent ac si quiescerent. Secunda ratio, quia quod uelocissimè mouet, absq; dubio tanto tempore quiescit in suo loco quantò quod tardè: exemplum. Luna in triginta annis quiescit in principio arietis quadringẽteis per sex horas, id est, centum diebus in quadringentis uicibus, Saturnus cẽtum diebus sed semel tantum: ergo tantum Luna quiescit, quantum Saturnus, cõparatione ad idem tempus addita pari ratione in alijs partibus, sed cum uelocius moueatur Luna quàm Saturnus minus quiescere uidebitur Luna in alijs partibus quàm Saturnus, & tantundem in principio arietis Luna ut Saturnus, ergo cum Luna tantundem in principio arietis quiescat, quantum Saturnus in triginta annis, & in alijs partibus minus quàm Saturnus, igitur absolutè Luna plus quiescit in principio arietis, quàm Saturnus dato tempore æquali triginta annorũ. Et formatur demonstratio hoc modo: Luna quando est in loco ipso, puta in principio arietis, ibidem est actu, & quiescit per tantundem temporis quantũ Saturnus, & in omnibus alijs locis data paritate, est semper propior ipsi principio arietis potestate quam Saturnus, igitur Luna plus quiescit in principio arietis quam Saturnus, quia dum ibidem sunt æqualiter quiescũt, & dum sunt extra, Luna semper est propior & potestate magis in illo loco, igitur Luna magis quiescit in principio arietis quàm Saturnus. Pręterea, si Luna & Saturnus mouerentur in æquali tempore, & Luna in paruo circulo, & Saturnus in magno, dubium non esset, quin

Z Luna

Luna non diceretur magis quiescere in suo loco, & diutius quàm Saturnus, nam Luna semper esset prope locum suum, & Saturnus persæpe uideretur procul. Sed si moueantur in eodem circulo, & Luna moueatur uelocissimè, Saturnus tardè: perinde erit, ac si Luna moueatur in paruo circulo, & Saturnus in magno, ergo quod uelocissimè mouetur est proximius quieti quàm quod tardè. Illud etiam idem manifestius erit in extremis, nam quod minimo spatio mouetur propemodum non mouetur. Sicut, si quid circa centrum moueatur, adeò ut ipsum tangat, non dicetur moueri, sed quiescere ibi, sed quod uelocissimè mouetur, semper uersatur circa idem, quia nunquam multum abest, quia ibi non quiescit, igitur quod uelocissimè mouetur motu naturali circulari est proximius quieti quam quod tardè. Demum, si aliquid mouetur infinita uelocitate motu circulari, semper esset in eodem situ secundum partes & immobile, igitur quod infinita uelocitate mouetur, & quiescit. Ergo quod uelocissimè mouetur cum magis distet ab opposito eius, quod infinita tarditate mouetur, quàm quod tardè, magis etiam appropinqua bit potestate in efficaci infinitæ uelocitati quàm quod tardè, igitur quod uelocissimè mouetur propius est quiescenti quam quod tardè. Demonstratum est enim in Dialecticis, argumentum ostendere ab eo quod est simpliciter tale ad id q̃d natura illi quoquo modo tale est & cõuerso modo. Ostendo modò quod simillimus: quoniã illud est similius quieti in quo quod fertur non potest dignosci distantia à priore loco, sed in uelocissimè motis hæc distantia non potest dignosci, igitur uelocissimè mota uidentur planè quiescere, quod idem patet duobus experimentis manifestis. Primum si quis uideat rotas quibus acuuntur gladij moueri usq; ad certam uelocitatem, augeri uidetur motus ille, uerùm cum adeo cõcitatus fuerit, ut sensus non possit discernere, neq; comprehendere illam uelocitatem, & rota non fuerit mota ab axe, ita ut titubet nec fuerit ulla inæqualitas, uidebitur omnino quiescere, & ita oculus diudicat, & longè magis diudicaret, ubi ad tantam motus perueniret uelocita tem, ut nullo modo initium à fine distingui posset, sicut est in motu cœli, qui comparatus ad quemuis motum uelocissimum artificio factum, insensilem habet proportionem ob magnitudinem, & ideo talis motus cœlestis est simillimus quieti. Secundum experimẽtum est, si essent duo homines habitantes Bononiæ, quorum unus iret Mutinam, paulatim quiescendo in quolibet loco per unam diem, adeò ut in unoquoq; anno maneret Mutinæ, & prope per sex menses, & prope Bononiam per sex alios menses in diuersis locis, & una die tantum Bononiæ: alius uerò iret Mutinam singulo die, &

per omnia loca ficuthirundo uolans quater & quater rediret Boniam,nemini dubium eft, quod hic fecundus uideretur magis quiefcere Bononiæ quàm primus,& hoc quia in anno quilibet eorum quiefceret per unam diem Bononiæ,& in hoc effent æquales, fed fecundus uideretur frequentius Bononiæ quàm primus,& etiam effet poteftate propior illi,adeò ut liceret cuilibet illum conuenire qualibet die magis quam primum: ergo duabus de caufis uideretur fecundus magis quiefcere Bononiæ quam primus,& in tertia æqualiter.

Modò dico de recto motu,quoniam quanto celerius fertur per medium ad fuum locum,tanto minus temporis infumit,ergo diutius quiefcit in loco,minus eft etiam tempus per quod mouetur in comparatione ad quietem & fimpliciter, ergo in motu recto propius eft quieti,quod uelocifsimè mouetur,preterea inter duas quietes motus uelocifsimus eft imperceptibilis. Ergo motus uelocifsimus eft fimilior quieti quàm minus uelox. Accedit manifeftifsimè ...ud quod ab initio diximus, fcilicet, quia motus uelocifsimus eft medius inter motum tardum & fubitam mutationem,hoc enim eft manifeftifsimum,adeò ut dubitemus in motibus uelocifsimis, an mobile tranfierit per medium,eft enim primum motus lentus , qui fit ex tranfitu in longo tempore,& uelocifsimus in paruo,& mutatio fine tempore. Rurfus conftituamus alium ordinem quietis motus,& fubitæ mutationis: & ex dictis fubita mutatio eft propior quieti quā motus: quoniam fi motus effet medius inter quietem &

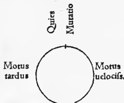
Subit.Mut.	Motus uelocif. Motus Tar.
Quies fubita Mut.	Motus

fubitam mutationem,non effet,ut dictum eft, fubita mutatio quædam quies:nam in fubita mutatione non pertranfitur medium: in quiete non pertranfitur medium,in motu pertranfitur medium, igitur quies eft propior fubitæ mutationi quàm motui. Sed fubita mutatio eft propior motui uelocifsimo quàm tardo , igitur quies eft propior motui uelocifsimo quam tardo.

Videtur & hoc fenfus manifeftè oftendere, quoniam cum lapis defcendit fumma cum uelocitate, adeò ut non percipiatur, uidetur quiefcere,& non motus effe, & hæc fuit fententia multorum nobiliorum antiquorum,& propterea oportet ut oftendamus difficultates,quæ contingunt in his.

Dico igitur,quod motus naturales funt duorum generum,ut dictū eft,fcilicet rectus & circularis: & motus differt à quiete in duobus,in eo quod mutat locum,et in eo quod tranfit per medium motus,ergo rectus uelocifsimus in eo quod tranfit per medium magis

gis distat à quiete in eo quod plus de medio superat quàm tardus, & est propinquior quieti in eo quod celerius quiescit. At motus circularis uelocissimus est propior quieti in transitu medij, & in reditu ad locum priorem: de reditu ad locum priorem clarum est per se: de transitu medij, dico quod cum in prima medietate magis remouetur à medio quam motus tardus, & in secunda medietate tantundem, uelocius redeat. Ergo in secũda medietate est semper proximior motus uelocissimus ipsi quieti, sed in prima medietate q̃d mouetur motu uelocissimo propius est secundæ medietati semper quam quod mouetur tardo motu, igitur quod mouetur uelocissime circulariter est propius quiescenti, quam quod mouetur tardè. Et hoc est quia in æternis motus est quies, & ideo habent quandam similitudinem iuxta perfectionẽ suam, sicut si essent in circulo hoc modo. Mutatio ergo cõuenit incorporeis quę pendẽt à corpore, sicut lumini: quatenus enim sunt ex corporeo, occupãt diuersum locũ, quatenus e.t incorporei id, agit sine transitu per mediũ & in instanti, ergo incorporea simpliciter mutationem recipiunt, non in tempore neq; in loco. Videtur autẽ uelocissimũ dupliciter etiã nobis iuxta sensum, idq; est

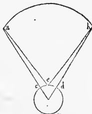


in quo sensus medij transitum non percipit, & natura quod est primi mobilis. At dubitare quis potest circa hoc, nam proprium motus est tangentia concutere, quieris autem minime: concutit autem maximè quod uelocissimè mouetur, ob hoc arbitrati sunt homines quod uelocissimus motus multò plus distarct à natura quietis quam tardus, sed hoc est quia non eadem est ratio uiolenti & naturalis: uiolenta enim non redeunt in seipsa, nec habent rationem circularis, sed potius recti & infiniti, & ideò in his quæ mouentur motu recto naturali cadit uiolentia, non autem in his quæ mouentur motu circulari naturali: cõcussio ergo est in motu uiolento, & quælibet motus uiolentus, quanto magis augetur tantò magis recedit à contrario, tantò magis remouetur à natura contrarij, & habet actiones contrarias ualidiores.

Est etiam aliud penè simile argumentum in figuris ipsis, circulus enim unica linea continetur, nulla tamen figura ab ea magis natura remota

remota est triangulo:siquidem circulus capacissimus est, triangulus omnium rectilinearū minimè capax:ut contra polygoniç,quanto plurium sunt laterum eo capaciores sunt,adeò ut octagona quadrangula,& quæ est sexdecim laterum æqualium, & æquiangularium plus contineat octagona,& forma etiam sit similior circulo, adeò ut cum excreuerit in multiplicem numerum rectangula figura huiusmodi, scilicet æquilatera, & æquiangula omnino sensum fallat,uideaturq́ prorsus circulus. Et tamē figura plurium laterum, quāto plurium laterum fuerit remotior est à natura circuli,qui una tantum linea continetur:plus enim distat centum ab uno quàm decem,& mille quàm centum. Causa igitur est,quia (ut dixi) etiam in naturalibus omnis natura rerum est, ut quasi clanculum redeat in seipsam:nam circularis figura per triangulum ex rectis multum à natura sua recedit & ambitu & similitudine:eadem per figuras quę ex pluribus rectis constant ad sui similitudinem redit, nunquam tamen explet eandem naturam perfectè,cùm nulla polygonya figura pro circulo exacto sit:ita uidetur in naturalibus ad idē redire,quod est potestate solum quadam generali dissimile:actu uerò nō idem ad unguem. Sed obijcies de motu quòd si tempus fiat breuius,magnitudo autem constet,erit(ut diximus)quod mouetur simile quiescenti: at ubi tempus idem sit, sed magnitudo perpetuò augeatur, non idem ut in cœlo:uerisimile est enim quicquid est quod mouetur ulterius quam id quod cernitur nihilominus in uiginti quatuor horis,non autem celerius moueri:propterea cùm spatium temporis prolixum sit,non uidebitur quiescere. Nec obstat quòd quispiam proportionem obijciat, siquidem multo minus uidebuntur propiora centro quiescere, namq; illa tardius ex confesso mouentur,at quod tardius mouetur,ut dictum est,moueri magis uidetur, ideò proportionem illam ad aliud mobile referre oporteret, cum nullum tale sit. Dicimus ergo quòd apud illas non uidetur motus tardus,quia comprehendunt motum ante tempus,nobis autē hæc accidunt,quia comprehendimus tempus ante motum. Et etiā quia circa polos quasi quiescit,& quod non potest aliquid comprehendi,simul moueri & quiescere,ut docebimus. Et etiam quia motus est ab illis,sicut in nobis cum mouemur · nō enim ut mouemur nos moueri deprehendimus, sed ut moti ideò in his,non quod appareat,sed quod est spectare oportet: at ita est ut quæ uelociter ualde mouentur,perinde sunt quasi ac si quiescerent, adeò ut motus si in instanti fieret esset quies,& quies in incorporeis est motus, non in tempore. Videntur etiam astra quiescere nobis,quoniam (ut dixi) lineæ a e & b e non possunt uideri moueri in e, oculus autem iudi-

cat moueri debere in e, non ex c in d, ubi est amplum spatium terræ comprehensum, ergo a e quiescere uidetur in e, igitur & in a. Quòd autem uideatur in e quiescere, patet, quia quod motum uideri debet, oportet ut in insensili tempore spatium sensile pertransierit: insensile autem tempus est minus motu uelocissimo pulsus, hic autem maius exigit tēpus centesima parte centesimæ partis horæ, igitur dici ducentesima quadragesima millesimæ partis, & in hoc oportet ut pertranseat sensile spatium, quod est quinquagesima parte ulnæ saltem maius. Ergo si fiat instrumentum quingētarum ulnarum ambitus, q̄d in uiginti quatuor horis circumuoluatur, adeò lentè mouebitur, ut quiescere uideatur: tum uerò magis ob id quod dixi, quoniam in centro quiescere uidebitur, ergo in peripheria, ubi distantia deprehendi posit. Ergo nulla machina quæ uideatur moueri, constitui potest, quæ in horis XXIIII circumuertatur: quia non tam magna fieri potest, ut spatium à centro ad circumferentiam oculo non posit deprehendi.



Et hoc uoluimus declarare ut intelligamus, quæ sunt necessaria ad mundum incorporeum.

Demonstr-



HIERONYMI CARDANI,

PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, ac Medici,

ARTIS MAGNAE,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, LIB. VNVS, QVI ET TOTIVS OPERIS de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solùm, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerumetiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc autem librum ideò de nouo edere placuit, partim ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum opposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, tanto auidiùs amplectantur, ac minore fastidio perdiscant: partim quia ab Authore recens diligenter recognitus & auctus sit.

HIERONYMVS CARDANVS MEDICVS Andreæ Osiandro uiro eruditiss.

S. P. D.



NIHIL tam animo unquam uersaui, Andrea doctiss. quàm ut eorum, qui de bonis literis bene merentur, nomina posteritati commendarem. Tum uerò præcipuam quandam diligentiam adieci, si tales cum eruditione humanitatem coniunxissent. Quamobrem cùm te nõ solum Hebræarum, Græcarum ac Latinarum literarũ scientiam haud mediocrem, sed etiam Mathematicarum habere intelligam, humanissimum quoq; semper expertus sim, uisum est, hoc meum Opus, nulli melius posse dedicari, quàm tibi, à quo possit & emendari, (si manus mea imperium mentis transgressa fefellisset) & legi cum uoluptate, & intelligi, tum uero etiam cum authoritate commendari. Hoc exemplum, nisi fallor, & alij sequentur, ac opera sua, non nisi in ea quam tractant arte eruditis dedicabunt. Accipe ergo amoris erga te mei, & officij in me tui, tum præclaræ simul eruditionis tuæ perpetuum testimonium. Et quanquam tu talis sis, quem tua uirtus omnibus notum faciat, tamen cum Alexander, & Cæsar, factis suis notissimi, aliorum monumentis inscribi desiderauerint, cumq; Plato, qui mira illa per sese conderet, aliorum tamen scriptis laudari concupiuerit, spero meum hoc qualecunq; officium tibi quoq; non ingratum esse futurum, quòd & in his fortuna quædam dominetur, pereantq; meliora sæpe, seruatis deterioribus. Et sit modo de hoc qualecunq; iudicium tuum, certum mihi tamen est, officio meo me satisfacere debere. Atq; utinam contingat illustriore exemplo, animum meum erga omnes ostendere, qui eo animi candore sunt, quo te in studiosos nostri temporis fuisse semper agnoui. Sed dabitur forsan occasio melior, et si non detur, hanc tamen, qualiscunque sit, perijsse mihi nolim. Vale. v. Idus Ianuarias.

M. D. XLV. Papiæ.

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

ARS

ARS MAGNA, QVAM VVLGO COSSAM VOCANT, SIVE REGVLAS ALGEBRAICAS, PER D. HIERONY- mum Cardanum in Quadraginta Capitula redacta, & est Liber Decimus suæ Arithmeticæ.

De duabus æquationibus in singulis capitulis. CAP. I.



ÆC ars olim à Mahomete, Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim huius rei locuples testis Leonartus Pisanus. Reliquit autē capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis asscribemus. Post multa uerò temporū interualla, tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto authore quæ tamen cum principalibus, à Luca Paciolo posita sunt. Demū etiam ex primis, alia tria deriuatiuā, à quodam ignoto uiro inuenta legi, hæc tamen minimè in lucem prodierant, cum essent alijs longè utiliora, nam cubi & numeri & cubi quadrati æstimationem docebant. Verùm temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi & rerum numero æqualium inuenit, rem sanè pulchram & admirabilem. Cum omnem humanā subtilitatem, omnis ingenij mortalis claritatem ars hæc superet, donū profectò cœleste, experimentum autem uirtutis animorum, atque adeò illustre, ut qui hæc attigerit, nihil non intelligere posse se credat. Huius æmulatione Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido uenisset, capitulum idem, ne uinceret, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego uerbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullum aliud esse posse negat (quanquam tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset, desperabam) tū inuenire, quæ quærere non audebam. Inde autem, illo habito, demonstrationem uenatus, intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alumnum nostrum, inueni. Porrò quæ ab his inuēta sunt, illorum nominibus decorabuntur, cætera, quæ nomine carent, nostra sunt. At etiam demonstrationes, præter tres Mahometis, & duas Lodouici, omnes nostræ sunt, singulæque capitibus suis præponentur, inde regula addita, subijciet experimentū. Et quanquam longus sermo de his haberi posset, ac longa capitulorū series sub-

 iungi,

iungi, finem tamen exquisitæ considerationis in cubo faciemus, cætera, etiam si generaliter, qui tamē per transennam tractantes. nanque cùm positio lineam, q̄dratum superficiem, cubus corpus solidum referat, næ utique stultum fuerit, nos ultrà progredi, quo naturæ nō licet. Itaque satis perfectè docuisse uidebitur, qui oīa, quæ usque ad cubum sunt, tradiderit, reliqua quæ adijcimus, quasi coacti aut incitati, nō ultra tradimus. In omnibus autem præcedentium, ac maxime librorum tertij ac quarti, meminisse operæprecium fuerit, ne uel iterum tradendo nugax efficiar, aut obscurior prætermittendo.

Iam enim docuisse nos meminimus, quæ sint impares, aut pares denominationes. Namque quadratum, & quadratum quadrati, cubumque quadrati, ac deinceps una semper intermissa pares, rem autē seu positionem, cubum, primum ac secundum. Relatum, impares uocamus denominationes. At uero quòd tam ex 3, quàm ex m:3, fit 9, quoniam minus in minus ductum producit plus. At in imparibus denominationibus eadem seruatur natura: nec plus nisi ex uero numero fiet: nec cubus, cuius æstimatio sua sit m: seu quòd dicimus debitum, expositione ulla numeri ueri produci potest, iam meminisse oportet dilucidius explicatum.

Si igitur par denominatio, numero æqualis sit, rei æstimatio duplex est, m: & p: alteraque alteri æq̄lis, uelut, si q̄dratum æquetur 9, res est 3, uel 3 m: & si æquetur 16, res est 4, uel m:4, & si quadratum q̄drati æquetur 81, rei æstimatio est 3, uel m:3. Componere autem pares denominationes non est admodum necessarium, quia q̄d. q̄dratum ad deriuatiua capitula pertinet, uerum si diligenter hæc, quæ scribam, animaduerteris, cum hac regula etiam uoto tuo satisfacies, nam cum q̄dratum & quad^{m} q̄dratum numero æquantur, eadem erit ratio, quæ in simplici, duplex æq̄tio scilicet, altera p: altera m: inuicemque æquales, uelut 1, q̄d^{m} q̄dratum p: 3 q̄dratis æquantur 28, positio ualet 2 uel 2 m: At uero, si q̄d^{m} q̄dratū & numerus, æq̄lia sint q̄dratis, demonstrabimus sanè cap 8 duas esse rei æstimationes ueri numeri, totidem autem habebit per m: singulas singulis correspondentibus æq̄les, uelut si dicam 1 q̄d^{m} q̄d^{m} p:12, æquatur 7 quadratis, positionis æstimatio est, uel 2, uel m:2, uel R: 3, uel m: R: 3, & sic sunt quatuor æq̄tiones. Quòd si caruerit æstimatione uera, carebit etiam ea, quæ est per m: uelut 1 q̄d^{m} q̄d^{m} p:12, æquatur 6 quadratis, quia non potest æquationem ueram habere, carebit etiam ficta, sic enī uocamus eam, quæ debiti est seu minoris. At uero si q̄d. q̄d^{m} numero & q̄dratis æquale sit, una semper est rei uera æstimatio, altera ei æq̄lis, ficta, uel per m: uelut 1 q̄d^{m} q̄d^{m} æq̄tur 2 q̄dratis p:80, rei æstimatio est 2, uel m:2. Eadem igitur ratio, in cæteris paribus omnibus

denomi-

denominationibus inter se, cum numero iunguntur, at hoc per depressionem quomodo fiat, in quarto libro plenè docuimus.

At imparium denominationum, una tantum æquatio uera est, 4
nulla ficta, cum solæ numero comparantur, uelut duæ res æquantur 16, æstimatio rei est 8, duo cubi æquantur 16, æstimatio rei est 2, semper autem numerus cui comparantur denominationes, in hoc capitulo uerus, non fictus supponitur. Quid enim tam stultum, quàm fundamentum ipsum infirmare, quanquam tamen ratio opposita, in oppositis esset obseruanda, eadem igitur est ratio, ubi plures denominationes numero comparantur, etiam si mille forent, una erit æstimatio rei uera, & nulla ficta, uelut 1 cubus p:6 positionibus, æquatur 20, rei æstimatio nulla est præter 2, neque uera, neque ficta.

Cum uerò duę denominationes cum numero comparantur, aut 5
ambæ impares, & comparatio fiet ad extremam, uel ad mediam, nam de ea quæ fit ad numerum, iam in præcedenti regula dictum est, uel altera impar, altera par, nam de utraque pari, in tertia regula generaliter diximus. Si igitur extrema denominatio, cubus scilicet, cum numero mediæ, id est positionibus comparetur, uide an ex duabus tertijs numeri Rerum in radicem tertiæ partis eiusdem numeri fiat ducendo, numerus propositus aut maior, aut minor. si igitur fiat numerus propositus ad unguem, æstimatio rei est duplex, & una uera, scilicet R ipsa, quæ ducta est. Exemplum, cubus p:16, æquatur 12 positionibus, ducto igitur 8, qui est $\frac{2}{3}$ de 12, numero rerum, in 2 radicem 4, qui est $\frac{1}{3}$ numeri rerum, fit 16, numerus æquationis propositus, æstimatio igitur est 2, radix 4, & alia est æstimatio ficta, & est correspondens ueræ, cubi æqualis eisdem rebus, & eidem numero, ut in exemplo, si cubus æquatur 12 rebus, p:16 numero, uera æstimatio est 4, igitur si cubus p: 16 æquatur 12 positionibus, ęstimatio rei est m:4, nam 12 res sunt m:48, & cubus m:4 est m:64, cui addito 16, fit m:48. Quod si productum ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in R tertiæ partis eiusdem numeri, superet numerum æquationis propositum, tunc capitulum habebit tres æquationes, duas ueras, & tertiam fictam. Exemplum, 1 cubus p:9, æquetur 12 rebus, una æquationum uera est 3, alia R $5\frac{1}{4}$ m:$1\frac{1}{2}$, tertia ficta ex his semper aggregatur, & respondet æstimationis cubi æqualis eisdem rebus & eidem numero ueræ, & est R $5\frac{1}{4}$ p:$1\frac{1}{2}$ & ita reliqua ficta, de qua diximus, in alio exemplo, aggregatur ex duabus ueris, sed quia ueræ sunt inuicem æquales, ideo ficta semper dupla est ueræ. Manifestum est igitur, quòd falsæ æquationes seu fictæ, capituli cubi & numeri æqualium rebus, respondent æquationibus ueris capituli cubi æqua-

bi æqualis rebus & numero, ubi res & numerus sint idem. At uerò ubi ex tali multiplicatione ℞ tertię partis numeri rerum, in duas tertias eiusdem numeri fiat minus numero proposito, tunc nulla erit ęquatio uera sed una ficta, ęqualis uerę capituli cubi ęqualis totidem rebus & eidem numero, uelut 1 cubus p: 21 ęquatur 2 rebus, quamquam careat uera ęquatione, ficta tamen est m: 3, & hęc est ęstimatio uera cubi ęqualis duabus rebus ac numero uiginti uno.

6. Ex his non difficile est uenari, quot ęquationes habeat capitulũ cubi ęqualis rebus & numero. Si igitur ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum in radicem tertiæ partis eiusdem, fit numerus propositus, capitulum habet duas æquationes, ueram æqualem fictæ præcedentis regulę, & fictam æqualem ueræ, ideo uera est dupla fictæ, quia ibidem ficta est dupla ueræ, ut 1 cubus æquatur 12 rebus & 16 numero, æquatio uera est 4, & ficta est m: 2, quia si 1 cubus p: 16, æquatur 12 positionibus, æstimatio uera est 2, & ficta m: 4. Quod si ex dicta multiplicatione, proueniat plus numero æquationis, æstimatio uera erit una, respondens falsę præcedentis regulæ, & falsa duplex, utraque respondens ueræ, præcedẽtis regulæ, ut si cubus æquetur 12 positionibus p: 9, æstimatio falsa utraque est, ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ m: & 3 m: & uera est ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, & ita uides, qualiter falsæ ueris, & ueræ falsis sibi inuicem respondent, ex ambabus autem falsis conflatur uera, nam ex ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$ & 3, fit ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$. Quod si ex tali producto fiat minus numero æquationis, æstimatio est una tantum, & uera, sicut in præcedenti regula est una tantum & ficta, uelut si cubus æqualis sit duabus rebus & 21 numero, æquatio est 3, sicut in cubo p: 21 æqualis duabus rebus æstimatio ficta est m: 3.

7. In capitulis aũt in quibus æquantur inuicem numerus & denominatio par & impar, aut par est extrema, ut quando quadratum & positio & numerus æquantur inuicem, aut denominatio extrema est impar, ut quando cubus & quadratum æquantur numero, si igitur quadratum æquatur positionibus & numero, habebit duas æquationes, unam ueram æqlem fictæ, capituli q̃drati & rerũ earundem æq̃lium eidem numero, & aliam fictam æqlem ueræ alterius capituli. Exemplũ, Si q̃dratum & 4 positiones: ęquantur 21, ęstimatio uera est 3, & ficta m: 7, & si quadratum ęquatur 4 positionibus, & 21, ęstimatio uera est 7, & ficta m: 3, ideo habitis ueris, mutuo habentur fictę, quemadmodum in prѳcedenti regula, sed diuerso modo, nam hic extrema extremis, ibi media extremis comparantur. Nam ibi capitulum cubi & numeri ęq̃lis rebus, cõparatur capitulo cubi ęqualis rebus & numero, hic capitulum q̃drati & rerum ęqualium numero, comparatur capitulo q̃drati ęq̃lis rebus & numero

At quando quadratũ & numerus æquantur rebus, & casus est possibilis, tunc sunt duæ solutiones ueræ, ut dicendo quadratum p: 12. equatur 7. pos. positio potest esse 4. uel etiã 3. nam in utroque uerificatur, nisi quando numerus est æqualis quadrato dimidij numeri radicum, nam tũc solum est una æquatio, scilicet dimidium numeri ipsarum radicũ. In hoc autem capitulo nunquam potest esse solutio ficta, nec æquatio per minus, sed ubi est solutio per uerum numerum, est duplex, ubi caret solutione uera, non tamen magis potest solui per æquationem fictam.

Si uero equatio quæratur in capitulis cubi, quadratorum & numeri, tunc si cubus æquatur quadratis & numero, tunc est una tantùm solutio uera: uelut si dicam, cubus æquatur tribus quadratis p: 16. res ualet 4. & non potest alia inueniri.

NOTANDVM, quod in omnibus capitulis in quibus est una tantum solutio, equatio est facilior inuētu, & nitidior, uelut in capitulo cubi & rerũ equalium numero, & cubi equalis quadrato & numero, & in capitulo cubi æqualis rebus & numero, ubi productio illa ex $\frac{1}{3}$ numeri in ℞ tertiæ partis est minor numero. Idem dico, ubi cubus cum numero æquatur rebus, & non potest haberi nisi ficta æquatio, reliquæ autem in quibus multiplex est æstimatio rei, sunt difficiliores & confusæ. Notandum.

Si igitur cubus & quadratum, æquantur numero, tunc estimatio rei est una tantũ per plus, ubi ex $\frac{1}{3}$ numeri quadrati in q̃dratũ duarum tertiarum eiusdem numeri fiat minus numero æquationis, & hæc æstimatio eadem est ficte, correspondenti capitulo cubi & numeri equalium quadratis sub eadem quantitate. Exemplũ. Cubus & tria quadrata æquantur 20, tũc quia ex 1 tertia parte numeri quadratorum, in 4 quadratũ duarum tertiarũ fit minus quàm 20, dico quod non est nisi una equatio, & res ualet 2, & hec est æstimatio per m: cubi p: 20, equalis tribus q̃dratis. Vbi uerò ex ea multiplicatione talis numerus possit produci, erit una estimatio uera, & due ficte, & uera correspondebit ficte alterius capituli, & rursus fictæ ueris. Exemplum. Si dico, cubus & 11 quadrata equantur 72, res est ℞ 40 m: 4, pro uera æstimatione, sed pro ficta est 3 m: uel ℞ 40 p: 4 m: Et si cubus cum 72 æqualis sit 11 quadratis, æstimationes uere sunt 3. uel ℞ 40 p: 4. & ficta est ℞ 40 m: 4 m: Ideo quærendo fictam semper quærimus ueram, & correspondentem alterius capituli.

Notum est autem ex hoc, quòd capitula quædam habent duas, quædam unam estimationem, & quando habet tres, in una parte capituli, habent postmodum unam tantum in reliqua, uelut capitulum cubi æqualis rebus & numero in parte inferiore, & capitulum Notandum.

cubi & quadratorũ ęqualium numero, & capitulum cubi & numeri æqualium quadratis aut rebus, nam in una parte habent tres æquationes, in alia unam tantum, & similiter capitulum quad quadrati & numeri ęqualium quadrato: in una parte habet quatuor æquationes, in alia postmodum nullam. Quędam uerò habent duas per totum, ut capitulum quadrati & rerũ æqualium numero, aut capitulum quadrati æqualis rebus & numero: quæ uerò habent unam, sunt, ut capitulum cubi & rerum æqualum numero, & capitulum quadrati & numeri æqualium rebus, quod habet duas æquationes in una parte, in alia postmodum nullam.

Et scias, quod æquationes capitulorum, cubi & quadratorũ æqualium numero, item cubi & numeri æqualium quadratis, sic se habẽt, quod differentia æquationum uerarum & fictarũ semper est numerus quadratorũ, uelut, si cubus & 72 æquantur 11 quadratis, æquatio ficta est ℞ 40 m:4, uera sunt ℞ 40 p:4. & 3. differentia, ℞ 40 m:4 & 7 p: ℞ 40. est 11 numerus quadratorum, & ita, si cubus & 11 quadrata æquentur 72 numero.

In his autẽ capitulis, quæ duplici denominatione, impari & una pari ac numero constant, si cubus & res, æquales sint, quadratis & numero, æquationes possunt esse tres, & omnes uerę, & nulla ficta, quia ut dictum est, minus cum ad solidum deducitur, fit minus, & ita minus æquale esset plus, quod esse non potest.

Vbi uerò cubus, quadratũ & res, æquales sint numero, tunc tres etiam erunt æquationes, altera p: duę m: & hoc, si sub eisdem denominationibus quadrata æquari possunt rebus numero & cubo, & æquationes ueræ hic, sunt fictę in illo exemplo, 1 cu^{bs} p: 6 quad^{tis}. p: 3 rebus, ęquatur 8, tunc rei uera ęstimatio habetur ex capitulo suo, deinde habet æstimationes fictas capituli, 1 cub. p:3 rebus p:18 æqualium 6 quadratis, & una earum est 3, alia ℞ $8\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, igitur m: 3. uel m: ℞ $8\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$. est æstimatio ficta, 1 cub. p: 6 quadratis p: 3 pos^{is} æqualium 18. & cum hoc est etiam tertia æquatio uera.

Ex hoc habentur tres æquationes capituli, cubi, rerum, & numeri, æqualium quadratis, ubi æquatio posibilis, cognoscitur autem hoc ex suis capitulis, earum igitur duæ ueræ sunt & æquales, ut dictũ est, æquationibus capituli totidem quadratorũ & rerum & cubi æqualiũ numero eidẽ, ut in exemplo dicto, tertia autem ueræ respondet alterius capituli, & est ficta, ideo æquatio capituli 1 cu^{bi} p:6 quad^{i} p: 3 pos^{is}, uera est æquatio per m: capituli, 1 cu^{bi} p:3 rebus p:18 æqualiũ 6 quadratis. At ubi quadratorum numerus minor sit quàm ut posit æquari cubo rebus & numero, in capitulo cubi quadratorũ rerum æqualium numero, tunc una est ęquatio uera, nulla

ficta,

ficta, at in capitulo quadratorum æqualium cubo rebus & numero una ficta, nulla uera, uelut dicendo, 1 cub. p: 1 quadrato p: 2 rebus æquantur 16, rei uera æstimatio est 2, & hæc est ficta æquatio cubi & duarum rerum & 16 ęqualium 1 quadrato. Manifestũ igitur est, capitula cubi quadratorum, rerum, æqualium numero: etiam cubi rerum & numeri, æqualium quadratis inuicem sibi respondere.

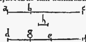
Pariter capitulum cubi, æqualis quadratis, rebus, & numero, re- 14
spondet capitulo, cubi, quadratorum, & numeri, æqualium rebus; ideoq; ubi res admodũ paucę sunt, est æquatio una ficta, ęqualis ueræ correspondenti alterius capituli cubi ęqualis totidem quadratis rebus & numero. Exemplũ. Si cubus æqualis sit 2 quad^ris 1 pos^tini 6, numero, res ualet 3, nec plus aut minus, quia si cubus & 2 quad^ta & 6 numerus, ęquant̃ uni positioni, nulla potest ęquatio uera esse, sed ficta erit m: 3. quæ erat uera in alio capitulo. Quod si res tot sint, ut capitulum cubi, quadratorũ, numeri, æqualium rebus, posit habere æquationem ueram, tunc æquatio uera duplex erit, & una ficta, correspondentes duabus fictis, & uni ueræ alterius capituli. Exemplũ. Si cubus & 3 quad^ta & 6 numerus, æquales sint 20 rebus, duæ erunt æquationes ueræ, scilicet 3, & ℞ 11 m: 3, & una ficta, scilicet ℞ 11 p: 3 m: Igitur æstimatio cubi, æqualis 3 quadratis, 20 rebus 6 numero, uera est, ℞ 11 p: 3, & duæ fictæ erunt, 3 m: & ℞ 11 m: 3 m:.

Eadem ratione capitula cubi & quadratorũ æqualium rebus & 15
numero, & cubi ac numeri ęqualiũ q̃d^tis & rebus, sibi inuicẽ respondent. Vbi igitur capitulũ cubi & numeri æqualium rebus & q̃dratis nõ habet ęquationem uerã, habebit unam tantum fictam, æqualem ueræ alterius capituli. Exemplum. 1 cubus p: 72, æquatur 6 quadratis p: 3 rebus, rei ficta æstimatio est, m: 3, & hæc est uera, unius cubi & 9 quadratorum æqualium 3 rebus & 72, Et sicut capitulum 1 cu^bi p: 72 æqualium 6 quad^tis p: 3 rebus, caret uera æstimatione, sic capitulũ 1 cubi p: 6 quadratis ęqualiũ 3 rebus p: 72, caret ficta at ubi capitulũ cubi & numeri ęqualium quadratis & rebus habet ueram ęstimationem, habebit duplicem, et unam fictam, correspondentes duabus fictis, et uni uerę alterius capituli. Exemplũ, cubus p: 4 ęqualis sit 3 quad^tis p: 5 rebus, tunc uerę ęstimationes sunt 4, uel ℞ 1 1/4 m: 1/2, ficta uero est, ℞ 1 1/4 p: 1/2 m: & hęc est uera æstimatio capituli cubi & 3, quadratorum æqualium 5 rebus & 4 numero, & reliquæ duæ, scilicet 4 & ℞ 1 1/4 m: 1/2 sunt m: in eodem casu & fictæ.

Est etiam manifestũ, quod si q̃d' quadrata & res & numerus com- 16
parentur, regula septima in eis ad unguem locum habebit, sicut in quadrato rebus & numero, conferendo capitula capitulis, eadem ratio in reliquis deriuatiuis:

DEMONSTRATIO.

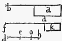
13 Etiam oportunũ est, ut ostendamus hæc demonstratione, quod etiam in toto hoc libro facturi sumus, ut rebus tam admirabilibus, ultra experientiam, fidei ratio accedat. Sit igitur gratia exempli, a b cubus, cũ b c numero equalis d e quad^{tis} cum e f rebus, & sit h æstimatio uera, quia igĩ ex supposito,



a c æquatur d f, fiat d g æqualis a b, quia igitur d e superat a b, in g e, & b c est æqualis g f, ex communi animi sententia, erit b c, maior f e in g e, & qualis excessus d e super a b, talis b c, super e f. Ponatur igitur h minus, & ficta æquatio, erit igitur a b & e f, m: sed d e, & b c, remanent p: quia igitur differentia a b & d e, est g e, & differentia b c & e f, est etiam g e, & tantum est detrahere a b ex d e, & e f ex b c, quantum addere eas tanquam m: sequiĩ quod posita æstimatione positionis, m: h, quod a b, cum d e æquaĩ b c cum e f, utrumq; enim aggregatum est residuum g e, igitur cubus cum quadratis, æquatur rebus & numero eodem modo, & rei æstimatio est m: h, quantum scilicet in alia æquatione fuit idem in alijs.

Sequitur etiã, quod aggregatũ partium in uno, est æquale differentiæ mutuæ in reliquo: uelut si dicam, cubus & 10 æquanĩ 6 quadratis & 8 rebus, & æstimatio in hoc capitulo sit uera, erit in capitulo cubi & 6 q̃dratorũ equaliũ 8 rebus & 10 numero in ficta ęstimatione, aggregatũ ex cubo & 6 censibus, ęquale differentię cubi & 6 censuũ in uera æstimatione, uel 10 & 8 rerũ in eadẽ uera æstimatione, & tantũ erit aggregatum 8 rerum & numeri in ficta æquatione.

14 Et cum fuerint numerus & extrema denominatio ęqualia, medię aut medijs duabus, aut quotquot habebit capitulũ duas ęstimationes. nam cũ sub aliquo numero mediæ possint excedere extremas, ut 100 quad. 1 cu. p̃ sit a b rei ęstimatio. Cum igitur contingat ęqualẽ fieri 1 cubi centum quadratis diminuta ęstimatione & stante numero ut fit a c, uel aucto cubo, & sic augebiĩ æstimatio, ut fit a d. igitur 100 quo ad æqualia 1 cu. p̃ 1 habent duas æstimationes. Et pariter si fuerint denominationes medię plures, etiam si centum forẽt, quia subeunt rationẽ unius, quoniam æstimatione mutata omnes pariter denominationes mediæ augent aut minuuntur. Sed si extremæ denominationes inuicem ęquales sint cum medijs alternatis, ut cubus & res sint æquales quadratis & numero, dico quòd poterũt esse tres æstimationes. Sic enim a nume-



rus

rus cum b numero quadratorum, æqualis, cum res est de cubo k & numero rerũ f. Et ponatur f magna, igitur posita d e parua poterit consistere æquatio, quia quadrata & cubus minora reddunt ob de paruitatem: At si quadrata exuperent cubum, & res iuxta ea quæ dicta sunt, habebunt ęquationes duas, uel aucta propter cubi magnitudinem, uel diminuta ob incrementum rerum igitur erunt tres.

De numero omnium capitulorum. CAP. II.



AT capitula, quæ generaliter scire conuenit, usq; ad solidũ 1
extendũtur cubum, simplicia uero, quoniam unius sunt generis, in unũ contraximus, quanquã ipsum usq; in infinitum extendatur. Quæ uerò cum numero quadratũ & positionẽ habent, tria sunt, & quamuis duas sortiatur æstimationes unum eorum, quia tamen simul illæ coniunctæ sunt, tria tantum dicemus esse capitula. At uerò cubi & rerũ & numeri tria, uerùm cum unum illorum duas habeat æquationes, in quatuor euadunt, totidem fiunt ex cubo quadratis & numero, iam igitur duodecim. At cubi quadratorum positionũ ae numeri, septem, in eorum aũt quatuor geminæ æquationes, quare undecim fient capitula omnia, igitur prima & generalia uiginti tria, horũ primo prætermisso, quod libet deriuatiua duo sibi iungit, alterum quadrati, alterũ cubi ratione, erũt igitur generalia deriuatiua quadraginta quatuor. Post hæc duo alia sunt ignotæ quantitatis, alterũ cum multiplicatur, alterum cum per se sumitur. est præterea unũ generale mediorum. omnium igitur primorum notabilium numerus uiginti sex, deriuatiuorum quadragintaquatuor, omnium collectio septuaginta. Post hæc autem plura alia etiam singularia adiecimus, sed eorum maior uoluptas quàm necessitas, ea igitur non inter hæc numerabimus.

Horum aũt necessitas sic colligitur, cum lineæ superficiebus, aut 2
superficies lineis cognoscuntur, quadratorum, positionũ, ac numeri capitula oportuna sunt, at si ex latere Tetragonico aut Solido, capitulum simplex, cum uero trium ignota duo supponuntur, eaq; ad superficies ae lineas pertinẽt, quantitatis ignotæ, & rei, capitula exploranda erunt, atq; ea simpliciter, si lineæ lineis comparantur, producta uero, cum superficiebus, at si lineis corpora comparãda, cubi rerum & numeri, si corporibus, superficies cubi quadratorũ & numeri, sin autem superficierum & corporum & linearũ ratio sit quærenda, capitula cubi quadratorum positionum & numeri sunt utiliora. Porrò in his omnibus ad numerum semper comparatio fiet. Hæc ratio præcipua est, quanquàm persępe omnibus in unoquoq; horum uti necessarium sit, operæprecium tamen fuerit, singula hæc describere, deriuatiuaq; suis adiungere primitiuis: sunt autem hæc.

Capitula primitiua carentia deriuatiuis.

1 Numerus ęqualis rebus, uel numerus æqualis q̃dratis, uel numerus æqualis cubis, uel numerus æqualis q̃d q̃dratorum, uel numerus æqualis nomini seu relato primo, ac ita deinceps comparando numerum cuicunq; denominationi.

2 Numerus & q̃drata æqualia rebus, uel numerus & cubus æq̃lia rebus, uel numerus & cubus ęqualia quadratis, uel numerus & q̃d quadrata æqualia rebus, uel numerus & quadrati quadrata æqualia quadrato, uel numerus & q̃d quadrata ęqualia cubis, uel numerus & nomẽ primũ æq̃lia reb. aut q̃dratis aut cubis & sic absq; fine.

3 Numerus & positio, & ignota quantitas.

4 Numerus et q̃dratũ positionis, & ignota quantitas, seu numerus & q̃dratũ quãtitatis ignotę & positio, seu numerus cũ q̃drato positionis quantitatis ignotæ, seu numerus & productũ ex positione in quantitatem ignotam, cũ altera earũ, uel cum quadrato unius earũ.

Capitula primitiua.	Capitula deriuatiua.
1 Numerus ęqualis quadrato & rebus.	1 Numerus æqualis q̃d q̃d & q̃d.
	2 Numerus æqualis cu quad & cub.
2 Numerus & res æqualia quadrato.	3 Numerus & quad æquales q̃d q̃d.
	4 Numerus & cub æquales cub q̃d.
3 Numerus & q̃d æqualia rebus.	5 Numerus & q̃d q̃d ęqualia quad.
	6 Numerus & cub quad ęqualia cub.
4 Numerus æqualis cubo & rebus.	7 Numerus ęqualis quad & cub q̃d.
	8 Numerus ęqualis cub & cubo cubi.
5 Numerus & res æqualia cubis.	9 Numerus & quad ęqualia cub q̃d.
	10 Numerus & cub ęqualia cub cub.
6 Numerus & cub. æq̃l reb. æquatio prima.	11 Numerus & cub q̃d ęq̃l q̃d ęq̃o pri^a.
	12 Num. & cub cub ęq̃lia cub ęq̃o pri^a.
7 Numerus & cub æq̃alia rebus æq̃ secũda.	13 Num. & cub q̃d ęq̃lia q̃d ęq̃o secũda.
	14 Nu. & cub cub ęq̃lia cub ęq̃o secũd^a.
8 Numerus ęqualis quadrato & cubo.	15 Num. ęqualis q̃d q̃d & cub q̃drat^i.
	16 Num. ęqualis cub quad et cub cub^i.
9 Numerus & quadratũ æqualia cubo.	17 Num. & q̃d q̃d ęqualia cub q̃drati.
	18 Num. et cub quad ęqualia cub cubi.
10 Numerus & cub ęq̃lia q̃drato ęq̃ prima.	19 Num. et cub q̃d ęq̃lia q̃d q̃d ęq̃o pri^a.
	20 Nu. & cub cub ęq̃lia cub q̃d ęq̃ pri^a.
11 Numerus & cub ęq̃lia quadrato ęq̃o secũda.	21 Nu. & cub q̃d ęq̃l q̃d q̃d ęq̃o secũda.
	22 Nu. & cub cub ęq̃l cu q̃d ęq̃o secũd.
12 Numerus ęq̃lis rebus quadrato & cubo.	23 Nu. ęq̃lis q̃d & q̃d q̃d & cub quad.
	24 Nu. ęq̃lis cub & cub q̃d & cub cu.

13 Nume-

13 Numerus & res æqua-	25 Nu. & q̄d' ęq̄lia q̄d' q̄d' & cub' q̄d'.
lia quadrato & cubo.	26 Nu. & cub' ęq̄lia cub' q̄d' & cub' cu'.
14 Numerus & res & q̄d'	27 Nu. & q̄d' & q̄d' q̄d' ęq̄lia cub' q̄d'.
æqualia cubo.	28 Nu. & cub' & cub' q̄d' ęq̄lia cu' cub'.
15 Numerus & q̄d' æq̄lia	29 Nu. & q̄d' q̄d ęq̄l' q̄d' & cu' q̄d ęq̄o pa.
rebus & cub' ęq̄o prima.	30 Nu. & cu' q̄d' ęq̄l' cu' & cu' ęq̄o pri.
16 Numerus & q̄d' æq̄lia	31 Nu. & q̄d' q̄d' ęq̄l' q̄d' & cu' q̄d' ęq̄o sec.
rebus & cubo ęq̄o secūda.	32 Nu. & cu' q̄d' ęq̄l' cu' & cu' cu' ęq̄o sec.
17 Numerus & cu' ęq̄lia	33 Nu. & cu' q̄d' æqual' q̄d' q̄d' æq̄o pri.
rebus & q̄d' æq̄o prima.	34 Nu. & cu' cu' ęq̄l' cu' & cu' q̄d' ęq̄o pri.
18 Numerus & cu' æq̄lia	35 Nu. & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' & q̄d' q̄d' ęq̄o sec.
rebus & q̄d' æq̄o secunda.	36 Nu. & cu' cu' æq̄l' cu' & cu' q̄d' ęq̄o sec.
19 Numerus & res & cu'	37 Nu. & q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' q̄d' ęq̄ pri.
æqualia q̄d' æq̄o prima.	38 Nu. & cu' & cu' cu' ęq̄l' cu' q̄d' ęq̄o pri.
20 Numerus & res & cu'	39 Nu. & q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' q̄d ęq̄ sec.
æquales q̄d' æq̄o secunda.	40 Nu. & cu' & cu' cu' ęq̄l' cu' q̄d' ęq̄o sec.
21 Numerus q̄d' & cu'	41 Nu. & q̄d' q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' ęq̄o pri.
æqualia rebus ęq̄o prima.	42 Nu. & cu' q̄d' & cu' cu' ęq̄l' cu' ęq̄o pri.
22 Numerus & q̄d' & cu'	43 Nu. & q̄d' q̄d' & cu' q̄d' ęq̄l' q̄d' ęq̄ sec.
æq̄lia rebus æq̄o secunda.	44 Nu. & cu' q̄d' & cu' cu' ęq̄l' cu' ęq̄ sec.

De æquationibus capitulorum simplicium. CAP. III.



Estimatio rei, est quantitas, in qua ueritatem experimur propositorum in capitulo & quæstione. Exemplum est, cum quis dixit, feci ex 10. duas partes, & duxi earum singulas in se, & fuit productorum differentia 60. quia igitur nescimus quæ quantitas sit maior aut minor, ponemus minorē esse rem ignotam, quam uocamus positionē, erit igitur pars maior residuū ad 10, scilicet 10 m: 1 positione, tunc sequemur q̄d est propositum, et ducemus partes in se, et fiet quadratū minoris 1 q̄dratum, et maioris 1 q̄dratum p: 100 m: 20 posbus, adde quod est m: alteri parti, fiet 1 q̄dm p: 100 ex una parte, et 1 q̄dm p: 20 posbus, horū differentia fuit 60 ex supposito, addemus igitur 60 minori parti, & tunc fient æq̄les 1 q̄dm p: 100, & 1 q̄dm p: 20 posbus, p: 60, abijciemus 1 q̄dm & 60 ex utraq; parte, remanebūt igit' 20 poses ęq̄les 40, q̄a si ab æq̄libus ęq̄lia auferant', quę relinquunt' sunt ęq̄lia, diuidendo igitur 40, per 20 numerū positionū, exibit 2, ęstimatio positionis, in hoc itaq; 2, ueritatē propositæ quęstionis experimur, nam si eius quadratum quod

1 positio	1 q̄dratum.
10 m: 1 posnes	1 q̄dm p: 100 m: 20 posbus.
1 q̄dm p: 0 posbus	1 q̄dratum p: 100.
60 p: 20 positionibus æqualia 100.	
20 positiones æquales 40.	

quod est 4, ex 64 quadrato 8 residui 2 & 10 abijciatur, relinquetur 60 propositus Numerus. Est etiam uerum de 2, quod proponitur in capitulo, scilicet quod q̃dratum eius quod est 4. cum 100, æq̃tur quadrato positionis, quod est iterũ 4 & 20 pos[bis], quę sunt 40 & 60 simul iunctis, nam utroque modo colliguntur 104. dicemus igitur meritò, propter duo, quod 2 est rei æstimatio, & cum recte operatus fueris, in ęstimatione seu ęquatione, utraq; experientia succedit.

DEMONSTRATIO.

2 Vt uerò rei ueritas apertius deprehendatur, atq; cum ea ratio, scire enim est per demonstrationem, ut dicunt, intelligere, sint gratia Exempli, cubi tres æquales 24, & ponatur a c latus unius cubi, & c d alterius, & d b tertij: quia igitur cubi sunt æquales inuicem, erunt & lineę a c, c d, d b ęquales. Cum igitur secundum numerum, secundũ quem a c est in a b, qui est 3, diuiditur 24, & cuborum quãtitas fiet ex 19ª quinti uel 17ª septimi Elementorum, & 31ª. 11ⁱ eiusdem, cubus a c ęqualis 8, igitur a c latus, erit 2, æstimatio rei, ex quo colligitur generalis regula.

a c d b

REGVLA.

3 Deprime propositas duas denominationes ad numerum, si numerus non adsit, æqualiter deducendo, cunq; altera fuerit denominatio, altera numerus, diuide numerum per numerũ denominationis, exiens est æstimatio denominationis. Quæ denominatio si positio est, positionis habes æstimationem: si alia denominatio, sume latus seu radicẽ illius numeri pro denominationis qualitate, si q̃dratũ, q̃dratũ, si cubus, latus cubicũ, si q̃d q̃drati, radicẽ radicis, atq; ita deinceps, & latus illud seu radix, est positionis uera æstimatio. Exemplum, cubi 20 ęquantur 180 relatis primis. Quia igitur non est hic numerus, infimam denominationem cuborum, pones pro simplici numero, scilicet 20. & maiorem seu altiorem relatorum, per cubos deprimes, & fient 180 q̃drati, diuide igitur 20 numerum, per 180 numerum q̃dratorũ, exit $\frac{1}{9}$ ęstimatio q̃drati. Verùm nos quærimus positionis æstimationẽ, non q̃drati, sume igitur radicem q̃dratam $\frac{1}{9}$. & est $\frac{1}{3}$, pro uera æstimatione. Aliud Exemplũ, 7 quadrati æquentur 21 cub q̃drati, deprime ad numerũ æqualiter, fient 7 ęq̃lia 21 q̃d q̃drati, diuide 7 per 21. exit $\frac{1}{3}$, & R R $\frac{1}{3}$, quæ est latus q̃d q̃drati, est rei æstimatio. Aliud. 2 cubi æquentur 20 q̃d q̃drati, deductis cubis ad numerum, q̃d q̃drati peruenient ad pos[es], igitur 20 pos: æquantur 2, diuide 2 per 20. exit $\frac{1}{10}$, & quia diuisisti cum numero positionum, erit positionis æstimatio, $\frac{1}{10}$. Aliud. 20 æquantur 5 quadratis, diuide 20 per 5, exit 4, æstimatio quadrati, igitur rei æstimatio est 2.

Et

Et ut omnibus etiam capitulis futuris satisfaciam, maioris deno 4
minationis numero reliquos omnes ac numerũ diuides, maiorem
intelligo altiorẽ, & cum minore denominatione deprimes, postmo
dũ regulam capituli sequeris. Sint gratia exempli 4 cubi ęquales 12
quadratis & 8 pos^{ti}. minor denomina-
tio est positio, maioris numerus est 4,
diuides igitur omnia per 4, & habebis
1 quadratum æquale 3 pos^{ti} p:2.

4 cub.	12 q̃d^{ta} p:8 pos^{ti}.
4	
1 q̃d.	3 pos^{ti} p:2.

Ex his etiam patet, quod simplex positio, longè magis patet fal-
sis positionibus. Nam et ad quadrata, et ad cubos, et reliquas exten
ditur denominationes, ideoq; æstimationes habet in radicibus,
quarum in falsa positione nullus omnino est usus. Quod uerò per-
tinet ad numerum positionibus ęqualem, adhuc utraq; falsa positi-
one generalius est, ut in primo Exemplo patuit, nulla enim falsa po-
sitione licet uenari, quænam partes decem quadrata ueriant, quo-
rum differentia sit 60, ut ibi propositum est.

De subiectis æquationibus generalibus & singularibus. CAP. IIII.

Ingulares dicuntur æquationes, in quibus nullum capi- 1
tulum perfectè potest absolui, & tales sunt numerus in-
teger, uel fractus, latus etiam omne numeri, seu quadra-
tum seu cubicum uel alterius generis, atq; ut ita dicam,
omnis simplex quantitas: item constantes ex duabus radicibus
omnes, quarũ altera sit quadrata, uel R. R.: & generaliter radix par,
unde quæ ex duobus constant nominibus, & apotome seu ut di-
cunt recisa tertij ac sexti generis, non apta sunt ęquationi generali.

Omne etiam capitulum, quod ex numero quadrato, cubo, & po 2
sitionibus constat, eas habet generales æquationes, quæ ex capi-
tulo, ad quod deducuntur, deriuatæ sunt, addita uel detracta ter-
tia quadratorum numeri parte, ut suo loco ostendetur.

Generales autem æstimationes, sunt in capitulis quadrati ęqua- 3
lis rebus & numero, secundi generis, constans ex nominibus duo-
bus, ut R. 19 p:3, capituli autem quadrati & rerum æqualium nu-
mero, secunda apotome, ut R. 19 m:3, capituli autem quadratorum
& numeri æqualium rebus, apotome, & constans ex duobus no-
minibus primi generis, ut 3 p:R. 2, & 3 m:R. 2. Vbi aũt primũ genus
dico, quartum etiam intelligo, sic & ubi secundum, etiam quintum,
tam in apotome quàm in ea quæ ex duobus nominibus constat.

At unius radicis uniuersalis æquatio, deriuatiuis conuenit capi- 4
tulis, seu cubica seu quadrata, hisq; quorum principalibus quadra-
tum aut cubus radicis pro ęquatione fuerat, uelut si quadrato equa

li rebus & numero æstimatio hæc conueniebat, ℞ 19 p: 3, capitulo cubi quadrati æqualis cubis & numero sub eadē quantitate, æquatio erit, ℞ v: cubica ℞ 19 p: 3.

5 Et sicut radix quadrata, nulli præterquam numero iungi potest, ut æquationem efficiat generalem, sic è diuerso, cubica cubicæ iuncta, efficere potest, numero non potest. Cum igitur iungitur cubi æqualis rebus & numero, æquationem producit, non integram tamen, at detractæ inuicem, efficiunt æquationem capituli cubi & rerum æqualium numero, uelut ℞ cubica 4 p: ℞ cubica 2, est æquatio capituli, cubi ęqualis rebus & numero, & ℞ cubica 4 m: ℞ cubica 2, est æquatio capituli cubi & rerum æqualium numero.

6 At capitulum cubi ęqualis quadratis & numero habet ęquationem quę constat ex tribus quantitatibus in continua proportione, quarum duę extremę sunt radicis cubicę, media est numerus, ut ℞ cubica 16 p: 2 p: ℞ cubica 4. sed capitulum cubi & quadratorum æqualium numero, habet similem in omnibus præcedenti æquationem, excepto quòd numerus est m: uelut ℞ cubica 16 m: 2 p: ℞ cubica 4.

7 Illud etiam intelligendum est, radices simplices pro generalibus æquationibus haberi, ut tamen etiam simplicia sint capitula, uelut ℞ cubica inseruit, capitulo numeri æqualis cubo: & quadrata, numeri ęqualis q̄drato, & relata, capitulo relati æqualis numero: & sicut hę simplices compositis capitulis conuenire nequeūt, sic nec ullum compositum ex pluribus radicibus incommensi capitulo simplici potest conuenire.

Ostendit æstimationem capitulorum compositorum minorum, quæ sunt quadratorum, numeri, & rerum. CAP. V.

DEMONSTRATIO.



It quadratum f d & 6 res (gratia exempli) ęquale 91, tunc producam d b & d g quæ sint 3, dimidum 6, numeri rerum, & complebo quadratum d g b c, indeq; productis c g & c b perficiam quadratum a f e c, prout in quarta secundi Elementorum, quia igitur d b ducta in a b ex diffinitione secundi elementorum producit a d, & ex numero quolibet in rei æstimationem producitur æstimatio illarum rerum uelut si res est 4, & sint quinq; res, erunt quinq; res 20, & tantū produ

citur

citur ex 4 æstimatione rei in 5 numerum rerum ut ostendimus in capitulo tertio, igitur cum b d sit 3, & a b æstimatio rei, erit superficies a d tribus rebus æqualis, seu æstimatio trium rerum, at superficies d e æqualis est a d, per 43 primi Elementorum. igitur & ipsa est æstimatio trium aliarum rerum, duæ igitur superficies, a d & d e, sunt æquales 6 rebus, quæ re ipsæ cum quadrato f d sunt 91, at quadratum, c d est 9, quia b d est 3, igitur a c quadratum est 100. quare latus eius a c est 10, cum igitur b c sit 3, detracta b c ex a c, relinquit a b latus d e 7.



ALIA DEMONSTRATIO.

Sit modo a b numerus rerum quarundam æqualium, c numero & quadrato d, & faciam quadratum b g dimidij a b, quod sit g e, à quo auferam c numerum, ut e f superficies æqualis sit numero c, & ponam latus quadratum, f b superficiei, quod sit g h, dico utranque lineam b h & h a esse latus quadrati d, unde sequitur duas fore ueras æstimationes huius capituli, quarum aggregatū est æquale numero rerum, uidelicet a b, constat enim quod rectangulum ex a h in h b, una cum quadrato h g est æquale quadrato b g, per 5. 2 Elementorum. quadratum autem h g æquale fuit f b superficiei, rectangulum igitur ex a h in h b, æquale est e f, quare & c numero: quod autem fit ex a b in h b, ex 3ª 2ª elementorum, æquale est quadrato h b & rectangulo. a h in h b, igitur quod fit ex numero rerum a b in æstimationem rei quæ est h b, æquale est numero c, & quadrato h b; quod fuit probandum. Et similiter eadem ratione rectangulum ex a b in a h, æquale est quadrato a h, & ducti a h in h b, sed ex a h in h b, ut probatum est, fit c numerus, igitur rectangulum ex a b in a h, scilicet ex numero rerum in rerum æstimationem, æquatur quadrato rei & numero proposito. 2



Ex hoc patet, quod illi falluntur qui dicunt (quod si b h, gratia exempli) sit æstimatio rei, & g f 3, quod rectangulum ex b h in g f erit 3 g h seu triplū g h, hoc enim esse nō potest, scilicet quod superficies contineat lineam aliquā, neq; numero, nec alia proportione, cū infinitę lineæ possint esse in superficie, quantitas enim continua nullum suę diuisionis recipit terminū, sed ueritas est, quod si g f contineat tres monades (gratia exēpli) id est partes tres lineę b h, diuisę

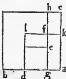
 in

in tot partes, quot monades sunt in numero quem dicitur continere, veluti quod b h ponatur 12, erit g f 3, ubi g f sit quarta pars b h, & tunc uerum est, quod ex b h in g f fit superficies continens 36 superficies quadratas, quarum uniuscuiusque tetragonicum latus est unitas, id est, una ex partibus illis, secundum quas b h est diuisa in 12, & g f in 3, hoc autem tam in rhetis quam alogis pulchrè ostendit Plato in Memnone.

Nec admireris, hanc secundam demonstrationem, aliter quam à Mahumete, explicatam, nam ille immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius, nec nisi unam partem, cumque pluribus, unde nos facilitati & breuitati consulentes, tum ut utrique æstimationi una demonstratione satis faceremus, hac utimur.

Alia Demonstratio.

3 Sit modo quadratum a c in tertia figura, æquale 6 rebus & 16 numero, & ponatur a d numerus rerum, scilicet 6, igitur superficies a h est 6 positiones, quare d c residuum erit præcise 16, diuidatur a d per æqualia in g, & fiant quadrata g b & g d, quæ sint g k & g e. Quia igitur b c æqualis est b a, & b k æqualis b g, erit k c æqualis g a, quare etiam g d & f l, & quia d e & d g sunt æquales, item d f & b g, erit f e æqualis d b, quare etiam æqualis f k, duæ igitur lineæ f k & f h, æquales sunt f l & f e, & anguli a d f recti, igitur f c superficies æqualis est l e, sed f c cum f b fuit 16, igitur l e cum f b fuit 16, addito quadrato g e quod est 9, nam g d fuit 3, erit g k quadratum 25, igitur latus g b 5, addita igitur g a, quæ est 3, fiet a b tota 8, rei æstimatio.



4 Secundum hec formabimus regulas tres, pro quarum memoria subiungemus carmen hoc,

Querna, da bis. Nuquer, admi. Requan, Minue dami.

Regula I.

Est autem unicuique horum capitulorum commune, ut dimidium numeri rerum in se ducatur. Quando igitur quadratum æquatur rebus & numero, quod significatur per Querna siue primam tantum intelligas literam seu adnumeres sequentes à prima uocali consonantes, ut Querna, quadratum æquale rebus & numero significet, & Nuquer, Numerum quadrato ac rebus æqualem, & Requan, res quadrato & numero æquales, In hoc Querna igitur, seu

seu capitulo quadrati æqualis rebus & numero addes quadrato dimidij rerum numerum æquationis, & totius accipe radicem, quadratam, cui adde dimidium numeri rerum, & aggregatum est rei æstimatio. Exemplum. sit 1 quadratum æquale 10 rebus p: 144, duc 5 in se fit 25 quadratum dimidij rerum, adde 144 fit 169, cuius R est 13, huic adde 5 dimidium numeri rerum, fit 18, æstimatio rei. Rursus sit 1 quadratum æquale $\frac{2}{3}$ rei p: 11, duc $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum in se, fit $\frac{1}{9}$, adde ei 11, fit $11\frac{1}{9}$, accipe R quæ est $3\frac{1}{3}$, cui adde $\frac{1}{3}$ dimidium numeri rerum, fit $3\frac{2}{3}$, rei æstimatio. Rursus, sit 1 quadratum æquale 10 rebus p: 6, duc 5 in se dimidium numeri rerum, fit 25, adde ei 6 fit 31, huius R adde 5, dimidium numeri rerum erit rei æstimatio, R 31 p: 5. Rursus sit 1 quadratum æquale rebus R 12 p: 22, duc R 3 in se fit 3, quadratum dimidij numeri rerum, adde ei 22 fit 25, huius R est 5, cui adde R 3, quod est dimidium numeri rerum, fiet rei æstimatio 5 p: R 3, & si in hoc casu numerus fuisset 20, esset rei æstimatio R 23 p: R 3, & si fuisset numerus 9, esset æstimatio rei R 12 p: R 3, quod est dicere, R 27, & si fuisset 1 quadratum æquale rebus R 12 p: R cub. 10 numeri, duc ut prius R 3, dimidium numeri rerum in se, fit 3. adde ei R cub. 10, fit 3 p: R cub. 10, huius accipe radicem, quę est R v: 3 p: R cub. 10, cui adde dimidium numeri rerum & fiet æstimati rei R 3 p: R v: 3 p: R cub. 10. & hac uarietate exemplorum hic usi sumus, ut in reliquis idem fieri posse intelligas, tum etiam eadem in duabus sequentibus regulis experire, quando quidem nos duplici exemplo contenti erimus. Manifestum est igitur, quod hic bis addimus, scilicet numerum quadrato dimidij rerum, & dimidium rerum radici aggregati, & hoc est, quod in carmine diximus, da, bis, quasi, bis iunge.

REGULA II.

Si autem numerus quadrato & rebus æqualis fit, quadrato dimidij numeri rerum adijcies numerum æquationis, & totius, aggregati accipe radicem, à qua minue dimidium numeri rerum, & residuum est rei æstimatio. Exemplum, 144, æquatur 10 rebus & 1 quadrato, duc 5, dimidium 10 numeri rerum, in se, fit 25, huic adde 144 fit 169, huius R est 13, à qua abijce 5, dimidium numeri rerum, relinquetur rei æstimatio 8. Rursus, sit 6 æqualis 10 rebus p: 1 quadrato, ducto 5 dimidio rerum in se fit 25, adde 6 fit 31, ex huius radice abijce 5, dimidium numeri rerum, fit R 31 m: 5, æquatio.

Ex hoc patet, quod hæc regula à præcedenti solum differt, quod minuat dimidium numeri reru. Ab aggregati radice, ubi illa iungebat, & hoc est, quod in carmine diximus. Adimi, quasi, adde primo, Cor.

 deinde

deinde minue, scilicet adde numerum quadrato, & minue dimidium numeri rerum positum odum ab aggregati radice.

Cor. Ex quo patet quòd differentia æstimationis quadrati, equalis rebus & numero, & numeri æqualis rebus & quadrato, est numerus rerum ad unguem, ubi in eisdem rebus & numeris statuantur, uelut æstimatio quadrati æqualis 10 rebus p:144 est 18, & æstimatio 144 æqualis quadrato & 10 rebus est 8, & differentia 18 & 8 est 10.

REGVLA III.

6 Si uerò res æquales sint quadratis & numero, ducto, ut prius, dimidio numeri rerum in se, & ab eo detracto numero æquationis, radicem residui minue ex dimidio numeri rerum, aut adde, & tam aggregatum quã residuum est rei æstimatio. Exemplum. 1 quadratum p: 16, æquatur 10 rebus, ducto 5 in se fit 25, ut prius, deinde minue 16 ex 25 relinquitur 9, cuius ℞ quæ est 3, addita uel detracta à 5 dimidio numeri rerum, ostendit rei æstimationes, 8 addita, & 2 detracta, si igitur 10 res sumantur quæ sint 2 erunt 20, & tantum erit quadratum 2 cum 16, item si sumantur 10 res quæ sint 8, erunt 80, & tantum est quadratum 8, addito ei 16. Rursus si dicam, 10 res, æquantur 1 quadrato p: 6, ducto 5 dimidio numeri rerum in se, fit 25, detracto autem 6 relinquitur 19, cuius ℞ addita uel detracta ex 5, ostendit rei æstimationes, maiorem quidem 5 p: ℞ 10 minorem uero 5 m: ℞ 19.

Notandum. Quod si detractio ipsa numeri, à quadrato dimidij numeri rerum fieri nequit, questio ipsa est falsa, nec esse potest quod proponitur, semper autem pro regula generali in hoc tractatu toto est obseruandum, quòd cum ea quæ præcipiuntur fieri non possunt, nec illud quod proponebatur fuit, nec esse potuit. Nunc autem subiungemus aliquas quæstiones, duas ex Mahumete, reliquas nostras ex omnibus his, quæ nec multiplici positione, nec propria utuntur regula, difficiliimas.

QVAESTIO I.

Quest. I. Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atque insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaque quadratum numeri incogniti quem quæris, esse 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m: 4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ quadrati p: 16 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ q̃dti p: 4 m: 3 $\frac{1}{3}$ rebus redde quod est minus, alteri parti, pro uniuersali regula, erũt res 4 $\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ q̃drati p: 4, quare per quartam regulam tertij capituli, diuisi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum q̃drati, & fient res 24 $\frac{24}{25}$ æquales 23 $\frac{1}{25}$ p: q̃drato, quare per tertiam regulã, du

ces

ces $12\frac{12}{25}$ in ſe, fiet $155\frac{469}{625}$. minue $23\frac{1}{25}$ fient $132\frac{544}{625}$, huius R: eſt $11\frac{13}{25}$, quam adde ad $12\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet ęſtimatio rei quęſita 24, ſcilicet quadrati cuius radix, eſt numerus ille qui quæritur. Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in poſitione rei pro primo numero, fuiſſet quadratum eius operationis fundamentum, & perueniſſes ad 1 quad. q̄dm p: $23\frac{1}{25}$ æqualia $24\frac{24}{25}$ quadrato, quare hæc ſit tibi pro exemplo, nunc ſequamur ſecundam illius.

QVAESTIO II.

Fuerunt duo duces quorũ unusquiſq; diuiſit militibus ſuis aureos 48. Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus ſingulis militibus daret, quæritur quod unicuiq; milites fuerint? Pone numerum militum minorem 1 rem, maior erit 1 poſ. p: 2, quia igitur ſumma diſtribuenda ęqualis fuit, manifeſtum eſt, quòd quantitates erunt proportione ſimiles; eſt autẽ 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 poſm p: 2, fit $\frac{1}{12}$ poſ. p: $\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorũ hominum, fit $\frac{1}{12}$ quadrati p: $\frac{1}{6}$ poſn, duc uero omnia ad 1 q̄dm, fiet 1 q̄d. p: 2 poſ., ęqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & eſt $\frac{1}{2}$, duc in ſe, fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius R: minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro ſingulo, alijs 8 pro ſingulo. multiplicatio autem illa, quando reducitur quadrati pars ad integrum fit per exceſſum hominum, ſcilicet 12 per 2. Et cauſa in hoc eſt, quòd proportio differentiæ ſecundæ ad primam, eſt ut aggregati quod diuidi debet ad productum ex numero hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, eſt uelut 4 differentiæ aureorum ad 2 differentiam hominum, & per hanc docuit modum operandi in quæſtionibus proportionum, & pręcipuè quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabſurdum eſſet intelligere medium hominem, nedũ quantitatem aliquam alogam ſeu latus. Queſt. ſecunda.

QVAESTIO III.

Nunc autem proponamus quæſtiones noſtras, quarũ prima eſt ſimilis pręcedenti. Duæ ſocietates hominũ, quarũ una continebat 3 homines pluſq; altera, diuiſerũt ęquales aureorum numeros, qui erant 93 plus numero hominum ipſorum utriuſq; ſocietatis ſimul iunctorum, & pro ſingulis hominibus ſocietatis minoris, cõtigerũt aurei 6 plus, quàm hominibus ſingulis maioris ſocietatis. Pones numerũ primę ſocietatis rem unam, habebit igitur ſecunda ſocietas rem & 3 p: quare ſumma aureorum, quę eſt 93 p: utraq; ſocietate, eſt Queſt. tertia.

96 p:

1 pos.
1 pos. p: 3.
93

2 pos. p: 96
6 — 3
1 pos. p: 48
1 q̄d. p: 3 pos.

1 q̄d. p: 2 pos. æq̄. 48

96 p: duabus rebus, proportio autem excessus aureorũ 6 qui contingunt societati minori, ad excessum hominũ, scilicet ad 3, est ut summæ aureorum, ad productum ex numero hominum primæ societatis, in numerum hominum secundæ societatis, proportio autem 6 ad 3, dupla est, igitur proportio 2 pos^{um} p: 69 ad 1 q̄d^{m} p: 3 pos^{ib9} productum ex 1 pos^{ne} in 1 pos^{em} p: 3, est dupla, igitur dimidium 2 pos^{um} p: 96, quod est ℞: pos^{o} p: 48, æquale est, 1 q̄d^{to} p: 3 pos^{ib9}, abiecta itaq; 1 pos^{ne} ex utraque parte, fiet 1 q̄d^{m} p: 2 pos^{ib9} æquale 48, ducito dimidium 2 in se, fit 1, nam dimidium 2 est 1, huic adde 48, fit 49, huius radix est 7, à qua minue 1 dimidium numeri pos^{um}, habebis æstimationem pos^{is}, & numerum primæ societatis 6, ideo numerus hominum secundæ societatis, est 3, p: scilicet, horum si fiat collectio, addanturq; insuper 93, fiet numerus aureorum 108, primis igitur aurei 18, secundis 12, per capita contigere. Aliter & facilius expertis in operationibus positio fiat ut prius, eritq; summa aureorum 2 pos^{es} p: 96. diuide per positionem & positionem p: 3, habebis $\frac{2\ pos.\ p:96}{1\ pos.}$ æqualē 6 p: $\frac{2\ pos.\ p:96}{1\ pos.\ p:3}$ igitur detracto $\frac{2\ pos.\ p:96}{1\ pos.\ p:3}$ ex $\frac{2\ pos.\ p:96}{1\ pos.}$ relinquitur 6, at ex tali detractione fit $\frac{6\ pos.\ p:288}{1\ quad\ p:3\ pos.}$ igitur hoc est æquale 6. diuisis igitur 6 pos^{ib9} p: 288. per 6, exibit 1 q̄d^{m} p: 3 pos^{ib9}, nam si diuiso 10 per 2 exit 5, diuiso 10 per 5 exibit 2, igitur diuisis 6 pos. p: 288. per 6, exit 1 positio p: 48, & hæc æqualia sunt 1 quadrato p: 3 positionibus, quare ut prius, res ualet 6.

QVÆSTIO IIII.

Quæst. 4. Est numerus, cui si addant̃ duę radices, aggregato uero iterũ addantur duæ radices ipsius aggregati, fiet totum 10, tunc dices, 10 æqualis est secundo numero & duabus eius radicibus, ponemus igit̃ numerũ aggregatum secundum, 1 q̄d^{m}, & hic, cũ duabus radicibus, æqualis est 10, igit̃ rei ęstimatio per secundã regulã, est ℞ 11 m: 1, igit̃ abijce duplũ huius ex 10, relinquetur aggregatum 12 m: ℞ 44, hoc autem ex supposito constat ex q̄drato & duabus radicibus, igitur 1 q̄d^{m} p: 2 pos^{ib9} æquatur 12 m: ℞ 44, ducito 1, dimidium numeri rerum in se, fit 1, adde ei numerum fit 13 m: ℞ 44, accipe radicem, & ex ea minue 1 dimidium numeri rerum, habebis ℞ v: 13 m: ℞ 44 m: 1, hanc igitur duplicatam, si detraxeris ex aggregato, relinquetur numerus primus propositus, 14 m: ℞ 44 m: ℞ v: 52 m: ℞ 704, & ita posses

posses regrediendo quãtumlibet procedere, ab ultimo semper inchoando termino. Prolixior autem ero hic in exemplis, quoniam hæc capitula mercaturæ maximè conueniunt, tum quia tyrones in his introducuntur, uelut & paruos pueros solent magistri diligentius minuta quæque docere, tum uerò quòd eadem in reliquis postmodum fabricare possumus.

14 m: ℞ 44 m: ℞ v: 52 m: ℞ 704
duc radices eius ℞ v: 52 m: ℞ 704 m: 2

aggregatum 12 m: ℞ 44
duc rabices huius ℞ 44 m: 2

aggregatum 10

QVAESTIO V.

Inuenias numerum, à quo detracta ℞ cubica, & residuo addita sua quadrata radice, perficiatur primus numerus. Pones itaque residuum illud à quo detraxisti radicem cubicam esse 1 quadratum, addemus itaque ei radicem quadratam & fiet 1 quadratum p: 1 pos^{ne}, & hoc æquale est 1 cubo, nam ex eo quod addito ad 1 quadratum tantum fit quantum erat prius, igitur quod additur æquale est ei quod minuitur, minuitur autem ℞ cubica totius quantitatis, igitur pos^{o} est radix cubica aggregati, quare agregatum est cubus, & hic æqualis est 1 quadrato p: 1 pos. deprime per 1 pos. habebis 1 q̃d^{m} equale 1 pos. p: 1, positio igitur est ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, at numerus primus fuit cubus positionis, igitur primus numerus est ℞ 5 p: 2. Quæst. quinta.

cubus ℞ 5 p: 2
q̃d^{m} 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
pos. ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$

QVAESTIO VI.

Quidam ter iuit ad nundinas, in primo itinere retulit duplum eius quod attulerat, in secundo cum detulisset tale duplum secum, rediit cum eisdem pecuniis, & radice earum & duobus aureis plus, hoc totum autem seruauit, rediitque cum eo ad nundinas tertiò, & superlucratus est tantum, quantum esset illud quod produceretur ex pecuniis quas secũ attulerat in se ductis, ac etiam quatuor aureos plus, reuersus est autem cum 310 aureis, quero igitur, quantum attulit secum pecuniarum, in primo itinere? Dices retulit aureos 310 & hoc fuit æquale pecuniis secundi itineris & quadrato earum & 4 p: igitur pecuniæ quas attulit secum in 3° itinere, quadratum æquatur 306 aureis, abiecto communiter numero 4, ponemus igitur pecunias quas secum attulit 1 pos^{em}, et habebimus 1 q̃d^{m} p: 1 pos^{ne} equale 306, igitur ex secunda regula, res ualet ℞ 306 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, quod est dicere 17 & tot aureos detulit secum tertio itinere, & tot habuerat in secundo itinere quos seruauerat, dictum est autem, quòd in secundo itinere lucratus est radicem eorum quos attulerat & 2 p: & retulit 17, igitur si lucratus fuisset radicem tantum, retulisset 15, igitur posi- Quæst. sexta.

tis pecunijs quas secū attulit 1 q̄dratum, habebimus 1 q̄dratum p: 1 pos. æqualia 15, igitᵗ ex secunda regula, res ualet R̷ 15 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & hoc est q̄d lucratus est in secundo itinere, & cum hoc etiam lucratus est aureos 2, lucrum igitur totum fuit eius itineris R̷ 15 $\frac{1}{4}$ p: 1 $\frac{1}{2}$, ipse autem retulit domum aureos 17, igitur iuit cum aureis 15 $\frac{1}{2}$ m: R̷ 15 $\frac{1}{4}$, hæ pecuniæ sunt quas in primo itinere seruauerat, & fuerant duplum eius quod attulerat, primo igitur itinere attulit ad nundinas dimidium 15 $\frac{1}{2}$ m: R̷ 15 $\frac{1}{4}$ aureorum, quod est 7 $\frac{3}{4}$ m: R̷ 3 $\frac{13}{16}$ aureorum.

QVAESTIO VII.

Quæst. 7 Quidam rex proconsuli ducenti exercitum aureos misit 128000, ut 7000 equitum & 7000 peditum conduceret, ea erat stipendij ratio, ut pro singulis 100 aureis, semper 18 pedites plusquam equites conduceret, uenit tribunus quidam militum ad proconsulem cum 1700 peditibus & 200 equitibus, quæritur stipendij ratio. Hæc tertiæ quæstioni affinis est, considera quòd 128000, sunt 1280 centena, quia dictum est quod pro singulis centum aureis differentia numeri peditum à numero equitum sit 18, diuide igitur 1280 in duas partes, quarum una ducta per unam quantitatem producat 7000, & similiter reliqua ducta per eandem quantitatem p: 18, producat etiam 7000, igitur posita quantitate equitum pro re, erit quantitas peditum res & 18 p: diuisis igitur 7000 per harum singulas, prouenient aggregata 1280, nam si ex partibus 1280 ductis in rē, & rem p: 18, fiunt 7000 & 7000, igitur diuisis 7000 per rem, & 7000 per rem p: 18, exeuntia iuncta facient 1280, ex talium igitur diuisione aggregantur $\frac{\text{pos. } 14000 \text{ p: } 126000}{1 \text{ quad. p: } 18 \text{ pos.}}$ & hoc cum sit æquale 1280, igitur diuiso numeratore per 1280, exit 1 q̄dᵐ p: 18 pos. facta igitur tali diuisione, prodit 10 $\frac{15}{16}$ pos.ᵇᵍ p: 98 $\frac{7}{16}$, hocque est æquale 1 quadrato p: 18 pos.ᵇᵍ igitur 1 q̄d. p: 7 $\frac{1}{16}$ pos.ᵇᵍ æquatur 98 $\frac{7}{16}$, igitur res ualet R̷ 110 $\frac{929}{1024}$ m: 3 $\frac{17}{32}$, sed R̷ 110 $\frac{929}{1024}$ est 10 $\frac{17}{32}$, igitur detractis 3 $\frac{17}{32}$, relinquetur rei æstimatio 7, & tot equites 100 aureis conducet, & pedites 25, igitur pro 1700 peditibus stipendium debuit esse 6800 aurei, & pro 200 equitibus aurei 2857 $\frac{1}{7}$.

$\frac{7000}{1 \text{ pos.}}$ $\frac{7000}{1 \text{ pos. p: } 18}$

pos. 14000 p: 126000

1 quad. p: 18 pos.

pos. 14000 p: 126000

1280

pos. 10 $\frac{15}{16}$ p: 98 $\frac{7}{16}$

1 quad. p: 18 pos.

1 q̄d. p: 7 $\frac{1}{16}$ position: æqualia 98 $\frac{7}{16}$

QVAESTIO VIII.

Quæst. 8 Fac de 20, tres quantitates analogas, quarum secunda æqualis sit radicibus primæ & tertiæ simul iunctis, pone secundam esse positionem, reliquum erit 20 m: 1 posᵉ, quia igitur ex hoc facere oportet

partes

partes duas, inter quas positio cadat proportione media, eritq́ ut ex una in aliam fiat quadratum posis, quare per 16 6i Elementorum Ex 5i 2 Elementorum uel Reg: 6i libri, ducemus dimidium 20 m: 1 posne in se, & fiet 100 m: 10 posb9 p: $\frac{1}{4}$ quadrati, à quo auferemus quadratum positionis, & fiet 100 m: 10 posb9 m: $\frac{3}{4}$ quadrati, huius radicem adde, & minue à medietate 20 p: 1 posne, & habebis partes

10 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.
10 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 100 m: 10 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̃d.

20 m: 1 pos. aggregatum quan.
100 m: 10 pos. p: $\frac{1}{4}$ quad. m: 100 p: 10 pos.
p: $\frac{3}{4}$ quad. productum quan.
æquiualens 1 quad.
producti radix 1 pos.
duplum radicis 2 pos.
aggregatum ex quantitatibus & ꝑducto 20 p: 1 pos. cuius radix est æqualis positioni.

quas uides, ut igitur iungas radices uniuersales harum, fac ut in 3° libro te docui, iunge primo quãtitates & habebis 20 m: 1 posem, deinde multiplica quantitates ipsas inuicem, & iunge cum aggregato quãtitatum earum duplum, & fit totum 20 p: posne, huius radix æquatur 1 posni, igitur 1 q̃d. æquatur 20 p: 1 posne, quare per primam regulam ducemus $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum in se, & fit $\frac{1}{4}$, adde ad 20, fit 20 $\frac{1}{4}$, accipe radicem quæ est 4 $\frac{1}{2}$, & ei adde $\frac{1}{2}$ dimidium numeri rerum fit 5, rei æstimatio, quantitas scilicet media, quare faciemus ex residuo ad 20, duas partes inter quas cadat 5, & erunt alia positione instaurata, uel per regulas sexti libri, 7 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 31 $\frac{1}{4}$ & 7 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 31 $\frac{1}{4}$, harum radices simul iunctæ sunt 5.

Qvaestio IX.

Fac de 10 duas partes, quarum maior, detractis duabus suis radicibus, æqualis sit minori, additis duabus suis radicibus, constat igitur quòd differentia maioris & minoris est, duæ radices maioris, & duæ minoris, ponatur igitur differentia hæc radix 4 posum, & ponatur pars una 5 p: ℞ 1 posis, & alia 5 m: ℞ 1 posis, & sumat aggregatum, radicum harum partium, & est ex libro quarto, ℞ tota (quam uniuersalissimam appellare solent) 10 p: ℞ v: 100 m: 4 posb9, & hoc æquatur duplicatum ℞ 4 posum, quare dimidium dimidio scilicet, ℞ 1 posis, huic ℞ ultimi, quare quadratum quadrato, scilicet 1 poso æquabitur 10 p: ℞ v: 100 m: 4 posb9 igitur 1 pos. m: 10 æquatur ℞ v: 100 m: 4 posb9, quare quadrata quadratis, quæ sunt, 1 quadratum p: 100 m: 20 posb9, & 100 m: 4 pos. igitur 1 quadratum est æquale 16 posb9, igitur poso æqualis 16, & nos uoluimus differentiam partium esse ℞ 4 posum, igitur differentia partium fuit ℞: 64, quæ est 8, & sic

 effugisti

effugisti q̃d quadrati, ponendo ℞ positionum.

QVAESTIO X.

Quæst. 10 Fuerunt homines in tribus societatibus, & numeri illorum analogi ductoq́ numero secundæ societatis, in numerum tertiæ, consurgit aggregatum omnium, cum cubo numeri primæ. Debes in hoc considerare, quód perabsurdum est, ut tales numeri sint alogi, aut fracti, nam non conuenit ponere hominis partem, uide igitur in qua proportione quadratum dimidij producti ex secunda in tertiam superat aggregatum omnium in numero aliquo quadrato, & inuenies quód in dupla, capiendo, 1, 2, 4, productum ex dimidio 8, qui fit ex 2 in 4, & est 4 in se, excedit 7 aggregatum in 9 numero quadrato, & hoc uenaberis ex alia positione simplici. Pones igitur totidem res pro his numeris, scilicet 1 pos^o, 2 pos^es, 4 pos^es, harum aggregatum est 7 pos^es, adde his cubum 1 pos^is, & fiet 1 cubus p: 7 pos^bus, & hoc æquatur 8 quadratis, producto secundæ in tertiam, deprime partes per pos^em, fit 1 quadratum p: 7 æquale 8 pos^bus, quare per tertiam regulam, duc 4 dimidium numeri pos^um in se fit 16, abijce 7 numerum, relinquitur 9, huius ℞ addita uel detracta à 4 dimidio numeri rerum, ostendit 7, & 1. estimationes rei, sed quia 1 non est numerus societatis, ideo dicemus quód res fuit 7, & hic est numerus hominum primæ societatis, secunda igitur habebit homines quatuordecim, tertia 28, constat autem quód cubus, 7 cum aggregato numerorum est 392, & tantum producitur ex 14 secundo numero in 28 tertium.

1 pos.	cubus p:	1 cub.
2 pos.	aggreg.	7 pos.
4 pos.	produc. 3^e in 2um	8 q̃d.

De modis inueniendi capitula noua. Cap. VI.



1 CVm uero diligenter considerassem in his, uisum est mihi, ut etiam ultrà transgredi liceret, itaq́ exemplo deriuatiuorum, quę iam inuenta fuerant, q̃d quadrati & quadrati æqualium numero, tum etiam cub' quadrati & cubi æqualium numero, ac reliquorum quatuor, capitulum cõstituerem q̃d q̃d quadrati, & q̃d quadrati & numeri, inuicem æqualium, indeq́ ęstimatio rei ℞ ℞ est, ęstimationis principalium eis correspondentium, uelut si 1 quadratum p: 1 pos^te est æqualis 12, & æstimatio rei est 3, si 1 q̃d q̃d quadratum p: 1 q̃d quadrato æquantur 12, æstimatio rei erit ℞ ℞ 3, indeq́ ad excogitanda reliqua deriuatiua animum appulimus.

2 Mox uero ad alia me transtuli, uisumq́ oportunum, ut æquationum naturam spectarem, cumq́ & primi coniuncti (sic enim binomium)

mixtum)& apotomę primæ(sic enim recisum uocamus) originem inueniret, uisum est, ut in his duæ essent diuersorum generum quantitates, numerus, & aloga pars, seu radix. porrò cum ad quadratum deducitur, numerus quidem fit ex quadratis partium in se, radix ex ductu unius partis in alteram bis, cubus uerò constituitur in parte aloga, ex triplo quadrati numeri, cum q̃drato radicis in radicem. Igitur proportio partis alogæ in cubo, ad partem alogam in q̃drato, est uelut tripli quadrati partis, quæ est numerus, cum quadrato partis quæ est radix, ad duplum numeri, at proportio tripli quadrati numeri, ad duplum numeri, est ipse numerus cum dimidio. proportio etiam quadrati radicis, ad duplum numeri, est quæ prouenit diuiso tali quadrato per idem duplum, igitur ipsa proportio, est numerus ipse cum dimidio sui, & tali prouentu, quare assumptis totidem quadratis, erunt partes alogę æquales, quare tot quadrata ęquabuntur cubo & numero. Velut in hoc casu, diuido 3 quadratū radicis, per 4. exit $\frac{3}{4}$, cui addo 3, qui est ęqualis numero & dimidio, fit $3\frac{3}{4}$, dico igitur quod in hac æstimatione $3\frac{3}{4}$ quadrati æquabuntur cubo & alicui numero, & est numerus ipse $\frac{1}{4}$.

res 2 p : R 3
q̃d. 7 p : R 48
cu. 26 p: R 675

Demum uolens diligentius rem perscrutari, posui 10 quadrata æqualia cubo, & alicui numero, & posui partem primam binomij (sic enim usus gratia appellabo coniunctum) esse, gratia exempli, 3, & constitui partem secundam 1 pos^em, & hæc est radix. quadratum igitur, est 9 p: 1 quadrato, & hoc totum est numerus & 6 pos^ta, & hoc est radix, at in cubo ut dictum est fit pars aloga ex triplo quadrati 3, & est 27, et quadrato 1 pos^is quod est 1 quadratum, in partem quæ est aloga id est in 1 pos^em, igitur 27 pos^s p: 1 cubo, æquantur 10 quadratis, in parte aloga id est decuplo 6 pos^m quod est 60 pos^es, igitur dicemus, quòd cubus æquatur 33, pos^{is}, igitur deprimendo per pos^es, quadratum æquatur 33, igitur res est R 33.

3 p: 1 pos.
9 p: 1 q̃d. p: 6 pos.
27 pos. p: 1 cu.
60 pos.
1 cu æqualis 33 pos.

REGVLA.

Ex his tandem hæc formatur regula breuissima. Adde primo numero dimidium sui, & totum abijce ex numero q̃dratorum residuū duces in duplū prioris numeri, & producti R est secunda pars coniuncti. Exemplū, est cubus qui cum numero æqualis est 12 q̃dratis, & prima binomij pars est 5, adde dimidium 5 ad 5, fit $7\frac{1}{2}$, abijce ex 12, fit $4\frac{1}{2}$, duc $4\frac{1}{2}$ in 10 duplum 5 prioris numeri, fit 45, cuius R est secunda pars coniuncti, igitur 12 q̃drata & 5 p: R 45, equalia sunt cu

bo & 40. Eadem ratione inueni, quòd numerus æquationis, scilicet 40, producti ex differentia primi numeri, & numeri quadratorum, in quadratum primi numeri, & producti tripli primi numeri, & numeri quadratorum in quadratum radicis, est differentia.

Post hęc deuolui consilium ad explorandum qualitatem capitulorum cub' q̄drati, rerum & numeri, uidiq́ue, quòd si dixero, cubus & 3 quadrata, ęqualia sunt 14 rebus, & 20 numero, & ponatur quantitas quædam intellecta, ęstimatiò rei, cuius prima pars sit numerus, secunda uerò quantitas, alia pars irrationalis. Et sit gratia exempli, hic 1 p: ℞ 5, constat autem quòd coniungendo partes irrationales cubi & quadrati, quod illæ fiunt ex duplo numeri quadratorum, in primam numeri partem, seu ex numero quadratorum, in duplum numeri, itemq́ue ex triplo quadrati numeri, & quadrato irrationalis partis, hoc est autem æquale, in capitulo cub' quadrati, & numeri, etiam numerum rerum conuenit, igitur ut in utroque pars rationalis talis sit, ut si iungantur, duplum numeri quadratorum, & etiam triplum sui quadrati, cum quadrato alterius partis, constituat numerum rerum. Et si pars rationalis uel numerus esset minus, oporteret ut esset differentia dupli numeri quadrati, & tripli quadrati partis, quę est ℞ cum quadrato partis quę est numerus, ipse numerus rerum. Exemplum, si 1 cubus p: 6 quadratis p: numero, æquentur 30 rebus, & pars una apotomę, sit m: 2, tunc ducemus 6 numerum quadratorum, in 4 duplum 2, & fiet 24, huic addemus 30 numerum rerum, & fiet 54, & hoc debet æquari triplo quadrati, quod est 12, & quadrato alterius partis, igitur abiecto 12 ex 54 relinquitur 42, & ℞ 42 est pars prima apotomę, quare res ualet ℞ 42 m: 2.

5 p: ℞ 45
5 —— 12 —— 15
7   3
25   45
175 —— 135
40

res 1 p: ℞ 5
q̄d. 6 p: ℞ 20
cub. 16 p: ℞ 320

Est & modus alius, qui similitudinis dicitur, atq́ue hic quadruplex
3 A natura æquationis, uelut cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, extrahitur ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Ab augmentis æquationum, sicq́ue capitulo non uniuersalia inuenimus q̄d' q̄drati, rerum: ac numeri. A' cõuersione æquationum in naturam ei æquiualentem, ut exponemus infrà. A' modo procedendi ad æquationes per cuborum uel quadratorum generationem, aut per proportionem ut dupli uel dimidij, aut per additionem uel diminutionem, tres enim sunt modi in uniuersum.

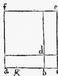
4 Est etiam transmutationis uia, quà ante demonstrationẽ uniuer-

salia

ſolia capitula multa inueni, atque inter reliqua, cubi æqualis quadratis & numero, & cubi cum quadratis, æqualis numero, uelut cum conamur hanc ſoluere quæſtionem, duos inuenias numeros, quorum aggregatum equale ſit alterius quadrato, & ex uno in alterum ducto, producatur 8, una enim uia peruenies ad 1 cubum æqualem 1 quadrato p: 8, alia, ad 1 cubum p: 8 rebus, æqualem 64, hac igitur inuenta æſtimatione, ſi diuiſeris 8 per eam, prodibit reliqua æquatio, ex qua in capituli illius cogitationem perueni. Queſtiones igitur alio ingenio cognitas ad ignotas transfer poſitiones, nec capitulorum inuentio finem eſt habitura, non tamen extra hęc, ex una quæſtione, generalia poteris aſſequi.

Cum autem intellexiſſem capitulum, quod Nicolaus Tartalea mihi tradiderat, ab eo fuiſſe demonſtratione inuentum Geometrica, cogitaui eam uiam eſſe regiam, ad omnia capitula uenanda. Itaque ad eam tria ſuppoſita maxime utilia præmittere inſtitui, quorum dilucida declaratione, reliqua, quæ & ipſa demonſtrabuntur, facile erit intelligere, eſt autem horum hoc primum. 5

Si quantitas in duas partes diuidatur, cubus totius æqualis eſt, cubis ambarum partium, triploque productorum, uniuſcuiuſque earum, uiciſsim in alterius quadratum. Quamuis hoc & reliqua duo quæ ſequunt alibi à nobis in 7° Elem. Geom. oſtenſa ſint, ne tamen huic operi quicquam deeſſet, placuit hic denuo demonſtrare. Sit igitur a c, diuiſa in puncto b, & ſit cubus totius a e, ſint etiam in baſi eius ſuperficies diſtinctæ, d a, d c, d f, d e. manifeſtum eſt autem ex 4° 2° Elementorum, c d eſſe quadratum b c, & d f quadratum a b, & duo rectangula a d & d c, fieri ex a b in b c, ſingula, cubus autem totus conſtat ex a c linea, in quadratum a e, quare ex a c, in ſuperficies d a, d c d e, d f, componentes a e, quare cum a c conſtet ex a b & b c, conſtabit cubus a e, ex octo corporibus, quorum quatuor conſtant ex a b linea in ſuperficies d a, d c, d e d f, reliqua quatuor, ex b c linea, in eaſdem quatuor ſuperficies. At ex a b in f d, fit cubus a b, & ex b c in c d, cubus b c, conſtat igitur cubus a e, ex cubis a b & b c, & ex eo quod fit ex a b in d a, d c, d c, & eo quod fit ex c b in d a, d f & d e, at quod fit ex a b in c d, æquale eſt ei quod fit ex b c in d a, & quod fit ex b c in d f, æquale ei quod fit ex a b in a d, eo quod altitudines & baſes eædem ſunt, parallelipeda etiam ex a b in a d, uel d e æqualia ſunt inuicem, ſimiliter ex b c in a d, uel d e, 6



inuicẽ æqualia, eo quòd d a & d e sunt æquales superficies, per 43. primi Elementorum, igitur cubus a c constat ex cubis a b & b c, & triplo a b in quadratum b c, & triplo b c in quadratum a b, quod erat probandum.

7 Ex hoc patet secundum, scilicet, quòd cubus a b, cum triplo a b in quadratum b c, superat cubum b c, cum triplo b c in quadratum a b, in cubo differentiæ a b & b c, sit igitur a g æqualis b c, & erit differentia a b & b c, linea g b, constat autem ex præcedente cubum a b, æqualem esse cubis a g & g b & triplo a g in quadratum g b, & triplo g b in quadratum a g, quare cubus a b cum triplo a b in quadratum b c, æqualis est cubis a g & g b, & triplo a b in quadratum g b, & triplo g b in quadratũ a g, & triplo a b, in quadratũ b c, uerum cubus a g æqualis est cubo b c, & triplum b g in quadratum a g, æquale est triplo b g in quadratum b c, & triplum a g in quadratum g b, æquale est triplo b c in quadratum b g, eo quòd b c æqualis est a g, cubus igitur a b, & triplum a b in quadratum b c, æqualia sunt cubo b c, & b g, & triplo b g in quadratum b c, & triplo b c in quadratum b c, & triplo b g in quadratum b c, & triplo b c in quadratum b g, & triplo a b in quadratum b c, at ex b g in quadratum b c, fit quantum ex b c in rectangulum ex b g in b c ter, igitur ex b g in quadratum b c, æquale ei quod fit ex b c in rectangulum ex b c in b g ter, eadem ratione, quod ex a b in b c quadratum ter æquale ei quod ex b c in rectangulum ex a b in b c ter, cubus igitur a b, & triplum a b in quadratum b c æqualis est cubis b g & b c, & triplo b c in rectangulum b c in a b, & triplo b c in rectangulum ex b c in b g, & triplo b c in quadratum b g, at ex 4° 2i Elementorum, rectangulum ex b c in b a, & ex b c in b g, cum quadrato b g æquantur quadrato a b, igitur cubus b g cum cubo b c, & triplo a b in quadratum b c, quare cubus a b, cum triplo a b in quadratum b c, excedunt cubum b c, cum triplo b c in quadratum a b, in cubo differentiæ b g.

Corol. primum. Ex hoc patet, quòd si b c ponatur m: quòd cubus a b constabit ex cubo a c & triplo a c in quadratum b c, addito per m: cubo b c, & triplo b c in quadratum a c, nam si b c fuisset p: differentia cubi a c cum triplo a c in quadratum b c, à cubo b c & triplo b c in quadratum a c, fuisset cubus a b, ex demonstratis. Sed posita b c m: tantum est quod aggregatur, quanta est differentia posita b c p: igitur cubus a b, est aggregatum cubi a c & tripli a c, in quadratum b c, & tripli b c in quadratum a c m: & cubi b c m: Et eodem modo, si a b poneretur m: cubus b c constaret ex cubo a c, & triplo a c in quadratum a b, & triplo a b, in quadratum a c per m: & cubo a b per m:

Eodem

Eodem modo, si a b ponatur m: cubus eius componetur ex cubo b c, & triplo b c in quadratum a e, & cubo a c per m: & triplo a c in quadratum b c per m: nam ut dictum est, cubus a b, est differentia talium partium per p: ex primo corrolario, igitur detracta maiore ex minore, fiet tantundem m: sed cubus a b m: est æqualis cubo a b p: in numero, ut enim 27 p: est cubus 3 p: ita 27 m: est cubus 3 m: igitur cubus a b m: est æqualis cubo b c & triplo b c in quadratum a c, & cubo a c m, & triplo a c in quadratum b c m: Corol. 2

Ex primo autem supposito, ostenditur etiam hoc tertium, quod est, proportionem aggregati ex cubis a b & b c ad triplum productorum a b in quadratum b c, & b c in quadratum a b esse, ut aggregati primæ & tertiæ detracta secunda trium quantitatum anologarum in proportione a b ad b c ad triplum secunde earum. Constat enim ex 32[a] 11 Elementorum, quòd proportio cubi a b ad corpus ex a c in quadratum a b, est ut quadrati a b ad a d superficiem, quare ex p[a].6[i]. Elementorum, ut a b ad b c, eadem ratione parallelepipedi ex b c in quadratum a b ad parallelepipedum ex a b in quadratum b c, proportio, ut a b ad b c, atque rursus parallelepipedi, ex a b in quadratum b c ad cubum b c, ut a b ad b c. Quatuor igitur corpora, scilicet cubus a b parallelepipedum, ex b c in quadratum a b, parallelepipedum ex a b in quadratum b c, & cubus b c sunt in continua proportione linearum a b & b c. Statuamus ita hæc corpora breuitatis causa in quatuor literis h, k, l, m, ita ut h sit cubus a b, & k parallelepipedum ex b c in quadratum a b & l parallelepipedum ex a b in quadratum b c, & m, sit cubus b c, igitur cum ratio m ad l sit ea quę l ad k, ut probatum est, item k ad l, ut h ad k erit per 24 5[i] Elementorum, k m ad l, ut h l, ad k, quare ex 12[a] eiusdem, h k l m, ad k l, ut h l, ad k, quare ex 19[a] eiusdem, h m ad k l, ut h l detracto k, ad k, quare per 22 eiusdem, h m ad triplum k l, ut h l dempto k ad triplum k, at cum h k l, sint in proportione a b ad b c, ut probatum est, erit per 11 eiusdem 5[i] Elementorum, cuborum a b & b c, simul iunctorum, ad triplum a b in quadratum b c, & b c in quadratum a b, ut est primæ & tertiæ trium linearum proportionalium in proportione a b & b c, detracta media ipsarum, ad triplum ipsius mediæ 3

h, k, l, m,

Ex hoc patet, quòd proportio tripli b c in quadratum a b, ad triplum a b in quadratum b c, est ut a b c, ex 12[a] 5[i] Element. Corol. 3

Et quod proportio cuborum a b & b c, cum duplo b c in quadratum a b, & a b in quadratum b c, ad residuum totius cubi a c, est Corol. 4

Ee ut

ut trium superficierum d c, d a, d e, ad d e superficiem, seu ut trium quantitatum proportionalium in proportione a b ad b c, ad mediam ipsarum, ac multa alia quæ breuitatis causa omitto.

De capitulorum transmutatione.
CAP. VII.


Cum fuerit numerus & denominatio media, extremæ æqualis, conuertetur capitulum in duas denominationes easdem, & sub eadem magnitudine numero æquales, uelut si dicam, quadratum æquatur 6 radicibus & 16. dicemus igitur etiam, quadratum & 6 radices, æquantur 16, manétque conuersa ratio, inde habita prima æquatione, detrahemus numerum radicum, & est 6, & habebimus secundam, uel secunda habita, addemus 6 numerum radicum, & fiet æquatio prima, uerum in cæteris denominationibus regula generalis dari non potest.

Verùm generalis est regula, cum media denominatio, numero & extremæ denominationi æquatur, tunc conuertetur in aliam mediam denominationem, tantundem à numero distantem: quantum prior media ab extrema denominatione distabat. Sic pro exemplo, si cubus & numerus æquales sint rebus, cubus cum eodem numero, quadratis etiam æquabitur, sed non sub rerum numero. Ratio uero habendi mediam denominationem est, deprime maiorē denominationem ex medijs, per minorē, & radicem numeri æquationis, sumptam secundum naturam denominationis extremæ, reduces ad denominationē quę exijt, & cum eo numero, multiplicabis numerum denominationis medię proximioris maximę denominationi extremæ, aut diuides numerum proximioris numero, & qui exit, numerus est denominationis mediæ, uelut si cubus & 16 æquent 6 quadratis, erit ex dictis cubus & 16, æqualia rebus. harum numerum sic uenabimur, deprime q̄dratum per res, exeunt res, accipe ℞ cub. 16, nàm cubus est extrema denominatio, & eam reduc ad naturam rei, cum res sit id, quod prouenit, diuiso quadrato per rem, fiet igitur ℞ cub. 16, quoniam res non auget nec minuit, igitur ducemus ℞ cub. 16 in 6 numerum quadratorum, qui sunt proximiores cubo, quàm numero, & fient res ℞ cub. 3456 ęq̄les 1 cub. p: 16. Exemplum aliud cubus & 8 ęquantur 18 rebus, dices igitur, cubus & 8, ęq̄ntur quadratis, diuide igit̄ quadratum per rem exit res, accipe ℞ cubicam 8. quia cubus est maxima denominatio, & est 2, ea nō est deducēda aliter, cum res sit denominatio exiens, fiet igitur 2 diuisor 18 numeri rerum

rum,quia res ſunt próximiores numero,quàm cubo,& exibit 9, numerus quadratorum æqualium cubo p:8,eodem modo, ſi dicamus 1 q̄d' quadratum p:64, æquatur 10 cubis, cadet tranſmutatio rebus in 1 q̄d' quadratum p:64 æquale rebus, diuide igitur cubum per rem exit quadratum, duc ℞ ℞ 64 quę eſt ex natura q̄d' quadrati, & eſt ℞ 8, ad naturam quadrati,ſcilicet denominationis exeuntis,fit 8,quem duc in 10 numerum cuborum,quia ſunt proximiores maximæ denominationis, & fiunt res 80,contrà diuide res 80 per 8 ad habendum numerum cuborum.

1 q̄d' q̄d. p: 64	10 cub.
1 q̄d' q̄d. p: 64	rebus
℞ 8	q̄d. 8
	10
	res 80

Eadem ratio tenet,ubi denominatio media cum numero, æquatur extremæ,ſeu duæ denominationes extremæ,numero æquales fuerint,nam eadem regula unam æquationem in aliam tranſmutabimus Vt pro exemplo,cubus æquetur 9 rebus p. 10, dicemus igitur,cubus p:q̄d' ℞ cubicæ 72900 æquantur 10,& ſi cubus æquatur 6 quadratis p:16, erit cubus & res ℞ cubus 3456,æqualis 19. Et ſi cubus p: 18 rebus,æquatur 8,erit cubus æqualis 9 quadratis & 8 numero. Et cum relatum primum p:6 cubis æquatur 80,erit relatum primum æquale quadratis p:80,diuide igitur cubum per quadratum,exit res,ſume ℞ relati 80, et eam reducito ad naturam rei,remanet ℞ relati 80, quam ducito in 6 numerum cuborum,fit ℞ relata 6220 80,numerus quadratorum,igitur r p^{m} ęquatur quadratis ℞ relata 6220 80 p:80 numero,eadem ratione,ſi r^{m}p^{m} p:30 rebus æquale ſit 32 numero,tunc erit r^{m}p^{m} æquale q̄d' quadrato & 32 numero,diuide q̄d' quadratum per rem,exit cubus, reducito 2 ℞ relata 32 ad cubum,fit 8,diuide 24 numerum rerum per 8, exit 3 numerus q̄d' quadratorum,qui cum 32 æquantur relato primo. 3

r^{m}p^{m} p:6 cub.	80
r^{m}p^{m} q̄d. p:	80
r rel:80——res ℞ rel:80	
	6
	q̄d.℞ rel:9220 80

Sed pro habenda æſtimatione in ſingulis, diuides quadratum 4
radicis numeri æquationis,ſumpta ipſa radice:ſecundum naturam maximæ denominationis, per æſtimationem quam habes, quod exit eſt æſtimatio conuerſi capituli. Exemplum, dictum eſt, quòd ſi cubus & 8 æquatur 18 rebus,cubus & 8 æquabitur 9 quadratis. In prima autem æquatione res ualet 4,uel ℞ 6 m:2,dico,quod ſi acceperis ℞ cubicam 8, quæ eſt 2, & duxeris eam in ſe fit 4,& diuiſeris per priores æſtimationes, ſcilicet 4,uel ℞ 6 m:2,exibunt 1,uel ℞ 24 m:4 ęſtimationes cubi p:8 ęqualium 9 quadratis. Et eodem modo

dictum est, quod si r^m p^m p: 6 cubis, æquatur 80, quod r^m p^m æquabitur ℞ r^t, 6220 80 quadratorum p: 80, & in prima æquatione æstimatio rei manifestè est 2, duc igitur ℞ r^t 80 in se, fit ℞ r^t 6400, diuide per 2, æstimationem relati & 6 cuborum æqualium 80, exibit ℞ r^t 200, æstimatio rei quando r^m p^m æquatur ℞ r^e 6220 80 quadratorum p: 80 ut uero facilior intellectus

cub. & q̄d' æq̄l' n° in cub. æq̄l' re & n°.
cub. æq̄l' q̄d' & n° in cub. & res æq̄l' n°.
cub. & n^s æq̄l' q̄d' in cub. & n^m æq̄l' rebus
q̄d' q̄d. & cub, æq̄l' n° in q̄d' q̄d. æq̄l' reb⁹ & n°.
q̄d' q̄d. & n^s æq̄l' cu. in q̄d' q̄d. & n^m æq̄l' rebus.
q̄d' q̄d. æq̄l' cu. & n° in q̄d' q̄d. & res æq̄l' n°.
r^m p^m & q̄d' q̄d. æq̄l' n° in r^m p^m æq̄l' reb. & n°.
r^m p^m æq̄le, q̄d q̄d. & n° in r^m p^m & res æq̄l' n°.
r^m p^m & n^s æq̄l' q̄d' q̄d. in r^m p^m & n^m æq̄l' reb°.
r^m p^m & cu. æq̄l' n°. in r^m p^m æq̄l q̄d. q̄d. & n°.
r^m p^m æq̄l cu. & n° in r^m p^m & q̄d. æq̄l' n°.
r^m p^m & n^s æq̄l' cu. in r^m p^m & n^m æq̄l q̄d.

omnium horum sit, uigintiquatuor transmutationes subiungam, ex quibus alias discere licebit. hic namque duodecim sunt conuersiones, totidemque econtra, uelut si cubus & quadratum æquantur numero, conuertetur capitulum in cubum æqualem rebus & numero, atecontra, si cubus æqualis sit rebus & numero: cubus & quadrata numero etiam æqualia erunt.

DEMONSTRATIO.

Vt uero eiusmodi sit aliqua, exempli causa, demonstratio, ponatur parallelepipedum a b constans ex a c cubo, & d b numero, æquale autem totum hoc quadratis a d lineæ. Igitur cum ipsum constet ex d c in a b, constabit etiam ex a m in quadratum d c, igitur a m est numerus quadratorum, inter m d & d a, sint continue proportionales, e proximior a d, & f g proximior d m, quadratum autem f g sit g h, & sit g k superficies, æqualis ei quæ ex e in a m, compleatur autem corpus g k, secundum altitudinem f g, erit igitur ex 15 6^i Elementorum a m ad f k, ut f g ad e, igitur ex 11^a 5^i Elementorum, a m ad f k, ut m d ad f g, seu f h. at per 19^a 5^i Elementorum erit a m ad f k, ut a d ad k h, ex 11^a igitur eiusdem, m d ad f h, ut a d ad k h, quare cum sit m d, ad f h, ut f h ad e, &

e, & fh ad e, ut e ad a d, & e ad a d, ut a d ad kh, erunt quinque lineæ m d, fh, e, a d, h k. continue proportionales, igitur per 32 11ⁱ & 17 6ⁱ Elementorum erit g h ad a c, ut m d ad h k, utraque enim duplicata ei, quæ est fh, ad a d, quare quod ex d m quinta in a c quadratum secundæ, æquale est ei, quod ex kh prima in g h quadratum quartæ. Igitur corpus k o est numerus propositus, & cum cubo b g æquatur rebus totidem, quod sunt in superficie g k at g k æqualis est superficiei ex c in a m, est autem e radix cubica numeri d b, propositi, ex 34ª 11ⁱ Elementorum, & a m numerus quadratorum, ut propositum, est igitur numerus rerum g k fit ex radice cubica numeri æquationis in numerum quadratorum, & numerus æquationis manet idem scilicet corpus k o & b d, quorum unum alteri æquale esse demonstrauimus. Superest itaque, ut ostendamus æstimationem rei quæ est a d in uno, & f g, in altero esse, quales proponuntur, cadit enim inter eas proportionalis media e radix cubica numeri propositi, igitur ex 16ª 6ⁱ Elementorum, diuiso quadrato e per unam earum exibit reliqua. Eodem modo, probaremus reliquam partem regulæ, & generaliter, sed breuitati consulendum est in his quæ ordinem habent eum, ut unum ex altero cognoscatur.

REGVLA.

Est & alius transmutandi modus, manente quidẽ denominatio- 6
num numero, uariato autem æq̃tionis numero, uerũ in reliquis eandẽ habet rationem, regula igitur est. Accipe radicem numeri æquationis, secundũ naturam denominationis mediæ quã habes, & eam reduces multiplicando ad naturã denominationis mediæ, quã uis ęquari extremis in conuersione, & hic est numerus in secunda ęquatione. Exemplum, si dico, cubus & 8 æquatur 18 rebus, tu scis ex tabula suprapoſita, quæ huic seruit regulæ, quod transmutat̃ in cubũ & numerum ęqualia quadratis, at ex hac regula liquet, quod numerus quadratorum æquatur numero rerum, erunt igitur cub. & numerus æquales 18 quadratis, pro numero igit̃ ęquationis accipe 8, quia res non habent radicem, & duc in se fiet 64, numerus ęquationis, duxisti autem in se quia denominatio media in quam fienda est transmutatio, est quadratum. Eadem ratione, si dicatur, 1 q̃d' q̃dratũ p:8, ęquatur 12 rebus, traducetur in q̃d' q̃dratum & numerum ęqualia cubis, quare reducemus 8 ad cubum & fiet 1 q̃d' q̃dratum p:512, æquale 12 cubis. Et ita, si dicatur 1 pᵐ rᵐ p:8, æquatur 5 cubis, transmutatio fiet in r' p' p:numero, æquale 5 quadratis, ex tabula uel regula, igit̃ pro numero (quia denominatio media in proposito est cubus) sumemus ℞ cub. 8, quæ est, & eam deducemus ad naturã qua-

 drati,

drati, quia quadratum est denominatio media in transmutatione, fiet igitur 4, quare erit r^m p^m p:4, æquale 5 quadratis.

Eadem ratio tenet, cum numerus & media denominatio extre-
7 mæ æquantur, ut transmutetur in capitulum denominationum æqualium numero. Exemplum, si dicamus, 1 $p^m r^m$ p:4 cub. æquatur 64, accipimus propter cubum ℞ cubicam 64, & est 4, & eam reducemus ad quadratum denominationem mediam, in quam fienda est transmutatio, & habebimus 1 $p^m r^m$ æquale 4 quadratis & 16 numero, & si 1 $p^m r^m$ p:4 rebus æquatur 5, quia res non habet radicem, reducito 5 ad naturam quadrati quadrati, & fit 625, ideo dicemus, quod 1 $r^m p^m$ æquatur 4 quadratis quadrati p:625.

8 Aestimationis ratio sic habetur in media denominatione æquali extremæ & numero. Reducito æquationem quam habes in naturam denominationis mediæ, in quam fienda est trãsmutatio, & hoc abijce ex numero denominationis mediæ, & ℞ residui, sumpta secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, est rei æstimatio. Exemplum, si p^m r^m p:64 ęquatur 12, cubis dicemus $p^m r^m$ p:16 æquatur 12 quadratis, æstimatio primæ æquationis est 2, & quia media denominatio in quam fit transmutatio est quadratum, ducemus 2 in se fit 4, abijce ipsum ex 12 numero cuborum, fit 8 residuum cuius sumemus ℞ secundum naturam denominationis mediæ, ex qua fit transmutatio, & est cubus, igitur ℞ cub. 8, quæ est 2, erit etiam æstimatio rei in secunda æquatione. Aliud Exemplum, si p^m r^m p:64, æquatur 24 quadratis, tu scis, quod transmutatur in p^m r^m p:512 æquale 24 cubis, æquatio autem primi propositi fuit 2, cubus fit 8, nam media denominatio secunda est cubus, abijce 8 ex 42, numero quadratorum, relinquitur 16 cuius ℞ quadrata, id est sumpta secundum naturam denominationis mediæ primæ æquationis, quæ est 4, est æstimatio $p^r r^r$ p:512 æqualis 24 cubis.

1 $p^m r^m$ p: 64	12 cub.
1 p^m r^m p: 16	12 q̃d.

1 p^m r^m p:64	24 q̃d.
1 p^m r^m p: 512	24 cu.

9 Sed ubi intermedia denominatio iungitur numero uel extremæ denominationi, facto transitu in comparem, ex 7^a regula, reduces ut prius æstimationem quam habes in naturã denominationis medię cuius quæris ęstimationem: & ei adde numerũ denominationis medię, si media denominatio cuius ęstimatio quęritur, iuncta fuerit numero, uel minuenus, si iuncta fuerit extremę denominationi, & eius aggregati uel residui ℞ sumpta, ex natura denominationis mediæ, cuius ęstimatio cognita est, erit æquatio secũdę quęstioni s quęsita. Exemplum. sit r^m p^m æquale 3 cubis p:8, & æstimatio rei cognita 2, & trans-

& transmutatur ex regula septima in $r^{m}p^{m}$p:p 3 quadratis ęqualia 4, reduco igitur 2 ad naturam quadrati mediæ denominationis, cuius quæritur æstimatio.

$r^{m}p^{m}$ 3 cub.p: 8
$r^{m}p^{m}$ p: 3 q̃d. 4

Sit 4, ex hoc abijcio 3 numerum quadratorum, quia quadrata sunt iuncta $r^{o}p^{o}$, & non numero, relinquitur 1, huius ℞ cub. quæ est 1, est rei æstimatio, est autem cubus denominatio media æquationis iam cognitæ. Rursus sit $r^{m}p^{m}$ æquale 7 quadratis p:4, & sit transmutatio in $r^{m}p^{m}$ p:7 cubis æquale 8, ex 7ª regula, & sit huius cognita æquatio, quę sit

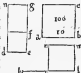
$r^{m}p^{m}$ p:7 cub. 8
$r^{m}p^{m}$ 7 q̃d.p:4

1, & uelim reliquam, reduco 1 ad quadratum, mediam denominationem ignotam, & fit 1, huic addemus 7 numerus q̃dratorum, quia media denominatio ignota, quæ est quadratum, iungitur numero, scilicet 4, & habebimus 8, huius ℞ cubica sumpta ex natura mediæ denominationis cognitæ, & est 2, talis ℞ cubica, est rei æstimatio, quando $p^{m}r^{m}$ æquatur 7 q̃d.p:4.

Ex hoc patet, quòd semper, habito uno capitulo, per secundam, Cor^m. tertiam & quartam regulam, uel per sextam, septimam, octauam, & nonam, habebimus aliud generaliter, si generaliter uel particulatim, si particulatim. Exemplum igitur tale sit, cognito capitulo cubi & rerum æqualium numero, proponatur cubus æqualis 3 quadratis & 10 numero, habebimus igitur ex septima regula cubum & 3 res æquales ℞ 10, æquatio huius est ℞ v: cub. ℞ $3\frac{1}{2}$p: ℞ $2\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cub. ℞ $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $2\frac{1}{2}$ huius igitur quadratum, addito 3 numero quadratorum, quia quadrata iunguntur numero, erit æstimatio cubi æqualis 3 quadratis & 10 numero, & hoc est quia denominatio media cognita, quæ est res non habet ex se radicem, & sic primo generaliter capitulum cubi æqualis quadratis & numero: aliaq; multa capitula inueni, duplici uia,

DEMONSTRATIO.

Et ne hoc uoluntarium uideatur, demonstratio huius adijcienda 16 est in uno pro omnibus, sit cubus d f, cum a b numero, ęqualis d g numero rerum, id est corpori d g, sit autem h l, numerus rerum, æqualis d g superficiei, in numero, & sit quod ex h k in k m, æquale a c numero, & quadrato a b, erit igitur quod ex h l in k m, æquale a c & cubo k l, & similiter, quod ex d e in d g, æquale cubo d e, & numero a b, d e autem est latus d f, & k l latus k m, sed h l æqualis est d g, cum igitur ex h k in k m fiat a c, & ex d e in f n, a b posita



positan fradice k m, & de radice h k, nescio si ex d e in f n, fit a b,
ex h k in k m fit a c, namque hoc à Theone in Euclidis commentario
est demonstratum, igitur cùm æstimatio rei in uno sit k l, in altero
d e, sequitur ut sublata f d, æquali h k (utraque enim æquatur
quadrato d e, ex h l, relinquatur . k l, rei æstimatio, quod est propo-
situm.

11 Est & genus transmutationis in dissimile, ut cum q̃d quadratum
æquatur rebus & numero, & res est ℞ 5 p:2, gratia exempli, erit q̃d
quadratum p: eisdem rebus æquale eidem numero, & res erit eius
apotome, uidelicet ℞ 5 m:2, & econtra.

12 Transmutantur & ea, quæ constant ex quatuor nominibus, cum
fuerint tres partes continue proportionles, & ęquales rebus uel cu
bis, dico autem, numerus & quadratum & q̃d quadratum, nam di-
uiso numero rerum per ℞ numeri, exit numerus cuborum, multi-
plicato uerò numero cuborũ, per ℞ numeri, producitur numerus
rerum æqualium q̃d quadrato & quadrato & numero eisdem, ue-
lut, si q̃d quadratum p: 8 quadratis p:64, æquantur 10 cubis igitur
ducto 8 ℞ 64, in 10 numerum cuborum, erit 1 q̃d quadratum p:8
quadratis p:64, æquale 80 rebus. Habita autem una æquatione,
diuide cum ea ℞ nuneri, quod exit, est reliqua æquatio, uelut 1 q̃d
quadratum p:8 quadratis p : 46, æquatur 56 rebus, & res est 4, erit
1 q̃d quadratum p:8 quadratis p:64 æquale 7 cubis, inde diuiso 8
radice 84, per 2 priorem æquationem, exit 4 secunda æquatio q̃d
quadrati p: 8 quadratis p:64, æqualium 7 cubis.

Est etiam transmutatio capitulorum ex tribus constantium, in ca
13 pitula ex quatuor, & pro exemplo, regulam unam exponam, si sit ca
pitulum cubi & numeri æqualium quadratis, conuertetur in capi-
tulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, hoc modo,
manente numero quadratorum, duc dimidium numeri quadrato-
rum in se, & productum est numerus rerum, quæ sunt cum cubo, &
octaua pars prioris numeri est semper numerus, qui est cum qua-
dratis, & ęquatio semper manet eadem. Exemplum, cub. p:16 ęqua-
tur 14 quadratis, duc 7 dimidium 14 in se, fit 49, accipe $\frac{1}{8}$ de 16, quod
est 2, habebis 1 cub. p:49 rebus ęqualem 14 quadratis p:2. Aliud, cu
bus & 40, æquatur 8 quadratis, duc 4 dimidium 8 in se fit 16, nu-
merus rerum, accipe $\frac{1}{8}$ de 40 quod est 5 igitur cubus & 16 res æq̃n-
tur 8 quadratis q : 5, & æquatione una inuenta, habes reliquam
cum sint eædem, demonstratio huius non est hic necessaria.

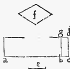
Docetur

Docetur æquatio generaliter mediæ denominationis æqualis extremæ & numero. CAP. VIII.

DEMONSTRATIO.



It inquam, cubus quadrati & numerus ęqualis aliquib. rebus, & sit numerus rerum a d, & sit b d portio, ex quasumpto latere, qualc relati primi e, ducto in a g reliquum numeri rerum, fiat f numerus æquationis, dico e esse rei 1
æstimationem, nam quia ex ſuppoſito ex e in a g, fit f, & ex e in b d, fit cub. e, eo quòd e fuit latus relatum, b d, & productum ex e in a g, & in b d æquale eſt producto ex e in a d, ſequitur cum a d, ſit numerus rerum, quòd res ęquantur cubo quadrato, & numero f, ſub æſtimatione ipſius e.



REGVLA.

2 Secundum hoc formabitur regula, cùm fuerint denominatio media & numerus, ęquales medię, & ex numero mediæ denominationis, feceris duas partes, ex quarum una in radicem alterius, ſumptā ſecundum naturā denominationis, prouenientis ex diuiſione extremæ per mediam, & deductam ad naturam ipſius mediæ denominationis, fiat numerus ęquationis, tunc radix ipſa antequam deducetur ad naturā denominationis mediæ, eſt rei ęſtimatio. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato & 21, tunc quia res ſunt immediatę quadrato & numero, ſufficit facere de 10 duas partes, ex quarum una in aliam fiat 21, & erunt 7 & 3, & utraque eſt rei æſtimatio. Aliud, 10 res, æquantur cubo & 3, hic res eſt coniuncta numero, ſed nō cubo, cum intermediet quadratum. Ideo diuidemus cubum per rem, exit quadratum, dicemus igitur fac ex 10, duas partes, ex quarum una in quadratam alterius radicem, fiat 3, & erunt 1 & 9, nā ex 1 in 3 ℞ 9 fit 3, ideo talis ℞ ſcilicet 3, eſt rei æſtimatio. Aliud, 10 cubi æquales ſunt quadrati quadrati, & 64, iam hic cubus hæret quadrati quadrato, & à numero diſtat intermediantibus quadrato & re, dices igitur, fac de 10 duas partes, ex quarum una in alterius cubū, producatur 64, & erunt partes 8 & 2, qui ad cubū deducendus eſt, igitur 2 eſt rei æſtimatio, ſcilicet quòd oporteat ſemper numerū cum quo operamur, eſſe rei æquationem. Aliud, & eſt quarti modi exemplum, 10 cubi æquantur p° r° & 48, tūc iam cubus diſtat à r° p°, intermedio quadrati quadrati, & à numero interpoſitis quadrato & re, diuide igitur r° pm per cubum exit quadratum, dicemus, fac de 10 numero medię denominationis duas partes, ex quarum una, in cubum radicis quadratę alterius producatur 48 numerus ęquationis, & erunt partes 6 & 4, nam ex 6 in

8 cubum 2 radicis quadratę 4, fit 48, ideo ipsum 2 radix quadrata 4, est rei æstimatio. Manifestum est igitur, quod semper suminus radicem ex natura denominationis, secundũ quam media in maiore cõtinetur, & deducimus eam ad naturam ipsius mediæ, & qui scit hoc facere, nouit capitulũ, & qui nouit capitulum, scit etiam hoc facere.

3 Est uerò manifestum, quod cum media denominatio, extremę & numero æqualis est, tunc in omnibus, preterquam in maximo numero, duas æstimationes necessario habet.

De secunda incognita quantitate non multiplicata. CAP. IX.



Generaliter hucusq; noua inuẽta tractauimus: nunc uerò de singulis dicendũ speciebus est, namq; sępius illud occurrit, ut quæstionem propositã, duplici positione soluamus. Eiusmodi aũt est exemplum, quando aliter uix rem hanc possumus explicare. Tres erant uiri peçunias habẽtes. Primus cũ dimidio reliquorũ habuit aureos 3·. Secundus cũ reliquorũ tertia parte 28. Tertius cũ reliquorum parte quarta 31, quæritur quantum quisq; habuit. Statuemus primò rem ignotam primam, secũdo secundam rem ignotam, tertio igitur 31 au rei, minus quarta parte rei, ac quarta parte quantitatis relicti sunt, iam igiť uide, quantum habet primus, equidẽ si illi dimidiũ secũdi et tertij adijcias, habiturus est aureos 32, habet igitur per se aureos 32 m: $\frac{1}{2}$ q̃n: m: 15$\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos^ts p: $\frac{1}{8}$ quant: quare habebit 16$\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{8}$ quant^ts p: $\frac{1}{8}$ pos: hoc autẽ cum sit ęq̃le uni positioni, erit $\frac{7}{8}$ pos: & $\frac{3}{8}$ quãt: æquale 16$\frac{1}{2}$, quare deducẽdo ad integra 7 pos: & 3 quant: æquabantur 132. Rursus uideamus, q̃ntũ habeat secundus, habet hic 28, si ei tertia pars primi ac tertij addať, ea est $\frac{1}{3}$ pos: p: 10$\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ pos: m: $\frac{1}{12}$ quant: hoc est igitur $\frac{1}{4}$ pos: p: 10$\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{12}$ quant: abijce ex 28 relinquitur, 17$\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$ quant: m: $\frac{1}{4}$ pos: & tantum habuit secundus. suppositum est autem habere illum quantitatem, quantitas igitur secunda, æqui ualet $\frac{1}{12}$ sui met, & 37$\frac{2}{3}$ m: $\frac{1}{4}$ pos: abiectis communiter $\frac{1}{12}$ quãtitatis, & restituto m: alteri parti, fient $\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æqualia 17$\frac{2}{3}$, quare 1 quan: p: 3 pos: æqualia erunt 21·, multiplicatis partibus omnibus per 12 denominatorẽ, inde ducẽs quamuis earum ad ęqualitatem alterius, in positionum aut quãtitatum numero, ut pote dicendo, 3 pos: p: 11 quan: æquantur 212, uolo modo ut sint 7 positiones,

Pri: Secund: Terti:
res quan: 31 m:
Quarta parte reliq̃ R:
primus 16$\frac{1}{2}$ p: $\frac{1}{8}$ pos:
m: $\frac{3}{8}$ quan: æqualia
positioni primæ

$\frac{7}{8}$ pos: p: $\frac{3}{8}$ quan: æq̃lia 16$\frac{1}{2}$

Secundus 17$\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{12}$
quan: m: $\frac{1}{4}$ pos: æq̃lia quantitati secundæ

$\frac{11}{12}$ quan: p: $\frac{1}{4}$ pos: æqual. 17$\frac{2}{3}$

7 pos: p: 3 qua: æq̃l 122
3 pos: p: 1 quan: æq̃l 212
7 pos, p: ·5$\frac{2}{3}$ quã: æq̃l 4·4 $\frac{8}{3}$

positiones, & erunt per regulam quatuor quantitatũ proportionalium, $25\frac{2}{3}$ quan: æquales $494\frac{2}{3}$, habes igitur, ut uides, pos: p: 3 quantitatibus æqualia 132, & 7 pos: p: $25\frac{2}{3}$ quantitatibus æqualia $494\frac{2}{3}$, igit cum 7 pos: sint idem, in utroq; erit differentia quantitatum, scilicet $22\frac{2}{3}$, æqualis numerorum differentiæ, quæ est $362\frac{2}{3}$, diuide igitur sicut in positione simplici, p capitulum tertium, $362\frac{2}{3}$, per $22\frac{2}{3}$, exit 16, æstimatio quantitatis, & tantum habuit secundus. Rursus ponamus primo esse rem, secundo iam erant 16, tertio sit secunda quantitas, cumq; secundus cum tertia parte primi & tertij, habeat 28, ipse autem habeat 16, erit $\frac{1}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quantitatis æqualis 12, residuo 16 & 28, & ideo 2 pos: p: 1 quantitate æquabuntur 36, ad uerò primus, cum dimidio reliquorum habeat 32, dimidiũ reliquorum est 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: igitur 1 pos: p: 8 p: $\frac{1}{2}$ quan: æquantur 32, igitur abiecto 8: fiet 1 pos: p: $\frac{1}{2}$ quan: æqlis 24, quia igitur 1 po: p: 1 quan: æquabitur 36, igitur differentia 24 & 36, quæ est 12, æquatur dimidio quantitatis, quare per modũ capituli tertij, diuiso 12 per $\frac{1}{2}$, exit 24. æstimatio quantitatis, seu numerus aureorũ tertij, iam igitur constat secundũ habuisse 16, tertium 24 primus autem cum dimidio secundi & tertij habet 32, detracto 20 dimidio secundi & tertij, ex 32, relinquitur 12 numerus primi, habuit igitur primus aureos 12, secundus 16, tertius 24. Operatio prolixa, clara tamen ac facilis, semper autem reducenda est denominatio una ad eundem numerum, & tunc differentia numerorum æqualis necessariò erit differentiæ alterius denominationis, ut uidisti bis in hoc exemplo

7 pos: p: 3 quan:		132
7 pos: p: $25\frac{2}{3}$ quan:		$494\frac{2}{3}$
$22\frac{2}{3}$ quã, æquales		$362\frac{2}{3}$

p[1]	2[a]	3[1]
1 pos:	16	1 quan:
$\frac{2}{3}$ pos: p: $\frac{1}{3}$ quan: 12		
1 pos. p: $\frac{1}{2}$ quan: 24		
pos: p: 1 quan: 36		
$\frac{1}{2}$ quan: æqualis 12		

Exemplum aliud. Dixit primus secundo, da mihi tertiam partem tuorum, & 3 p: & habebo triplum residui tui. At secũdus primo, da dimidium, & 2 p: tuorũ, & quod tibi relinquetur, erit nona pars omnium quæ ego habebo. Dabimus primo rem, secundo quantitatẽ, quia igitur dando $\frac{1}{3}$ & 3 p: secundi primo, relinquit secundo $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, & hoc est tertia pars aggregati primi quod est 1 posito p: $\frac{2}{3}$ quantitatis p: 3 igitur triplato $\frac{2}{3}$ quan: m: 3, et fit 2 quan: m: 9 erit hoc æquale pos: p: $\frac{1}{3}$ quan: p: 3, quare reddendo quod est minus, alteri pur ti fiet 1 posito p: 12, æqualis $1\frac{2}{3}$ quan: Rursus quia dictum est, quod si primus det dimidium p: 2, secundo, erit residuum scilicet $\frac{1}{2}$

Primus	Secundus
1 pos,	1 quan:
1 pos. p: $\frac{2}{3}$ quã. p: 3 triplum $\frac{2}{3}$ quan. m: 3.	
1 pos: p: 12 æq̃ $1\frac{2}{3}$ quã:	
1 quã: p: $\frac{1}{2}$ pos: p: 2 nonuplum $\frac{1}{2}$ pos. m: 2	
1 quã: p: 20 æql. 4 pos.	

pos.m:2,nona pars aggregati,quod est 1 quan:p:$\frac{1}{2}$pos.p:2,igitur multiplicando tale residuum per 9,fient 4$\frac{1}{2}$ pos.m:18,ęquales 1 quan:p:$\frac{1}{2}$ pos^{bus} p:2, reddendo minus alteri parti,& auferendo similia,habebimus 4 pos.æquales 1 quan^{ti} p:20,habebas etiam 1 pos,p:12 ęqualem 1$\frac{2}{3}$ quan^{ti},reducito partes ad ęqualitatē unius denominationis, & primo multiplicando 1 pos.p:12,ęq̃lem 1$\frac{2}{3}$ quan per 4,fient 4 pos. p:48 ęquales 6$\frac{2}{3}$ quan^{bus},& hoc comparabis,ut uides in figura,cum 4 pos^{bus} æqualibus 1 quant^{ti} p:20.& similiter eadem ratione reducendo numerum quantitatū ad ęqualitatē, habebis 5 quan^{tes} æquales 36 p:3 positionibus, & 5 quantitates p: 100, æq̃les 10 pos^{bus},in utroq; casu transferes uicissim,per regulam,si æqualibus ęqualia addas,tota quoq; fiēt æqualia,& habebis 4 pos^{es} p:68 p:1 quan^{te} æq̃les 4 pos^{bus} p 6$\frac{2}{3}$ quan^{bus} inde abiectis similibus, relinquentur 5$\frac{2}{3}$ quan:ęquales 68,igitur diuiso 68,per 5$\frac{2}{3}$,exit 12 æstimatio quantitatis,& id quod habuit secundus.Eadem ratione,transferes in secunda æquatione, partes dissimiles, dicendo, si 1 quan: æquantur 39 p:2 pos^{bus},& 5 quan:p: 100,æquantur 20 pos^{bus},igitur 5 quan^{tes} p: 10 pos^{bus} p:3 pos^{bus},æquantur 5 quan^{bus} p:3 pos^{bus} p: 136,inde abiectis similibus relinquuntur 17 pos^{es} æquales 136, quare diuiso 136 per 17 exibit 8,positionis ęstimatio,seu numerus primi h,abuit itaq; primus 8,secundus 12,& q̃muis aliter hęc etiā solui possint,hoc tamen ꝓprium est magis & purū,ut uno eodemq; impetu tota quæstio absoluat̃,& si etiam primum exemplum per solam rem ostendi queat.

4 pos.p:48 æq̃les 6$\frac{2}{3}$ quan:
4 pos.æq̃les 20 p:1 quan:
4 pos.p:68 p:1 quan:æq̃les
4 pos, p:6$\frac{2}{3}$ quan:
5$\frac{2}{3}$ quan:æqualis 64
5 quan: æqual. 36 p:3 pos,
5 quan p:100 ęqual.20 pos.
5 quan:p:20 pos.æqual.
5 quan:quan:p:3 pos.p: 136
17 pos. æquales 136

Exemplum 3^{m} satis accomodatum inuenias tres quantitates quarum p^{a} cum 2^{a} sit sexqui altera p^{a} cum 3^{a} & p^{a} cum 3^{a} sit sexqui altera 2 cum 3^{a}.pone tertiam 1 secunda 1 pos. p^{am} 1 quan:facilius tamen hoc modo:pone tertiam 1 pos . secundam 1 quan: igitur aggregatum ex prima & tertia erit 1$\frac{1}{2}$ pos.p: 1$\frac{1}{2}$ quan: detracta tertia relinquetur prima $\frac{1}{2}$ pos.p:1$\frac{1}{2}$ quan.Et similiter quia aggregatum primę & 2^{a} est sexqui alterum aggregato primę & tertię erit aggregatum primę & secundę 2$\frac{1}{4}$ pos.p: 2$\frac{1}{4}$ quan: Et quia secunda quantitas fuit 1 quan: igitur prima erit residuum 2$\frac{1}{4}$ pos.p:1$\frac{1}{4}$ quan prima igitur quantitas primo modo fuit $\frac{1}{2}$ pos.p:1$\frac{1}{2}$ quā:& secūdo modo 2$\frac{1}{4}$ pos.p:1$\frac{1}{4}$ quan: Et hæc erunt inter se æqualia ex prima Animi sententia Euclidis & rursus per tertiam earundem detractis utrinq; $\frac{1}{2}$ pos. & 1$\frac{1}{4}$ quan:relinquetur 1$\frac{3}{4}$ pos.æqualis $\frac{1}{4}$ quan:igitur 1 quan: ęquabitur 7 pos.po

sita

sita igitur tertia 1 pos. fuerit 1 erit secunda quæ est 1 quan. 7 & quia aggregatum est 8 & aggregatum primę & tertiæ est illi sexqui alterum, erit 12 & cum sit 1 erit prima 11. igitur quãtitates erunt prima 11 secunda 7, tertia 1 & aggregata 18.12.8. in sexquialtera proportione uelut propositum fuit. Alio primo modo peruenis ad 1 quan ęqualem $1\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{1}{2}$ & 1 pos. æqualem $\frac{1}{2}$ quan p: $1\frac{1}{2}$ igitur duplũ 2 pos. æquabuntur 1 quan p: 3 sed iam ostendimus 1 quan etiam æqualem $1\frac{1}{2}$ pos. $\frac{1}{2}$ igitur 2 pos. æquabunt $1\frac{1}{2}$ pos. d: $3\frac{1}{2}$ igitur $\frac{1}{2}$ pos. æquatur $3\frac{1}{2}$ & 1 pos. ęquabitur 7. per idem cum 1 quant æqualis sit $1\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{1}{2}$ & 1 pos. sit æqualis $\frac{1}{2}$ quam p: $1\frac{1}{2}$ erit 1 quan. æqualis $\frac{3}{4}$ quan. p: 2 $\frac{1}{4}$ igitur $\frac{1}{4}$ quan. æqualis $2\frac{3}{4}$, igitur 1 quan erit æqualis 11. Et est pulchrior modus quia obcramus per tres quantitates.

De secunda quantitate incognita multiplicata. CAP. X.



Vm uerò duę quantitates incognitę multiplicantur, aut in se ducantur quatuor fient modi, quorum maior pars tria habet membra.

DEMONSTRATIO.

Primus est, cum quadratum unius, & quantitates ipsę comparantur. Sit igitur primo quadratum a c, cuius latus a b, æquale duplo a b & quintuplo e, gratia exempli, igitur posita b d æquali numero rerum, scilicet 2, erit a d ęquale duplo a b, igitur c f æquatur quintuplo e, quare ex 15a sexti Elementorum, a b ad e, ut 5 ad c d est autem a b positio, & c d positio m: 2, & 5 numerus cognitus, quare regula est.



REGVLA.

Posita re quãtalibet, duc eam in se, detracto numero rerũ, & quod exit, diuide per numerũ ignotæ quantitatis, exibit æstimatio ignotę quantitatis. Exemplũ, ponatur res 7, ducatur in 2 m: se, quia positum fuit, ut æquaretur duabus rebus, & quinque quantitatibus, fiet 35, diuide 35, per 5 numerũ quantitatum, exit quan: etiam 7, & si ponatur res 10, ducemus eam in 2 m: id est in 8, & fiet 80 unde diuiso 80 per 5 exit 16, quantitas 2a. Quod si quantitas 2a ponatur cognita, multiplicabimus eam p̄ suũ numerum & producto addemus quadratum dimidij ipsius numeri rerum, & radix totius, addito dimidio numeri rerum est æstimatio rei Exemplum, sit secunda quantitas 16, ducemus in 5 fit 80, adde 1, quadratum dimidij numeri rerum, fit 81, huius R: est 9, cui addito dimidio numeri rerum fit 10, quantitas ipsius rei.

DEMONSTRATIO.

Rursus, sit decuplũ a b, ęq̃le q̃drato a b, & septuplo e, gratia exem

pli, & sit q̃dratũ a b superficies a c & b d sit 10. igit̃ septuplũ e ęq̃le est f d superficiei, & ut in precedẽti, a b ad e, sic 7 ad c d, quare regula est, cum res æq̃ntur q̃drato rei & quantitatibus

REGVLA.

Positã rem quantamcunq; libuerit, minuemus ex numero rerum, & ducemus eam in residuũ, pro ductũ diuidemus cum numero quantitatũ, quod exit est quantitatis æstimatio. Exemplum, ponatur hoc in casu res 8, minue ex 10 numero rerum, relinquuntur 2, quos duc in 8, fit 16, diuide per 7 numerum quantitatũ, exit $2\frac{2}{7}$ æstimatio quantis, quod si secunda quantitas cognita sit, ducemus eam in numerum suũ, & quod producitur, â quadrato dimidij numeri rerum minuemus, & radix residui, addita uel detracta, à numeri rerum dimidio, ostendit ęstimationẽ rei. Exemplum, ponatur q̃ntitas secunda $2\frac{2}{7}$, ducatur in 7 numerum quantitatum, fit 16, abijce hunc numerum ex 25, quadrato dimidij 10 numeri rerum, & relinquitur 9, cuius radix addita uel detracta à 5 dimidio 10 numeri rerum, ostendit 8 uel 2, æstimationes ipsius rei.

DEMONSTRATIO.

Sit etiam e numerus, ęqualis quadrato a b, quod est a c, & numero a b qui est superficies f d, posita igitur a b prima, numero e secunda, c tertia, b d quarta, erit proportio a b ad e, ut numeri e ad b d, quare regula erit, cũ quantitates æquantur rebus & quadrato rerũ.

REGVLA.

Posita rem quantamcumq; libuerit, ducemus in aggregatum ex ipsa & suo numero, & productum diuidemus per numerum quantitatum, & quod exit est æstimatio quantitatis. Exemplum, 5 quantitates æquantur 7 rebus, & quadrato rei, & res est 3, dicemus igitur, duc 3 in 10, aggregatum 3 æstimationis rei & 7 numeri rerum. fit 30, diuide per 5, numerũ q̃ntitatum, exit 6, æstimatio quantitatis. Quòd si quantitas secunda sit cognita, ducemus eam in suum numerum, & producto addemus quadratum dimidij numeri rerum & radix totius, detracto dimidio numeri rerũ, est æstimatio rei. Exemplum, ponatur 6, quantitatis ęstimatio, quando 5 quanitatis ęq̃les sunt 7 rebus, & quadrato rei, duc igitur 6 æstimationem quantitatum in 5, numerum quantitatum, fit 30, adde his quadratum $3\frac{1}{2}$ dimidij 7 numeri rerum, scilicet $42\frac{1}{4}$, ab huius radice, quæ est $6\frac{1}{2}$, si auferas $3\frac{1}{2}$, dimidium numeri rerum, relinquetur 3 æstimatio rei.

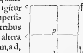
Notandum. Solemus autem his uti positionibus, cum duorũ numerorũ, qui ab initio ponunt̃, nulla exprimit̃ comparatio, nec in aggregato nec in differẽtia, nec in multiplicatione, nec in diuisione, seu ꝓportione, nec in radice, his enĩ quinq; modis cõparant̃ numeri, quare si unus

consistat,

consistat, nulla est secundæ quantitatis utilitas, sed una positione quæstio soluitur.

DEMONSTRATIO.

Quod si productum, ex re in quantitatem, quantitatibus & rebus comparetur, consurgent duo modi tantū, aut enim tale productum quantitatibus & rebus æquabitur, aut res æquabuntur producto & quantitatibus, sit igitur res a b, quantitas ac numerus quantitatum a d, numerus rerum a e, erunt igitur ex supposito, duæ superficies d c, & b e, æquales a f, est autem a f æqualis quatuor superficiebus, g a, g b, g c, g f, igitur hæ quatuor superficies, æquales sunt superficiebus d c & b e, detractis itaq; æqualiter tribus superficiebus g a, g b, g c relinquetur altera g a, æqualis g f, quare ex 15 6 Elementorum, a d, ad d b, ut c e ut e a, proportio igit̄ numeri quantitatum, ad residuum ex re, ut residui quantitatis, ablato numero rerum, ad numerum rerum, secundum hoc erit regula.



REGVLA.

Si nota fuerit res, abijciemus ex ea numerum quantitatū, & cum residuo diuidemus productum, ex numero rerum in numerū quantitatum, quod exit est addendum numero rerum, & totum est quantitas.. Exemplum, sint 10 res & 12 quantitates, æquales producto rei in quantitatem, & sit quantitas 18, tunc abijcies econtra, 10 numerū rerum, ex 18 quantitate, & relinquitur 8, cum quo diuide 120, productum ex 10 rerum numero, in 12 quantitatum numerum, & exit 15, quem adde ad 12 numerum quantitatum, fit 27, rei æstimatio, unde 10 res, sunt 270, & 12 quantitates sunt 216, quæ iuncta faciunt 486, productum 18 q̄ntitatis in 27 rem, & ita posuimus exemplum, regulę conuersum, ut intelligas unā & eandem esse rationē. Quod si productum ipsum cognitum sit, diuide ipsum productum per numerum q̄ntitatum, si sit minor numero rerum, aut per numerum rerū, si ille sit minor numero q̄ntitatum, & dimidium exeuntis, duc in se. à q̄ abijce illud, quod prouenit, diuiso producto ex numero maiore in productum quantitatis, in rem, per numerum minorem, seu numerus rerum sit maior seu minor, & re residui, addita uel detracta ab eo quod in se duxeras, ostendit æstimationē quantitatis, aut rei scilicet, q̄ minore numero describit, inde diuiso per eam producto, exit illa, q̄ est maiore numero desinita. Exemplum, 2 res & 6 q̄ntitates, æq̄les sunt q̄ntitati rei, quę est

res	quan:	productū
2	6	64

32
16 —— 256
6 —— 64 $\frac{192}{64}$
384 8
$\frac{2}{192}$

gratia

gratia exempli 64, diuido 64 per 2 minorē quàm 6, exit 32 cuius dimidiū 16 in se duco, & fit 256, abijcio ex hoc, 192, qui prouenit, diuiso 384 producto 6. in 64, per 2, relinquuntur 64, cuius radix est 8, quę addita uel detracta à 16 numero, quem in se duxisti, ostendit rei ęstimationem 8, uel 24. quare si res ualet 8, quātitas etiam erit 8, diuiso enim 64 per 8, exit 8, & si res ualet 24, quātitas est 2 $\frac{2}{3}$, diuiso 64 per 24, & in utroq; casu, 2 res & 6 quātitates, ęquantur 64 quantitati rei.

DEMONSTRATIO.

5 Quod si latus unum, æquatur producto unius in alterum & reliquo lateri, sit latus illud a b, & relinquū a e, numerus uero lateris a b est a c superficies, igitur e f, fit ex supposito, ex a e in suum numerum, eadem autem fit ex a b in e c, proportio igitur a b ad a e, ut numeri a e ad e c, est autem e c residuum a e quantitatis, & a c numeri rerum, quare regula erit.

REGVLA.

Cum fuerint res æquales quantitati rei, & quantitatibus, & nota fuerit quātitas, minuemus eam ex numero rerum, deinde ducemus quantitatem in suum numerum, & productū diuidemus per tale residuum, quod exit, est ęstimatio rei. Exemplū, 10 res, ęquantur quantitati, rei, & quatuor quātitatibus, & quantitas ipsa est 8, aufero 8 ex 10, relinquitur 2, duco etiam 8 quantitatem, in 4 numerum ipsius, fit 32, quem diuido per 2 residuum relictum, exit 16, æstimatio rei, & ubi prima detractio nequiret fieri, casus nō potest in ueris numeris esse. Si uerò non quantitas, sed ipsa res, sit cognita, quia ex a b, in a c, fit, quantū ex a e in aggregatū ex a b & numero a e, diuidemus productum ex numero rerum in æstimationem rei, per aggregatū ex re & numero quantitatum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum, 10 res æquantur quantitati rei, & 4 quātitatibus, & res est 16, duco 16 rem in 10 numerum rerum, fit 160, diuido per 20 aggregatum ex 4 numero quantitatum & 16 rei æstimatione, exit 8, æstimatio quantitatis, si uerò quantitas rei cognita esset, duces talem quantitatem rei, in numerum quantitatum, & productum diuides per numerū rerum, cui exeunti adde quadratū dimidij eius quod exit, diuisa quantitate rei per numerū rerum: & radix aggregati, addito dimidio, quod prius in se duxeras, est rei ęstimatio. Exemplum, sint 4 res ęquales 5 quantitatibus, & quantitati rei, quę sit 45, ducam 45 per 5 numerum quantitatum, fit 225, diuido per 4 numerum rerum, exit 56 $\frac{1}{4}$, cui addo 31 $\frac{41}{64}$ quadratum 5 $\frac{5}{8}$, dimidij prouentus 45 diuisi per 4, & fit totum 87 $\frac{57}{64}$, cuius radici quæ est 9 $\frac{3}{8}$, si addantur 5 $\frac{5}{8}$ dimidium prouentus diuisionis, fiet 15 res.

DEMONSTRATIO.

6 Cum uerò quadratum rei: & quantitas rei, & res, inuicem compa-
rantur

rantur, fiunt modi tres, primus est, cum quadratum rei, æquale est quantitatibus rerum & rebus, & sit a b res, cuius quadratum a c, & sit b f quantitas, & a d quantitates rerum, & erit, ut quoties b f in b d continetur, totus sit numerus quantitatis rei, igitur exit rerum numerus, quia igitur b c æqualis est a b, & c d est numerus rerum, erit ut detracto numero rerum ex re, relinquatur b d, productum ex numero quantitatis rei, in quantitatem. unde regula.



REGVLA.

Cum quadratum rei æquatur rebus, & quantitatibus rerum, si res est cognita, auferemus ex ea numerum rerum, residuum diuidemus per numerum quantitatis rei, & prodi[illegible] quantitas. Exemplum, 10 res cum 4, quantitatibus rerum, [illegible]quantur quadrato rei, & res est 30, aufero 10 ex 30, relinquitur 20, [illegible] diuido per 4, numerum quantitatis rei, & exit 5 æstimatio quantitatis. Quod si quantitas nota sit, ducemus eam in numerum quantitatis rei, & producto addemus numerum rerum. & constabitur rei æstimatio. Exemplum, 10 res & 4 quantitates rei, æquantur quadrato rei, & quantitas est 7, ducemus 7 in 4 numerum quantitatis, & fiet 28, cui addemus 10 numerum rerum, fiet æstimatio rei 38. Si uero productum ex re in quantitatem cognitum fuerit, ducemus ipsum in numerum quantitatum rerum, & ei addemus quadratum dimidij numeri rerum, & radix totius cum dimidio numeri rerum superaddito, est æstimatio rei. Exemplum, quadratum rei æquatur 10 rebus, & quatuor quantitatibus rerum, & quantitas rei est 50, ducemus 50 in 4 numerum suum, id est quantitatum rerum, & fit 200, cui addemus 25, quadratum dimidij 10 numeri rerum, fit 225, cuius radici addo 5, dimidium numeri rerum, & fit 20, rei æstimatio, unde diuiso 50 producto rei, in quantitatem exit $2\frac{1}{2}$, æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & numero rerum, ponemus rem a b, & q̃ntitatẽ b c, & quantitas rei a c, ea causa necessario erit & d c numerus rerũ, & a d erit aggregatũ quadratorum, igitur detracta d c ex b c, relinquetur b d, qua diuisa per numerum quadratorum, prodibit b f æqualis a b. regula igitur est.



REGVLA.

Cum fuerit quãtitas rei æqualis quadratis rei & numero

mero rerum,& fuerit nota res, ducemus eam in numerum quadratorum,& producto addemus numerum rerum,& cōflabitur quantitas. Exemplum,quantitas rei æquatur 6 quadratis rei,& 10 rebus,& res est 4, duc 4 in 6 numerum quadratorum, fit 24, adde ei 10, numerum rerum, fit 34, æstimatio quantitatis. Quod si quantitas cognita sit, auferemus ex ea numerum rerum, & residuum diuidemus per numerum quadratorum rerum, quod exit, est æstimatio rei. Exemplum, quantitas rei æquatur 6 quadratis rei, & 10 rebus, & quantitas ipsa est 34, aufero 10 de 34, relinquitur 24, quem diuido per 6 numerum quadratorum, exit 4, æstimatio rei. Si uero quantitas rei cognita sit, diuidemus eam per numerum quadratorum, & prodeunti addemus quadratum dimidij eius, quod exit diuiso numero rerum per numerum quadratorum rerum, & radix totius, cum detractum fuerit idem dimidium erit rei æstimatio. Exemplum. Quantitas rei ęquat 6 quadratis rei, & 60 rebus, & quantitas rei est 1200, diuide 1200 per 6 numerum quadratorum rei, exit 200, cui addo 25, quadratū 5, dimidij prouentus 60 numeri rerum, diuisi per 6 numerum quadratorum, fit 225, à cuius radice, quæ est 15, aufero 5 dimidium ipsius prouentus, & relinquetur 10, rei æstimatio, inde diuiso 1200, qui est quantitas rei: prodit 120 æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

8 Quód si numerus rerum, sit æqualis quadrato rei & quantitatibus rerum(etenim ad unum quadratum, uel ad unā quantitatē rei, per cōmunem diuisionem, semper, ut in uniuersis dictū est capitulis, reducere licet) ponemus a b rem, quadratum eius a c, numerum rerum b d, erit igitur e d numerus quantitatis rei, & c d numerus productus ex numero quantitatum in quantitatem, quæ sit c f, quia igitur c d, est residuum a b & b d, erit regula hæc.



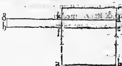
REGVLA.

Cum fuerit numerus rerum, æqualis quantitatibus rerum, & quadrato rei, & fuerit res cognita, auferemus eam ex suo numero, & residuū diuidemus per quantitatis rei numerum, quod exit, est quantitatis æstimatio. Exemplum: 10 res, ęquantur quadrato rei, & tribus quātitatibus rei, & res est 4, auferemus 4 ex 10, relinquuntur 6, diuido per 3, numerū quantitatum rei, exit 2, ęstimatio quantitatis. Si uero quātitas cognita sit ducemus eam in numerum quantitatis rei, & productū auferemus ex numero rerum, residuum est rei ęstimatio. Exemplum: 10 res ęquantur quadrato rei, & producto rei in quantitatē ter, & quantitas est 2 duce-

ducemus igitur 2 æstimationem quantitatis, in 3, numerum quantitatis rei, & producitur 6; quem aufero ex 10, numero rerum, relinquitur 4, æstimatio rei. Si uero productum ex re, in quantitatem, cognitum fuerit, ducemus illud in numerum suum, & productum auferemus à quadrato dimidij numeri rerum, & radix residui addita uel detracta, ab ipso dimidio numeri rerum, ostendit æstimationem rei. Exemplum, 10 res, æquantur quadrato rei, & 3 quantitatibus rerum, & quantitas rei est 8, ducam 8 in 3, numerum quantitatis rei, fit 24, hunc abijciemus ex 25 quadrato 5 dimidij 10, relinquetur 1, cuius R quæ est 1, addita uel detracta ex 5, ostendit 6, uel 4, æstimationes rei, unde diuiso 8 quantitate rei, per 6, uel per 4, exit $1\frac{1}{3}$ uel 2, æstimatio quantitatis.

DEMONSTRATIO.

Quod si quadratum rei, & quantitas rei, & quantitas inuicem compararentur, consurgunt tres alij modi, sit igitur primo quadratum rei, æquale quantitatibus rerum, & numero quantitatum, & ponatur a b res ipsa, cuius quadratum a c, æquale sit quantitatibus rerum (quæ sint a d, ita ut d e, sit quantitas) & numero quantitatum d e, qui sit f h, eritque superficies g f, æqualis ex supposito, superficiei c k, quare ex 15 sexti Element. a b, ad d e, uelut h f, ad d c, est aūt a b res, d e, quantitas, h f numerus quantitatum, c d residuum rei, & producti ex numero quantitatis rei in ipsam quantitatem, quare regula est.



REGULA.

Cum quadratum rei æquale fuerit productis, ex quantitate in rem & in numerum, fueritque res ipsa cognita, ducemus rem in numerum quantitatum rerum, & producto addemus numerum quantitatum, & cum aggregato diuidemus quadratum rei, prouentus est æstimatio quantitatis. Exemplum, quadratum rei, æquale sit sex quantitatibus rerum, & 20 quantitatibus, & ipsa res sit 12; duco 12, in 6 numerum quantitatis rei, fit 72, cui addo 20 numerū quantitatum, fit 92, cum hoc diuido 244 quadratum rei, exit $1\frac{13}{23}$, quantitas ipsa: si uero quātitas cognita sit: ducemus eam in numerum suum, & seruabimus productum, deinde ducemus eandem in numerum quantitatis rerum: huiusque producti dimidium, in se ductum, addemus priori producto & radici ipsius aggregati, abijciemus dimi-

 dium

dium quod in se duxeramus, & totum est æstimatio rei. Exemplum Quadratum rei, æquale sit 12 quantitatibus, & 5 quantitatibus rei, & quantitas ipsa est 2, ducam a quantitatem, in 12 numerum suum, fit 24, deinde ducam eandem quantitatem 2, in 5 numerum quantitatis rei, & fit 10, huius dimidium quod est 5, duco in se, fit 25, addo ad 24, iam seruatum fit 49, huius radici quæ est 7, addo idem dimidium quod est 5, fit 12, æstimatio rei. Vbi autem nota esset quantitas rei (& est in figura superficies c k) ducemus eam in suum numerum, & producti tertiam partem, ad cubum reducemus, ducemus & quantitatem rei in numerum quantitatum, & dimidium producti in se multiplicabimus, & ab hoc auferemus partem quam ad cubum duxeramus, id est cubum ipsum, tertiæ partis, primi producti, quem seruasti, & radicem huius residui, addemus & minuemus, à dimidio secundi producti, & radices cubicæ aggregati, & residui simul iunctæ, sunt æstimatio rei. Exemplum. Quadratum rei, æquale est 12 quantitatibus, & 2 quantitatibus rei, & quantitas rei est 24; ducam 2, in 24, fit 48, huius tertiam partem, quæ est 16, ducam ad cubum, fit 4096, ducam etiam 24 in 12, fit 288, cuius medietatem in se duco, & fit 144 medietas, & eius quadratum, 20736, ab hoc aufero 4096, relinquitur 16640, cuius radicem addo & minuo à 144, fiunt 144 p: R 16640 & 144 m: R 16640, horũ radices cubice iunctæ, sunt rei æstimatio.

Quad. rei.	Quan:	Quan:rei
	12	2
Quan:rei	24	
	288	48
	144	16
	20736 —	4096
	16640	
	144 p: R 16640	
	144 m: R 16640	

Quòd si ex numero per æqualia diuidendo, sumpta medietas, non producat quadratum æquale, aut maius cubo tertiæ partis primi producti, operaberis per residuum regulæ capituli, cubi æqualis rebus & numero, nam facta multiplicatione per productum, ut in exemplo per 24, qui numerus est quantitas rei, erit cubus æqualis rebus & numero: rebus quidem productis ex quantitate rei in numerum suum: numero autem producto ex quantitate rei in numerum quantitatum, ut in exemplo dictum est, quod quadratum rei æquale fuit 2 quantitatibus rei, & 12 & quantitatibus, & quod quantitas rei est 24, dicemus igitur cubus æquatur 48 rebus, p: 288 numero, & 48 producitur ex 24 in 2, & 288 ex 24 in 12, ergo ponamus quod quadratum rei, æquale sit 2 quantitatibus rei & 3 quantitatibus, & quantitas rei fit 8 ducemus 8 in 2, & 3, & producentur 16 & 24, igitur cubus æquabitur 16

rebus

rebus p:24,& res ualet ℞ 13 p:1, ex capitulo suo, inde diuiso 8 quantitate rei, per ℞ 13 p:1, exit ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quantitas ipsa, est autem quadratum ℞ 13 p:1, hoc 14 p: ℞ 52 & quantitas rei est ℞ 75 $\frac{1}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, & est 8, cuius duplum est 16, & tres quantitates sunt, ℞ 52 m: 2, quæ iunctæ cum 16, duplo quantitatis rei, faciunt 14 p: ℞ 25, quadratum rei.

Quad. rei	Quan:	Quan:rei
	3	2
		8
	24	16

Nota quòd in hac regula, semper res est media proportionalis, inter quantitatem & aggregatum ex numero quantitatum, & producto rei in numerum quantitatis rei, ut in exemplo, ℞ 13 p:1, quæ est res, est proportionalis inter ℞ 5 $\frac{7}{9}$ m: $\frac{2}{3}$, quæ est quantitas, & ℞ 52 p:5, qui constat ex 3, numero quantitatum, & producto ex & 13 p:1, re ipsa, in 2, numerum quantitatis rei. Nota 1

Nota etiã, quòd regula hæc pendet ex capitulo cubi æqualis rebus & numero, uelut sequẽs, ex capitulo cubi & numeri æqualium rebus, & ultima, ex capitulo cubi & rerum æqualium numero. Nota 2

Nota etiam, quòd res est eadem, quæ quæritur in capitulo cubi æqualis rebus & numero, sed quantitas est numerus, qui prouenit diuiso quocunque numero, per rem ipsam, nam eidem capitulo, cubi æqualis rebus & numero, competit una sola res, sed infinitæ quantitates, uelut dictum est hic, quod res est ℞ 13 p:1, & diuisimus 8, quantitatem rei, si autem ponatur cubus æqualis 16 rebus & 24 numero, erit res semper ℞ 13 p:1, sed posita quantitate rei 4, erit numerus quantitatis 6, & quantitatis rei 4, & quantitas ℞ 1 $\frac{4}{9}$ m: $\frac{2}{3}$. Nota 3

DEMONSTRATIO.

Quod si quantitas rei, æqualis sit quadratis rei & quantitatibus, ponemus a b rem, & quantitatem b c, & numerum quadratorum, secundum quem b g, æqualis a b, continetur in b d, & erunt quadrata a d, iuncta, & e c residuum, æquale numero quantitatum, & sit numerus quantitatũ f c, erit igitur f b, æqualis e c, quare b c quantitatis, ad a b rem, ut d c residui rei, ductæ in numerum quadratorum, à quantitate ad c f numerum quantitatum, erit etiam ex hoc e b residuum, æquale a f residuo, quare a b media proportionalis inter a h & b c, diuisam secundum numerum, secundum quem b g continetur in b d. 10



Nota igitur, quod in hac tota regula, res media proportionalis est, inter quantitatem diuisam, per numerum quadratorum, & residuum rei & numeri quantitatum. Nota

REGVLA.

Regula igitur est, cùm quantitas rei, æqualis fuerit quadratis rei & quantitatibus, & res nota fuerit, ducemus eam in se, deinde in numerum quadratorum, & productum diuidemus, per residuum rei à numero quantitatum, & quod exit, est quantitas. Exemplum, Quan: rei æquatur tribus quadratis rei, & 12 quantitatibus, & sit res 20, gratia exempli, duco 20 in se. fit 400, duco 400 in 3 numerum quadratorum, fit 1200, diuido 1200, per 8, differentiam rei & numeri quantitatum, exit 150, quantitas ipsa. Si uerò quantitas ipsa cognita sit, non res, duc eam in numerum quantitatum, & productum diuide per numerum quadratorum, quod exit, abijce ex quadrato dimidij prouentus quantitatis diuisæ per numerum quadratorum, & radix residui, addita uel detracta, à dimidio eiusdem prouentus, ostendit æstimationem rei. Exemplum. Quantitas rei, æqualis est 4 quadratis rei, & 3 quantitatibus, & quantitas ipsa est 50, duc 50 in 3 numerum quantitatum, fit 150, diuide 150, per 4 numerum quadratorum, exit $37\frac{1}{2}$, deinde diuide 50 per 4 scilicet quantitatum per numerum quadratorum, exit $12\frac{1}{2}$, huius dimidium, quod est $6\frac{1}{4}$, due in se, fit $39\frac{1}{16}$, à quo abijce $37\frac{1}{2}$, relinquuntur $1\frac{9}{16}$, cuius radix est $1\frac{1}{4}$, quæ addita uel detracta à $6\frac{1}{4}$, ostendit æstimationes rei, $7\frac{1}{2}$, uel 5. Si autem productum seu quantitas rei cognita sit, ducemus quantitatem rei in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, exiens est numerus, qui cum cubo æquatur tot rebus, quotus est numerus qui prouenit diuisa quantitate rei per numerum quadratorum. Exemplum, Quantitas rei, quæ sit 1500, æqualis est 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, ducemus igitur 6 in 1500, fit 9000, diuide per 4 numerum quadratorum, exit 2250, numerus, qui cum cubo æquatur 375 rebus, est autem 375 numerus, qui prouenit diuiso 1500 numero quantitatis rei, per 4 numerum quadratorum, per capitulum autem suum, res ualet 10, uel R 300 m: 5, & uterque istorum numerorum, potest esse rei æstimatio, in casu isto, quando quant^{is} rei, quæ est 1500, æquat 4 quadratis rei, & 6 quantitatibus, & æstimatio quantitatis habetur, diuiso 1500 qui est æstimatio quantitatis rei, per alteram æstimationem rei.

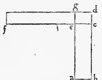
Quan: rei	Quad. rei	Quan:
1500	4	6
	375	1500
2250	1000	

DEMONSTRATIO.

Cùm uerò quantitates c d, in numero c f, æquales fuerint quadratis a b rei, & quantitati rei d e, reducendo ad unam quãtitatẽ rei,

erit

erit detracta communi superficie d e, superficies g f æqualis a c, quare quadratum a b, per primam sexti Elementorum, æquale superficiei, ex e g in partem e f talem, qualis a b, est pars b c, igitur ex 16ª sexti Elementorum, a b media est inter d c & partem illam ex e f, unde regula.



REGVLA.

Cum fuerint quantitates, æquales quantitati rei & quadratis rerum, & fuerit nota res, ducemus eam in se, deinde productum in numerum quadratorum, & diuidemus, quod producitur ultimò, per numerum quantitatum, detracta re, & exibit quantitas. Exemplum, 12 quantitates, æquantur quantitati rei, & tribus quadratis rei & res est 4, ducam 4 in se, fit 16 ducam 16 in 3, numerum quadratorum rei, fit 48, diuidam 48, per 12 numerum quantitatum, detracto 4 re, & est diuidere per 8, exit 6, quantitas ipsa. Si uero quantitas cognita sit, duc eam in numerum suum, & productum diuide per numerum quadratorum rei: ei prouentui adde quadratum dimidij eius, quod prouenit, diuisa quantitate per numerum quadratorum, & radix totius, detracto eodem dimidio, est æstimatio rei. Exemplum, 12 quan.tes æquantur quan.t rei, & 3 quadratis rei, & quantitas est 6, duco 12 in 6, fit 72, diuido per 3 numerum quadratorum, fit 24, deinde diuido 6 quantitatem, per 3 numerum quadratorum, exit 2, cuius dimidium quod est 1, duco in se fit etiam 1, addo ad 24, fit 25, cuius R 5, detracto 1, dimidio 2, relinquit 4 æstimationem rei. Si uero quant.tis rei nota sit, ducemus eam in numerum quantitatum, & productum diuidemus per numerum quadratorum, & quod exit, est numerus qui æquatur cubo & rebus, quarum numerus est id, quod prouenit diuisa quantitate rei, per numerum quadratorum, inde æquatio rei, est æstimatio quæsita, unde diuisa quan.tis rei, per æstimationem rei: exibit æquatio quantitatis, Exemplũ, 12 res, æquales sunt quan.ti rei, & 3 quad. rei, & quan.s rei. est 24, duco 24 in 12, fit 288, diuido per 3, exit 96, deinde diuido 24 per idem 3, numerum quad. rei, exit 8, igitur cubus p: 8 rebus: æquatur 96, tunc uero per capitulum suum, res ualet 4. Ideo 4 est rei æstimatio, cum quo diuide 24 quantitatem rei, exit 6 quantitas ipsa.

Quad. rei	Quan: rei	Quan:
3	24	12
8		288
96		

Scias,

Notandum. Scias: quòd quodlibet capitulum, seu regula ex præcedentibus habet omnes proprietates contentas in eadem regula, in singulis modis, quamuis modò utamur una, modò alia, secundum quòd illud quod est notum, aliud fit. Exemplum, in decima regula sunt quinque proprietates. Prima, quòd proportio quantitatis ad 3 rem, est ut ducta re in numerum quadratorum, & detracta quantitate, ad numerum quantitatum. Secunda, quòd res est media proportione, inter quantitatem diuisam per numerum quadratorum, & differentiam rei à numero quantitatum. Tertia, quòd ducta re in se, & post in numerum quadratorum ducto quadrato, tantum fit quantum ex quantitate in residuum rei & numeri quantitatum. Quarta & Quinta, sunt reliqui duo modi procedendi illius regulæ, ad inuentionem rei, horum exempla in quæstionibus subiungere libuit.

QVAESTIO I.

Inuenias duos numeros, quorũ quadrata iuncta, sint 100, & productum unius in alterum duplum sit aggregato eorum. Ponemus primum rem, secundum quantitatem, igitur quantitas rei, æqualis est 2 rebus, & 2 quantitatibus, quare ex quarta regula, proportio residui rei, ad 2, ut 2 ad residuum quantitatis, igitur erunt tres quantitates proportionales, residuum rei, 2, & residuũ quantitatis, res autem constat ex suo residuo & 2, sed quantitas ex suo residuo & 2, igitur res est aggregatum primæ & secundæ trium quantitatum proportionalium, & quantitas aggregatum secundæ & tertiæ, igitur ex dictis in capitulo trium quantitatum proportionalium, quadratum aggregati primæ & secundæ cum quadrato aggregati secundæ & tertiæ, & cum quadrato secundæ, æquantur quadrato aggregati ipsarum trium quantitatum, at uerò quadratum aggregati primę & secundę, & quadratum aggregati secundæ & tertiæ ex supposito faciunt 100, & quadratum secundæ est 4, quia secunda quantitas proportionalis fuit 2, igitur quadratũ aggregati omnium trium quantitatũ est 104, igitur tres quantitates ipsæ iunctæ, sunt ℞ 104 & quia secunda est 2, erunt reliquę, scilicet prima & tertia, ℞ 104 m: 2 fac igitur ex ℞ 104 m: 2, duas partes, producentes 4 quadratum, 2, & erunt ℞ 26 m: 1 p: ℞ v: 23 m: ℞ 104, & ℞ 26 m: 1 m: ℞ v: 23, m: ℞ 104, & quia res constat ex prima & secunda proportionali, & quantitas ex tertia & secunda proportionali, erit igitur ut addamus 2 utriq; parti, scilicet secundam quantitatem, & fiet res ℞ 26 p. 1 p: ℞ v: 23 m: ℞ 104, & quantitas ℞ 26 p: 1 m: ℞ v: 23 m: ℞ 104, horum quadrata iuncta sunt 100, præcise, & productum unius in alterum est ℞ 416

p: 4

p:4, duplum aggregati eorũ, uia uerò cõmuni procedẽdo, peruenires ad partes has, quas uides infrà, liquet autẽ quòd illę confusę magis sunt, quamuis superioribus ęquiualeant.

℞ 26 p: 1 p:℞ v:23 m:℞ 104
℞ 26 p: 1 m:℞ v:23 m:℞ 104
℞ v^ma 50 p:℞ v:2068 m:℞ 26624
℞ v ^a 50 m:℞ v:2068 m:℞ 266:4

QVAESTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum q̄drata iuncta sint 100, & quadratum maioris, æquale sit ductui maioris in minorem quater cum octuplo maioris. Ponemus maiorem rem, minorem quantitatem, eritq; quadratum rei, æquale 4 quantitatib. rei & 8 rebus, quare ex 6ª regula, auferemus 8 ex re, & fiet residuum res m:8, unde diuisum per 4 exibit $\frac{1}{4}$ rei m:2, & hæc est quantitas quadrata, igitur rei & $\frac{1}{4}$ rei m:2 æqualia sunt 110, quare $1\frac{1}{16}$ quad. p:4 m:1 re, æquabitur 100, & quadratum æquabitur $\frac{16}{17}$ rei, & $90\frac{6}{17}$, quare res est ℞ $90\frac{166}{289}$ p: $\frac{8}{17}$, & quantitas est $\frac{1}{4}$ huius m:2, scilicet ℞ $5\frac{191}{289}$ m:$1\frac{15}{17}$.

QVAESTIO III.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 100, & productum unius in alterum, æquale sit triplo quadrati minoris & sexcuplo eiusdem minoris. Ponemus rem minorem numerum, & quantitatem maiorem, igitur quantitas rei, æquatur 3 quadratis rei & 6 rebus, quare ex septima regula, quantitas est 3 res p:6 quadrata, igitur rei & trium rerum p:6 iuncta sunt 100, igitur 10 quadrata p: 36 rebus p:36, æquantur 100, & 1 q̄d.p,$3\frac{3}{5}$ rei æquatur $6\frac{2}{5}$, res igitur est, ℞ $9\frac{15}{25}$ m:$1\frac{4}{5}$, & quantitas triplum huius p:6, id est ℞ $80\frac{91}{25}$ p:$\frac{1}{5}$.

QVAESTIO IIII.

Fac de 20, tres partes in continua proportione, quarum mediæ q̄dratum ęquale sit duplo producti medię in minorem, & q̄druplo minoris, posita media re, & minore quantitate, erit q̄dratũ rei, æquale 2 quantitatibus rei, & 4 quantitatibus. Quare ex notando primo nonę regulę, res media est proportionalis, inter quantitatẽ & aggregatum ex numero quantitatũ 4, ac producto rei in numerum quantitatis rei, scilicet 2, tertia igit̃ q̄ntitas est 2 res p:4, quia igit̃ 3ª quantitas est 2 res p:4, & 2ª res, & hę cum prima constituunt 10, erit prima 6 m:3 rebus, quare ducta prima in tertiam, fiet quadratum secundæ, igitur 1 q̄dratum æq̄tur 24 m: 6 q̄drauis, quare 7 q̄drata ęq̄ãtur 24, & res est ℞ $3\frac{3}{7}$, & hæc est media, cuius duplum p:4 est tertia, uidelicet 4 p:℞ $13\frac{5}{7}$, inde detracto aggregato secundę & tertię ex 10 relinquitur prima 6 m: ℞ $30\frac{6}{7}$, hæ autem quãtitates proportionales

2 res p:4	res	6 m:3 rebus
4 p: ℞ $13\frac{5}{7}$	℞ $3\frac{3}{7}$	6 m:℞ $30\frac{6}{7}$

ſunt, & quadratum ſecundæ eſt æquale duplo producti ſecundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

De cubo rebus æqualibus numero. CAP. XI.

SCipio Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermè capitulũ hoc inuenit, tradidit uerò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cũ in certamen cũ Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando ueniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quęſiuimus, eamq́ in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubijciemus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus g h, & ſexcuplum lateris g h ęquale 20, & ponam duos cubos a c & c l, quorum differentia ſit 20, ita quod productũ a c lateris, in c k latus, ſit 2, tertia ſcilicet numeri rerum pars, et abſcindã c b, ęqualem c k, dico, quod ſi ita fuerit, lineam a b reſiduũ, eſſe ęqualem g h, & ideo rei æſtimationem, nam de g h iam ſupponebat, quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti ſexti capituli huius libri, corpora d a, d c, d e, d f, ut per d c intelligamus cubum b c, per d f cubum a b, per d a triplum c b in quadratum a b, per d e triplum, a b in quadratum b c. Habebimus igitur quatuor ſuppoſita quorum duo dicta iam ſunt, ſcilicet quod ex a c in c k, uel c b fit 2 et quod differentia cubi à c a cubo c b eſt 20, tertium deducitur ex his & eſt quòd cum id quod producitur ex a b, b c, a c ter ſit æquale differentiæ d e & d a & triplum producti ex a b, a c, b c ſit ſexcuplum a b nam productum ex a c in c b eſt 2 ex primo ſuppoſito, ergo triplum eius eſt ſex, & productum hoc in a b ſexcuplum ipſius a b. hoc autem eſt differentia d e & d a. Quartum quod patet ex primo & ſecũdo corrolario ſexti capituli quòd d f eſt differentia cubi a c cum triplo a c in quadratum c b a cubo c b cum triplo c b in quadratum a c. Ponatur igitur cubus a c, α, cubus a b c, β, triplum c b in quadratum a c, γ, triplum a c in quadratum c b, δ, differentia, α, & β, ε, differentia γ & δ ζ differentia ε & δ a β & γ β igitur cũ ε componatur ex ζ & β ut facile eſt demõſtrare in numeris quos & pro exẽplo a latere ꝓpoſui ε aũt eſt 20 ex ſecũdo ſuppoſito & ζ ſexcuplũ a b & θ cub. a b igitur

cubus

cubus a b cum sexcuplo a b quod est cum sex rebus, nam a b est latus sui cubi, æquatur 20 igitur cũ & b h cubus cum sexcuplo b h æq̃tur 20 erit b h cubus cum sexcuplo b h ęqualia cubo a b cum sexcuplo a b, igitur a b est res, et ipsa est differentia duorum laterum producentium 2, & quorum cubi differunt in 20 quod erat demonstrandum. Ex his conficiemus regulam.

.	24 1	25	
20		13	7
	4 14	18	

REGULA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scilicet quadratam, quam seruabis, uniq; dimidium numeri quod iam in se duxeras, abijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisq; Binomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞ cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei æstimatio. Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8. duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quę est ℞ 108, & eam gemmina bis, alteri addes 10, dimidium numeri; a b altero minues tantundem, habebis Binomium ℞ 108 p:10, & Apotomen ℞ 108 m:10, horum accipe ℞ cub & minue illam quæ est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ b:cub:℞ 108 p: 10 m:℞ v:cubica ℞ 108 m:10.

cub⁹ p:6 reb⁹ ęq̃lis 20
2 20
8 10
108
℞ 108 p:10
℞ 108 m:10
℞ v:cu.℞ 108 p:10
m:℞ v:cu.℞ 108 m:10

Aliud, cubus p:3 rebus æquetur 10: duc 1, tertiam partem 3, ad cubum, fit 1 duc 5, dimidium 10, ad quadratum, fit 25, iunge 25 & 1, fiunt 26, huius radici adde 5, & ab ea minue 5, habebis Binomium ℞ 26 p:5, & Apotomen ℞ 26 m:5, igitur rei ęstimatio est ℞ v:cubica ℞ 26 p:5 m:℞ v:cubica ℞ 26 m:5, experientia sic habetur.

ra:v:cubica ra:26 p:5 m: ra:v:cubica ra:27 m:5
cubi partium ra:26 p: 5 m: ra:26 m:5
hoc autem totum, ut liquet, est 10.

Quad:partium, ra:v:cubica 51 p:℞ 2900 ℞ v:cu^{ca} 51 m:℞ 2600
triplicata q̃drata partium, ℞ v:cub:1277 p:℞ 1895400
ra:b:cubica 1377 m:℞ 1865400 partes ipsæ
m: ra:v:cubica ℞ 26 m: 5. p: ra: v: cubica ℞ 26 p: 5

Producta partium in triplata quadratorum

p:ra:v:cubica 49299354 p: 6885 m: ra:47385000 m:7020
m:ra:v:cubica 49299354 m· 6885 m:ra:47 385000 p:7020

Porro hę ra:cubicę quatuor nominibus constantes, ad duas reduci

 possunt.

poſſunt, cum enim 6885 dempſeris ex 7020, relinquetur 135, detracta etiam radice 47385000, ex radice 49299354, relinquitur ℞ 18954, igitur talia producta erunt ℞ v: cubica ℞ 18954 m: 135 m: ra:v: cubica ra: 18954, p: 135, cubus igitur totus, ex demonſtratis in 3° libro eſt 10 p: ra:v: cubica ra: 18954 m: 135 m: ra:v: cubica ra, 18954 p: 135, at uero tres radices ſeu res ſunt ra:v: cubica ra: 18954 p: 135 m: ra:v: cubica ra: 18154 m: 135.

Iunctis igitur omnibus ſimul, cum radices illæ uniuerſales cubicæ mutuo ſe deleant, fiet aggregatum cubi & trium rerum, 10, ad unguem.

Exemplum tertium, cubus & 6 res æquantur 2, duc 2, tertiam partem numeri rerum, ad cubum fit 8, duc 1 dimidium 2, ad quadratum fit 1, iunge 8 & 1, fiunt 9, huius radix eſt 3, ergo geminatę 3, alteri adde 1 dimidium numeri, fiet 4, ab altero minue 1, ſimiliter dimidium reliquum numeri, fit 2, minue igitur ra: cubi minoris ex maiore, habebis æſtimationem rei, ra: cubicam 4 m: ra: cubica 2.

Memento autem eius, quòd in capitulo de educenda cubica radice in libro tertio dixeramus, quandoque radices illas uniuerſales cubicas, numero integro, uel fracto æquipollere, ut in primo exemplo docuimus, nam ra:v: cubica ra: 108 p: 10 m: ra:v: cubica ra: 108 m: 10, eſt 2 ut ibi ex regula patet, & ut experimento etiam notiſsimum eſt.

Facile autem eſt intelligere tum in hoc capite tum ſequentibus quod habita æſtimatione & numero rerum, habebimus numerum æquationis ducta æſtimatione in numerum rerum, & ei quod producitur addito cubo eiuſdem: aggregatum enim eſt numerus ęquationis uelut 1 cubus p: 3 poſ. ęſtimatio eſt 2, dico duces 2 in 3, fit 6, addeei 8 cubū 2 fit 14 numerus æquationis. Et ſimiliter ſi 1 cu. p: certo numero rerum cubus ęſtimatio ſit ℞ 8 m: 2. gratia exempli, æquetur 20, tunc habebimus numerum rerum ducendo ℞ 8 m: 2 ad cubum fit ℞ 3200 m: 56 detrahe à numero æquationis qui eſt 20, relinquetur 76 m: ℞ 3200, hoc diuide per ℞ 8 m: 2 æſtimationem, exibit numerus rerum ℞ 648 m: 2.

Et ſcias quòd æquatio hæc communis eſſe poteſt omnibus capitulis, uelut cubi & numeri æqualium rebus, ut ſi 1 cu. p: 12 ęquetur 34 poſ. & rei æſtimatio eſt 3 p: ℞ 7 uel 3 m: ℞ 7, ideò ſi uelim 1 cub. p: numero poſ. æqualem 12, ſub hac ęſtimatione erit ex regula pręcedente numerus rerum ℞ 1008 p: 2. Sequendo igitur formam capituli huius, & capiendo tertiam partem numeri rerum quæ eſt ℞ 112 p: $\frac{2}{3}$ & ducendo ad cubum fit ℞ 1905552 p: 224 $\frac{8}{27}$ adde 36 quadratum dimidij 12 numeri æquationis, babebis ℞ v: ℞ 1905552 p:

$260\frac{8}{27}$ cui adde & detrahe 6 & accipe ℞ cu. habebis æstimationem rei ℞ v: cui ℞ v: ℞ 190555 ℞ p: $260\frac{8}{27}$ p: 6 m: ℞ v: cu ℞ v: ℞ 190555 p: $260\frac{8}{27}$ m: 6.

De cubo æquali rebus & numero. CAP. XII.

DEMONSTRATIO.

Sit etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi d c & d e, quorum latera a b & b c, producat tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico a c esse rei quæsitæ æstimationē, cum enim ex a b, in b c, fiat tertia pars numeri rerum, ex a b in b c ter, fiet numerus rerum, & ex a c in productum ex a b in b c ter, fient res ipsæ, posita a c re, at ex a c in productum a b in b c ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex a b in quadratum b c, alia tria ex b c in quadratum a b, hæc igitur sex corpora, æqualia sunt rebus, ipsa uerò cum cubis d c & d f, ex primo supposito capituli sexti constituunt cubum a e, cubi etiam d c & d f, æquiualent numero proposito, igitur cubus a e, æqualis est rebus & numero propositis, quod erat demonstrādum, superest ostendere, quod triplū a c in productum a b in b c, sit æquale sex corporibus, id ostendam, si probauero ex a b, in b c ducto in a c, fieri duo corpora ex a b in quadratum b c, & ex b c in quadratum a b, nam quod fit ex a c in productum a b in b c, æquale est ei, quod fit ex a b in superficiem b e, latera enim omnia omnibus sunt æqualia, sed hoc æquale est ei, quod fit ex a b in c d & d e, quod autem fit ex a b in d c, æquale est ei, quod fit ex c b in quadratum a b, quoniam latera omnia omnibus sunt æqualia, quod igitur ex a c, in productum a b in b c fit, æquale est his, quæ fiunt ex a b in quadratum b c & ex b c in quadratum a b, quod est propositum.

REGVLA.

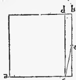
Regula igitur est, cum cubus tertiæ partis numeri rerum, maior non fuerit quadrato dimidij numeri æquationis, auferes ipsum ex eodem, & residui radicem, adde dimidio numeri æquationis, atque iterum minue ab eodem dimidio, habebis ut dicunt, Binomium, & Apotomen, quorum ℞ cubicæ iunctæ rem ipsam constituunt. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 40, duc 2, tertiam partem numeri rerum cubum, fit 8, aufer ex 400, quadrato 20, dimidij numeri, fit 392, huius radicem adijce ad 20, p: ℞ 392, detrahe etiam ab eodem, fit 20 m: ℞ 392, horum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt rei æstimationem

nem, ℞ v: cubicam 20 p: ℞ 302 p: ℞ v: cubica 20 m: ℞ 392. Aliud, cubus æquatur 6 rebus p: 6, tertiam partem numeri rerum, quæ est 2, ad cubum ducito, fit 8, detrahe ex 9 quadrato dimidij 6 numeri æquationis, relinquitur 1, cuius ℞ est 1, hanc adde & minue à 3, dimidio numeri, fiunt partes, 4 & 2, quarum ℞ cubicæ iunctæ, faciunt ℞ cubicam 4 p: ℞ cubica 2, æstimationem rei.

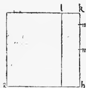
At ubi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, uel ubi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞ $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero æquationis, tunc consules librum Alizæ hic adiectum.

De cubo & numero æqualibus rebus. CAP. XIII.

DEMONSTRATIO.



Hoc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus g h, æqualis rebus a b, quæ describunt quadrata superficie & numero f, & sit basis cubi g h, quadratum g k, cuius pars quarta sit h l residuum autem æquale a d superficiei, latus autem, quod Græci tetragonicum uocant, residui e d sit c e, sit uero m k dimidium h k, à qua abscindatur m n, æqualis c e, dico quod tam h n, quam n k, cubi, cum numero f, æquatur rebus a b, ut numerus rerum & æquationis idem maneat, & primo ostendamus de h n, constat enim cubum h n continere latus suum, h n in quadrato h n, quadratum autem a b) quia g l æqualis est a d, & g l triplum est quadrati h m) æquale est triplo quadrati h m, & quadrato m n, hæc autem superant, ex 2ª Elementorum, quadratum h n, in duplo h m in n h, quare in eo quod fit ex h k in n k, quia h k dupla est ad h m, cubus igitur h n, continet latus suum h n in superficie a b minus eo, quod fit ex h k in k n. At uero, quia cubus g k cõtinebat res seu latera h k in quadrato h k, uel in quadrato a b, cum numero f, igitur ex communi animi sententia, f numerus æqualis est producto ex h k in differentiam quadratorum a b & g k, at differentia g k & a b est, quanta differentia h l & c b, quia a d est



F........ numerus,

æqualis g l differentia autem h l & c b est, ut quadrati h m & m n, igitur ex differentia quadrati h m, & m n in h k, fit f numerus, at uero per eandem, differentia quadratorum h m, seu m k. & m n, est duplum m n in n k, cum quadrato n k, & ideo m n & m k in n k, & ideo h n in n k, igitur ex h k in productum h n in n k fit f numerus, addatur igitur f numerus, cubo h n, & ex alia parte productum ex h k in k n ductum in h n producto ex h n in superficiem a b, minus producto h k in k n, fiet cubus h n cum numero f æqualis h n ductæ in a b, seu rebus ex a b, quod erat probandum. Similiter, quia differentia g k & a b, quæ est h n in k n, ducta in k h, producit f, differentia etiam a b & quadrati k n (cum a b sit æqualis quadratis h m & m k & m n, & ductui k m in m h) æqualis est differentiæ dupli k h in n h à quadrato n h, addito ei rectangulo h n in n k, at quod fit ex h n in n k cũ quadrato n h, æquale est producto ex k h in h n, per 3^am 2^i Elementorum, igitur quadratum a b superat quadratum n k in producto k h in h n semel, cum igitur numerus f, contineat k h in producto k h in h n, & cubus k n contineat k n in quadrato k n, erit ut cubus k n cum numero f, seu cum producto ex k n in rectangulum k h in h n, æqualis producto a b in k n, igitur cubus k n cum eodem numero f, æqualis est a b numero rerum eidem.

REGULA.

Regula igitur est: cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, inuenies æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero, cuius dimidium in se ducito & triplicato, hoc abijce ex numero rerum, & ℞ residui addita dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, uel detracta, ostendit ęstimationem cubi & numeri æqualium rebus. Exemplum, cubus p:3, æquatur 8 positionibus, tunc inuenio æstimationem cubi æqualis 8 rebus p:3, ex pręcedenti capitulo, & est etiam 3, huius dimidium duco in se, fit $2\frac{1}{4}$, triplica, fit $6\frac{3}{4}$, abijce ex 8 rerum numero, fit residuum $1\frac{1}{4}$, cuius ℞ addita uel detracta ab $1\frac{1}{2}$ dimidio æstimationis cubi æqualis rebus & numero, ostendit utrasq; æstimationes quæsitas alteram $1\frac{1}{2}$ p:℞ $1\frac{11}{4}$, reliquam $1\frac{1}{2}$ m:℞ $1\frac{1}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Nunc etiam ostendamus, quomodo maiore æstimatione habita, absq; auxilio præcedentis capituli habeatur & reliqua, & sit, ut ex a d in a c quadratũ fiat numerus æquationis, ita quod quadrata a d & a c iuncta, faciant numerum rerum, eritq; ex octauo capitulo, a d, rei ęstimatio, & sit f h linea, cui si adderetur dimidium a d quadratum totius, æquale foret quadrato a c & quadrato dimidij a d, dico

f h

f h esse secundum aestimationem, quando cubus cum numero ex a d in a c aequalis est rebus in quadrato a c, & quadrato a d, fiat quadratum f g, quod cum quadrato f h aequale sit quadratis a c & a d, iunctis, quia igitur quadratum compositae ex f h & dimidio a d, aequale est quadratis c a & dimidij a d, erit per 4 2ᵢ Elementorum abiecto communi quadrato dimidij a d, quadratum a c aequale quadrato f h, & duplo f h in dimidium a d, quare rectangulo ex f h in a d semel cum quadrato f h, quare ex 16ᵃ 6ᵢ Elementorum a b media proportione inter f h & aggregatum f h & a d, quia uerò quadratum e g, additum producto f h in se, & in a d, tantum facit, quantum additum, quadrato a c, e g uerò & f h quadratum, aequalia sunt quadratis a d & a c, ex supposito, erit quadratum a c & quadratum a d & productum f h in a d, aequale quadratis a c & e g, inde abiecto communiter a c quadrato, erit e g quadratum, aequale ei quod fit ex f h in a d cum quadrato a d, per eandem e f media proportione est inter a d & aggregatū ex a d & h f, cumque similiter, ut ostensum est, a b sit media proportione per 67 lib. de Proport. seu quinti huius inter f h & aggregatum f h & a d, erit quia f h & a d iunctae in utroque ordine sunt prima quantitas, proportio f h, ad a d, ut a b ad e f duplicata, quare ex 17 6ᵢ Elementorum, f h ad a d, ut a c ad e g, igitur ex 34ᵃ 11ᵢ Elementorum, corpus quod sub f h & e g continetur, aequale est corpori sub a d & a c, quare & numero aequationis, cumque quadrata e g & h f, aequentur numero rerum, quia quadratis a c & a d, erit ex octauo capitulo huius, h f etiam aestimatio rei, in eodem capitulo. unde regula.

REGULA.

Duc dimidium maioris aestimationis in se, & triplica, & aufer à numero rerum, & R: residui, detracto dimidio maioris aestimationis, est aequatio quaesita. Exemplum, cubus & 60, aequatur 46 rebus & maior aequatio est 6, pro habenda reliqua duc 3, dimidium prioris aestimationis in se, fit 9, hunc triplica fit 27, abijce 27 ex 46, relinquitur 19, ab huius radice abijce 3, dimidium primae aestimationis, habebis secundam aestimationem, R: 19 m: 3, Ex hoc capite habentur tria corrolaria primum quod aestimatio cubi aequalis rebus & numero est aequalis duabus aestimationibus cubi cum eodem numero aequalium totidem rebus ueluti cu. aequatur 16 rebus p: 21 & aestimatio est R: $9\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$ erunt duae aestimationes cu. p: 21 aequalium 16 rebus simul iunctae R: $9\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$ altera.n. est 3 reliqua R: $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$. Ex hoc corrolario & regulis datus huius capitis sequitur secundum

scilicet

scilicet quod ex mutua multiplicatione & detractione cuiuslibet æstimationis cu. & numeri æqualium rebus oritur altera. Tertium, æstimationes cu. & numeri æqualium rebus se habent in comparatione æstimationis cu æqualis totidem rebus & eidem numero, uelut apothome ad binomium. Ipsæ uero æstimationes capituli cubi & numeri æqualium rebus inuicem se habent ita, ut radices singulorum residuorum sint uelut prima pars Apothome, & dimidium prioris æstimationis ut secunda pars uelut in exemplo superiore habebis æstimationes uicissim acceptas, quale inferius uides & superior earum ut liquet necesario est 3 & minor ℞ $9\frac{1}{4}$ m:$1\frac{1}{2}$. Experiaris & inuenies.

℞ $9\frac{1}{4}$ m:$1\frac{1}{2}$
3
℞ $9\frac{1}{4}$ p:$1\frac{1}{2}$

De cubo æquali quadratis & numero. CAP. XIIII.



Vod si cubus, æqualis sit quadratis & numero, cõuertetur capitulum in cubum ęqualem rebus & numero, primo conuersionis modo, qui est à toto ad partem, nam secundus est a parte ad totum, tertius à differentia partium, quartus à proportione.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur cubus a c, in capituli 12 figura, æqualis 6 quadratis a c, & 100, cumque quadratum a c, constet ex quadrato a b, & gnomone eum circundante, erit cubus a c æqualis quadratis 6 a b, & gnomonibus 6 & 100, gnomo autem constat quadrato b c, & duplo a b, in b c, igitur cubus a c constat 6 quadratis a b & 6 quadratis b c & 6 productis a b, in b c bis, & 100, at ex a b in b c bis, fiunt 4 res, quia a b est res, & b c, 2, & 6 quadrata b c, sunt triplum cubi b c, quia b c est tertia pars 6, igitur cubus a c, æqualis est 6 quadratis a b, & 24 rebus, & triplo cubi b c, & 100, at constat, quòd 24 numerus rerum, constat ex 9 numero quadratorum, in 4, qui est duplum tertiæ partis eiusdem numeri. At ex alia parte constat etiam, cubus a c, cubis a b & b c, & triplo a b in q̃dratum b c, & triplo b c in quadratũ a b, hoc namque in primo suposito sexti capituli ostensum est, igitur cub. a c, æqualis est cubis a b & b c & 6 quadratis & 12 rebus, igitur cubus a b, & cubus b c, & 6 quadrati, & 12 res, æquantur 6 quadratis & 24 rebus, & triplo cubi b c & 100. constat autem, quod numerus quadratorum manet idem, quia est triplus ad b c, & b c fuit tertia pars numeri quadratorum, & numerus rerum est ex numero quadratorum in suam partẽ tertiam, hoc enim æquale est semper, triplo quadrati tertiæ partis, abiectis igitur communiter cubo b c semel, & 6 quadratis, & 12 rebus scilicet tot rebus, quot fiunt ex numero quadratorum in suam tertiam partem, relinquetur cubus a b, æqualis

100,& 12 rebus,& duplo cubi b c, manifestum est autem,quod numerus 100,manet idem,& quod numerus rerum fit ex numero quadratorum in tertiam sui partem, & quod duplum cubi b c est 16, quia b c est 2,igitur cubus a b æqualis est 12 rebus,& 116 numero, ideo ex præcedenti capitulo, inuenta a b, addemus ei b c, tertiam partem numeri quadratorum,& conflabitur a c,& quia in quærendo a b,reducimus tertiam partem numeri rerum ad cubum, & hæc tertia pars numeri rerum,est quadratum tertiæ partis numeri quadratorum,ideo ex ultima contractione fit hæc regula.

Regvla.

Adde cubum tertiæ partis numeri quadratorum,dimidio numeri æquationis, & totum quod inde fit,in se ducito,à quadrato abijce cubum quadrati tertiæ partis numeri quadratorum, residui radicem adde & minue dimidio aggregati, quod in se duxeras, habebis Binomium & Apotomen,cuius ℞ cubicam iunge,& eis adde tertiam partem numeri quadratorum,& totum quod conflatur, est rei æstimatio.Exemplum,cubus equatur 6 quadratis p:20,adde 8,cubum 2,tertiæ partis 6,ad 10,dimidium 20, fit 18,ab huius quadrato 324,abijce 64,cubum quadrati 2,relinquitur 260, cuius radicem adde & minue à 18,habebis 18,p:℞ 260,& 18 m:℞ 260, horum ℞ cubicæ iunctæ,addita tertia parte numeri quadratorum, constituunt rem,

De cubo & quadratis æqualibus numero. CAP. XV.

Demonstratio.



Hoc capitulum conuertitur secundo modo, differentia autem est,quod primus modus ostendit addendam tertiam partem numeri quadratorum, & secundus minuendam,sit igitur, in figura 13' capituli,cubus a b cum 6 quadratis a b,æqualis 100, & ponatur b c tertia pars numeri quadratorum,& compleatur cubus a c,erit igitur cubus a c æqualis cubo a b,& 6 quadratis,& 12 rebus,& cubo b c,ex primo supposito 6' capituli,loco igitur cubi a b & 6 quadratorũ ponatur 100, nam illa erant æqualia 100,igitur cubus a c,æqualis erit 12 rebus,& cubo b c, & 100,at 12 res ex a b,deficiunt à 12 rebus ex a c in 12 b c,at illud 12,ut ostensum est in præcedenti,fit ex triplo q̃drati b c,igitur 1- b c,est triplum cubi b c,igitur cubus a c & triplum cubi b c æq̃ntur 12 rebus, & cubo b c,& 100,abiecto igitur cubo b c cõmuni semel,erit cubus a b cũ duplo cubi b c,æqualis 12 rebus,& 100,duplũ autem cubi b c est 16,& numerus rerum est triplum q̃drati b c,tertiæ partis numeri

qua-

quadratorum, & ideo inuenta æstimatione a c, abijciemus b c tertiam partem numeri quadratorum, & relinquetur a b, cognita secundum hoc erit regula.

REGVLA.

Duc tertiam partem numeri quadratorum, ad cubum, & duplica illum cubum, & differentiam numero æquationis ab eo sume, inde triplica quadratum tertiæ partis numeri quadratorum, & habebis res, quæ æquantur cubo & numero, si duplum cubi fuit maius numero æquationis, uel res cum numero, æquales cubo, si duplum cubi minus sit numero æquationis, uel res æquales cubo, ubi differentia numerorum nulla sit, inde inuenta æquatione, minue ab ea tertiam partem numeri quadratorum, & residuum est rei æstimatio. Exemplum. Cubus & 6 quadrata æquantur 100, duc 2 ad cubum fit 8, duplica fit 16, abijce ex 100 habebis cubum, æqualem 84 p: 12 rebus, sunt autem 12 res, triplum quadrati 2, tertiæ partis 6, numeri quadratorum, res igitur est, ex capitulo 12. ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700, ab hoc abijce 2, tertiam partem 9 erit rei æstimatio quæsita, quando cubus & 6 quadrata æquantur 100, hæc ℞ v: cubica 42 p: ℞ 1700 p: ℞ v: cubica 42 m: ℞ 1700 m: 2. Rursus, sit cubus & 6 quadrata, æquali 25, & abiecto 16 dupli cubi tertiæ partis 6, ex 25, fient 9, & 12 res, ut prius, æquales cubo, res igitur ualet ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$, abijce 2, relinquitur æstimatio quæsita, ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$. Rursus, cubus & 6 quadrata æquantur 16, abijce duplum cubi 2, scilicet 16, ex 16 numero relinquitur nihil, deinde sume triplum quadrati & eiusdem tertiæ partis numeri quadratorum, & est 12, numerus rerum, æqualium cubo, quare quadratum æquatur 12, quare res est ℞ 12, abijce 2 tertiam partem 6 relinquitur rei æstimatio, ℞ 12 m: 2. Rursus, cubus & 6 quadrata æquentur 7, sume differentiam 7 & 16, dupli cubi 2, & est 9, & quia duplum cuborum est maius numero æquationis, & numerus rerum est 12, ut prius, habebimus cubum p: 9, æqualem 12 rebus, ideo res ualet 3 uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$, abijce 2, erit æstimatio cubi & 6 quadratorum 1, uel ℞ $5\frac{1}{4}$ m: $3\frac{1}{2}$ & hoc est in re m: quia $3\frac{1}{2}$ m: maius est quâm ℞ $5\frac{1}{4}$, & 6 quadrata sunt 105 m: ℞ 9261, cubus uero est ℞ 9261 m: 98, si igitur iungantur cubus & 6 quadrata, fient 7 ad unguem, ut patet.

Ex hoc est manifestum, cur capitulum, cubi & numeri æqualium q̃dratis, non demonstratur ex capitulo cubi & quadratorum æqualium numero. Quemadmodum capitulum cubi & numeri, æqualium rebus, demonstratum est ex capitulo cubi æqualis rebus & numero. Nam cum capitulum hoc perueniat aliquando ad capitulum

cubi et numeri ęqualium rebus, melius est igitur ducere capitulū cubi & numeri æqualium quadratis, immediate ad capitulū cubi & numeri æqualium rebus, quàm ad idem capitulum, medio capituli cubi & quadratorum æqualium numero, nam & operatio longior, & demonstratio magis confusa euaderet.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio alia similis nostræ generali, capituli septimi inuenta à Ludouico de Ferrarijs. Sit cubus a c & 6 quadrata, gratia exempli, c d æqualia 100, quia igitur b d, est altitudo 6 quadratorum, erit b d 6, posita igitur a d quadrato aliquo, erit a b quadratum m: 6, a c igitur superficies 1 q̄d quadratis p: 36, m: 12 quadratis, & hæc est basis corporis a e, quare corpus a e est 1 cu quadratum p: 36 quadratis m: 12 q̄d quadratis, & hoc est æquale 100, igitur 10, radix 100. æquatur 1 cub. m: 6 pos. radici 1 cu quadrati p: 36 quadratis, m: 12 q̄d quadratis, æstimatio igitur rei est cognita, qua in se ducta, quia a d posita est 1 quadratum, habebitur a d, à qua detracta b d, quæ fuit 6, relinquetur a b, quæsita res.



REGVLA.

Regula igitur est, pone numerum quadratorum, numerum rerum, quæ cum ℞ numeri propositi æquantur cubo, & inuentam æstimationē in se ducito, à qua abijce productione numerum quadratorum seu rerum, residuum est rei æstimatio. Exemplum, cubus & 6 quadrata æquentur 40, dices igitur, cubus æquatur 6 rebus & ℞ 40, æstimatio rei, est ex suo capitulo, ℞ v: cubica ℞ 10 p: ℞ 2 p: ℞ v: cubica ℞ 10 m: ℞ 2, hanc in se ducito producetur ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cubica 12, m: ℞ 50 p: 4, abijce 6 numerum rerum, relinquetur æstimatio quæsita, ℞ v: cubica 12 p: ℞ 80 p: ℞ v: cub. 12 m: ℞ 80 m: 2. Idem inuenies ex prima regula operationis. Probatio est, ut in exemplo, cubus & quadrata 3, æquent 21, ęstimatio ex his regulis est, ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ p: ℞ $89\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $9\frac{1}{2}$ m: ℞ $89\frac{1}{4}$ m: 1, cubus igitur est hic constans ex septem partibus.

Exemplum.

12 m: ℞ v: cubica, $4846\frac{1}{2}$ p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cubica $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ m: ℞ $2096286117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$

p: ℞ v: cub. $46041\frac{3}{4}$ p: ℞ $2096354180\frac{13}{16}$ m: ℞ $2096289117\frac{9}{16}$ m: ℞ $2119776950\frac{7}{8}$ p: ℞ v: cub. $226\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$

Tria

Tria autem quadrata sunt ex septem partibus hoc modo
9 p: ℞ v: cub. $4846\frac{1}{2}$, p: ℞ $23487833\frac{1}{4}$, p: ℞ v: cub: $4846\frac{1}{2}$ m: ℞ $23487833\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ p: ℞ $65063\frac{1}{4}$ m: ℞ v: cub. $256\frac{1}{2}$ m: ℞ $65063\frac{1}{4}$.
Inde iunctis tribus quadratis cum cubo sex partes, quæ sunt ℞ v: cubicæ æquales p: cum m: cadunt & relinquitur 21 ad amussim aggregatum.

QVAESTIO.

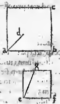
Columna quadrata 36 cubitis alta, lata & profunda cubito uno: ei pondere est ęq̃lis ad amussim quadrata alia columna, à qua si detrahantur sex cubiti altitudinis, reliquum erit solidum undequaq; quadratum, posita igitur secundę columnę latitudine 1 pos. erit 1 cu. p: 6 quad. æqualia 36, quare res erit ℞ cu. 16 p: ℞ cu. 4 m: 2 & hoc est latus basis columnę altitudo aũt est 6 cubitorum, plus igiť altitudo est cubitorum ℞ cu. 16 p: ℞ cu. 4 p: 4.

De cubo ac numero æqualibus quadratis. CAP. XVI.

REGVLA.


HOc capitulum per se patet: ex demonstratione septimi capituli, regula est, duc ℞ cubicam numeri, in numerum quadratorum, producetur numerus rerum ęqualium cubo, & eidem numero, inuentis autem æstimationibus, duc ℞ cubicam numeri in se, & productum diuide per quamlibet æstimationem inuentam, exibit æstimatio quæsita utraq;. Exemplum, 1 cubus p: 64, æquetur 18 quadratis, duc 18 in 4 ℞ cubicam 64, fit 72, numerus rerum æqualium cubo p: 64, huius æstimationes sunt ex capitulo suo, 8 & ℞ 24 m: 4, cum quibus diuide 16, quadratum 4, ℞ cubicæ 64, exit 2, & ℞ 96 p: 8, & hæ sunt æstimationes.

DEMONSTRATIO.



Et si una æstimationum habita a b, uolo habere reliquam, facio quadratum a b, quod sit a c, & detraho a b ex numero q̃dratorum & relinq̃tur a d, & ducatur a d, in aggregatũ ex a b, & quarta parte a d, & superficiei productæ sumatur latus quod in eam potest, & ei addatur dimidium a d, & fiat e f, quam dico esse secundã æstimationem, fiat quadratum e f, & sumatur e g, quæ cũ e f iuncta, æqualis sit aggregato a b & a d. Quia igitur e f quadratum, æquale est producto ex tetragonali in se, & dimidio a d in se, & producto tetra-

 gonalis

gonalis in a d per 4^{am} 2^{i} Elementorum, erit quadratum e f, æquale producto a d in aggregatum ex a b, & dimidio a d, & tetragonali ex 16^{a} 6^{i} Elementorum, igitur e f media inter a d & aggregatum a b & tetragonalis & dimidio a d, dimidium autem a d & tragonalis constituunt e f, ex supposito, e f igitur media est proportione inter a d & aggregatum a b & e f. Rursus, quod fit ex a b & a d, in a b & e f, æquale est ei quod fit ex e f & e g, in aggregatum a b & e f, quia ex supposito e f, & e g, æquantur a b, & a d & a b & e f manent idem, quod autem fit ex a d in a b & e f, ex probatis, æquale est quadrato e f, igitur quod fit ex a b in a b & e f, cum quadrato e f, æquale est ei quod fit ex e f & e g in e f & a b, abiecto igitur communi quadrato e f, erit, quod fit ex a b in aggregatum a b & e f, æquale producto a b & e f in e g, cum eo quod fit ex e f in a b, detracto igitur communi iterum producto, a b in e f, relinquetur quadratum a b, æquale producto ex a b & e f in e g, quare a b media inter e g & aggregatum a b & e f, fuerat uero, ut dictum est, e f media, inter a d & aggregatum a b & e f sunt igitur tres quantitates, analogæ, in duobus ordinibus, quarum prima in utroque ordine eadem est, uidelicet aggregatum a b & e f, igitur per 67 libri 5^{i} huius, e g ad a d, ut a b ad e f duplicata,

a b & e f	
a b	e f
e g	a d

quare ex 17^{a} 6^{i} Elementorum, e g ad a d, ut a c ad quadratum e f, igitur ex 34^{a} 11^{i} Elementorum, corpus quod ex a d in a c, æquale est corpori ex e g in quadratum e f, sed a b fuit æstimatio rei. igitur corpus quod ex a d in a c æquale est numero æquationis posito aggregato a d & a b numero quadratorum, per demonstrationem habitam in capitulo octauo, igitur productum ex e g in quadratum e f, est æquale numero æquationis, cum igitur e f & e g, sint æquales numero quadratorum, quia aggregato a b & a d, & ex g e in quadratum e f, fiat numerus æquationis, erit per 8^{m} capitulum, e f rei æstimatio, quod erat probandum.

REGVLA.

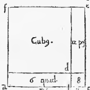
Regula igitur est, minue primam æstimationem â numero quadratorum, & residuum duc in aggregatum ex prima æstimatione, & quarta parte eiusdem residui, & producti accipe radicem, cui adde dimidium eiusdem residui, aggregatum est æstimatio rei quæsita. Exemplum, sit cubus cum 24 æqualis 8 quadratis, & æstimatio cognita 2, abijcio 2 ex 8, numero quadratorum relinquitur 6, hoc duc in $3\frac{1}{2}$, quod constat ex 2, prima æstimatione, & $1\frac{1}{2}$ quarta parte 6 residui, fit 21, cuius radici adde dimidium residui primæ æstimationis, quod est 3, fit ℞ 21 p:3, æstimatio quæsita.

De cubo, quadratis & positionibus æqualibus numero. CAP. XVII.

DEMONSTRATIO.



It gratia exempli cubus a b, & 6 q̃drata, & 20 positiones æqualia 100, & addam b c ad a b, quæ sit 2, tertia pars numeri quadratorum, & describitur cubus uniuersalis a c, secundum quod componitur ex suis octo partibus, erit igitur cubus a b, f d superficies cum sua altitudine, & cubus b c 8, quia b c est 2, & a d corpora, 6 quadratis a b, æqualia, & corpora de 12 a b seu duodecuplo a b ex sexto capitulo huius libri, quia igitur cubus a b & 6 quadrata & 20 positiones, æquantur 100, addantur 8 positiones, quæ sunt reliquum ad 20 positiones, cubo a c, qui iam æquebatur cubo a b, & 6 quadratis, & 12 positionibus, & cubo b c, erit cubus a c cum 8 positionibus, æqualis 108, nam cubus a c excedit tria corpora d a, d e, in cubo c d, qui est 8, at quia 8 positiones a b deficiunt a b, 8 positionibus a c cubi maioris, in 8 b c seu octuplo b c, quæ est 2, addemus igitur octuplum b c utrique parti, & fiet cubus p:8 rebus, ęqualis 124



nota igitur ex capitulo suo a c, auferemus b c, relinquitur a q. Sit rursus cubus a b, & 6 quadrata & 12 res, æqualia 100, igitur addito communi cubo b c, erit cubus a c æqualis 108, & a c ℞ cubicæ 108, & a b 2 m: quàm a c cognita, sit denuo cubus & 6 quadrata a b & 2 positiones ęqualia 100, additis igitur 10 positionibus residuis, ad cõplendum corpora d e, & addito cubo b c, fiet cubus a c æqualis 10 positionibus superadditis, & 108, sed 10 positiones a b deficiunt à 10 positionibus a c in 10 b c, addemus igitur 10 b c utrique parti, fiet cubus a c p:20, æqualis 10 positionibus p:108, abiice 20 ex utraque parte, relinquetur cubus a c ęqualis 10 positionibus p:88, inuenta a c, minue b c & relinquetur a b necessario cognita.

REGVLA.

Regula igitur communis est, duc 3am partem numeri quadratorum (quam hoc signo, ᵀpq̃d: demonstramus) ad cubum, addeque numero, inde duc numerum quadratorum in sui tertiam partem, & producti differẽtia à numerus rerum, est numers rerum addendarũ cubo, ubi productũ fuerit minus numero rerum propositarum uel addendarum numero, ubi productum fuerit maius numero rerum propositarũ. Si igitur differentia est nulla, producti & numeri rerũ

erit

erit cubus æqualis numero iam coaceruato, inde sumpta radice cubica numeri, minue ex ea ℞p̄q̄d: & residuum est rei æstimatio, quod si positiones & cubus, æquentur numero, duces numerum positionum in ℞p̄q̄d: & productum addes numero iam aggregato, & habebis cubum, & res iam inuentas, equales numero iam aggregato, inde ab æquatione minue ℞p̄q̄d:, & residuum est æstimatio. Quod si productum fuerit maius numero rerum, duc differentiā, quæ est numerus rerum, in ℞p̄q̄d: & productum minue ex numero, quem habebas, aggregato, & si nihil superest, habebis cubum, æqualem rebus iam propositis tantum, quare deducendo ad minorem denominationem habebis q̄d^m equale numero, & res erit ℞ quadrata numeri rerū, à qua minue ℞p̄q̄d: & residuum erit æstimatio rei. Quod si in detractione producti ex numero rerum in ℞p̄q̄d: à numero aggregato, superſit, numerus ille cum rebus iam propositis, æquatur cubo, inde ab æstimatione minue ℞p̄q̄d: & residuum est æstimatio quæsita. Sed si productum numeri rerum in ℞p̄q̄d: maius esset numero iam aggregato, differentia est numerus, qui cum cubo æquatur rebus iam propositis, inde habita æstimatione minue ℞p̄q̄d: & residuum est æstimatio rei.

Ex hoc patet, quod tale capitulum resoluitur in quinq; capitula. quæ sunt hæc in margine posita, & non possunt resolui in plura, in aliquibus autem sequentium resolutio fit in tria postrema tantum, in omnibus autem capitulis quatuor denominationum, commune est cum fuerint resoluta in capitulum trium uel duarum denominationum, ut æstimationi inuentæ addatur aut minuatur ℞p̄q̄d: ut in hoc capitulo semper minuitur, & commune est etiam omni capitulo ut rerum numerus & numerus ipse constituantur eodem modo, uelut hic numerus rerum, est differentia numeri rerum assumptarum in capitulo quatuor denominationum, & producti ex numero quadratorum in sui tertiam partem, & numerus capituli in quod resoluitur, est differentia producti ex numero rerum iam inuentarum, in ℞p̄q̄d: & aggregati ex cubo ℞p̄q̄d: & numero æquationis primo.

cubus & res equales numero.
cubus æqualis numero.
cubus æqualis rebus.
cubus æq̄lis rebus & numero
cubus & numerus æq̄les reb⁹

QVAESTIO I.

Exemplum. Est corpus quadratum undequaq;, quod cum superficiebus & lateribus est 22, dices igitur, cubus & 6 quadrata & 12 res æquantur 22, cuba igitur 2, tertiam partem numeri quadratorum, fit 8, adde ad 22 fit 30, deinde duc 6 numerum quadratorū in 2 sui partem

tem tertiam,fit 2,differentia cuius à numero rerum est nihil,nam res etiam fuerant 12, habemus igitur 1 cubum æqualem 36,& res est ℞: cub.30,abijce 2 Tpqd:fit æstimatio rei,℞: cub,30 m:2.
Experientia autem est, ut iungas 1 cub.p:6 q̄d:p:12 reb', & fiunt 22.Sex quadrata 24 p:℞: cub.194400,m:℞: cub.414720
cubus 22,m:℞: cub.194400,p:℞: cub.51840
Duodecim res ℞: cub.51840 m:24
Aggregatum 22

QVAESTIO. II.

Exemplum secundi.Inuenias quatuor numeros continuè proportionales, quorum primus sit 3 & reliqui tres sint 19, pone 2ᵐ 1 rem, erit tertius $\frac{1}{3}$ quadrati,& quartus erit $\frac{1}{9}$ cubi,igitur 1 posito $\frac{1}{3}$ quadrati,$\frac{1}{9}$ cubi, æquantur 19, duc ad integra,habebis cubum & 3 quadrata & 9 res,equalia 171,nam omnia ducuntur per 9,adde igitur cubum tertiæ partis numeri quadratorum ad 171,& est 1,fit 172, deinde duc 3 numerũ quadratorum in sui tertiam partem fit 3,huius producti & 9 numeri rerum, differentia est 6 numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero,quia productum fuit minus, duc igitur 6 numerum rerum in 1 Tpq̄d:fit 6,adde ad 172,fit 178,igitur cubus & 6 res æquantur 178,& rei æstimatio est ℞: v: cubica ℞: 7929 p:89 p:℞: v: cubica ℞: 7929 m:89,ab hoc minue Tpq̄d:quæ est 1, habebis secundam quantitatem ℞: v:cubicam ℞: 7929 p:89 m:℞: v: cubica ℞: 7929 m: 89 m: 1,ex qua habebis reliquas.

Exemplum tertij modi. Cubus & 6 quadrata & 1 posito, æquantur 14, adde cubum 2 Tpq̄d:qui est 8 , ad 14, fit 22, deinde duc 6 numerum quadratorum in 2 tertiam sui partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum est 11, numerus rerum æqualium cubo cum numero, quia numerus productus 12 fuit maior numero rerum, duc igitur 11 in 2 tertiam partem numeri quadratorum, fit 22, differentia cuius & numeri prioris aggregati est nulla, quare habebimus cubum æqualem 11 rebus, igitur quadratum æquatur 11, res igitur est ℞: 11, à qua minue 2 Tpq̄d: fit rei æstimatio ℞: 11 m:2, sumpsisti autem differentiam in numero & non aggregasti, quia res æquabantur cubo, & non cubus cum rebus æquabantur numero, ut in præcedente exemplo.

QVAESTIO III.

Exemplum quarti modi. Ex oraculo iubet princeps fieri sacram ædem, cuius spacium sit 400 cubitorũ, & longitudo latitudine maior sit 6 cubitis, latitudo altitudine 3 cubitis maior, quæritur quantitas. Pone altitudinem rem, latitudo erit 3 p: & longitudo 9 p: duc

inuicem, habebis 1 cub. p: 12 quadratis p: 27 positionibus, æqualia 400, adde ad 400, cubum 4 ᴛp q̃d: qui est 64, fit 464, duc 12 numerum quadratorum in tertiam sui partem, fit 48, cuius differentia à 27, est 21, numerus rerum, quæ æquantur cubo cum numero, quare duc 21 in 4 ᴛp q̃d: fit 84, sume differentiam à 464, quæ est 380,

altitudo	1	pos:
latitudo	1	pos: p: 3
longitudo	1	pos: p: 9
productum	1 cub. p: 12 q̃d:	p: 27 pos:

& eam adde rebus, quia aggregatum numerorum primum, fuit maius numero producto secundo, habebis cubum ęqualem 21 positionibus p: 380, res igitur ualet ℞ v: cubicam 190 p, ℞ 35750, p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757, ab hac minue 4 ᴛp q̃d: habebis altitudinem, qua habita, addendo 3 & 9, habebis latitudinem & longitudinem, ut uides

altitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cub. 190 m: ℞ 35757 m: 4.
latitudo, ℞ v: cub. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 m: 1
longitudo, ℞ v: cu. 190 p: ℞ 35757 p: ℞ v: cu. 190 m: ℞ 35757 p: 5.

Exemplum quinti modi. Cubus & 6 quadrata, & 2 res, æquantur 3, adde 8, cubum ᴛp q̃d: ad 3 fit 11, deinde duc 9 in suam tertiam partem, fit 12, differentia à 2, numero rerum est 10 numerus rerum, duc in 2 ᴛp q̃d: fit 20, cuius differentia ab 11, est 9 numerus, qui cum cubo æquatur 10 rebus, quia productum 2^m maius est numero aggregato, uoco autem productum secundum, quod fit ex numero rerum iam inuento, in ᴛp q̃d: æstimatio igitur rei quando cubus & 9 ęqualia sunt 10 rebus est 1, uel ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, abijce igitur 2 ᴛp q̃d: fient duæ æstimationes quæsitæ, altera ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$ alia m: 1.

De cubo, & rebus æqualibus quadratis & numero. CAP. XVIII.

DEMONSTRATIO.


SIt in eadem figura, cubus a c cum 33 a c, æqualis 6 quadratis a c p: 100, (gratia exempli) diuidatur cubus a c, posita b c ᴛp q̃d: scilicet 2, in suas partes, erit cubus a c, æqualis cubo a b, cubo b c, sex quadratis a b, & 12 positionibus a b, at 33 a c, sunt 33 a b, & 33 b c, quæ sunt 66, quia b c est 2, igitur cubus a c, & 33 a c, æquantur cubo a b, cubo b c, sex quadratis a b, & 45 a b positionibus, & 66, hæc eadem igitur æqualia sunt 6 quadratis a c, & 100, at 6 quadrata a c, diuisa a c in b, per 4 2ⁱ Elementorum, æqualia sunt 6 quadratis a b, & 6 quadratis b c, & 12 superficiebus

ciebus a d, sed a d est 2 positiones, quia b d est 2, igitur 12 a d sunt 24 positiones a b, quare 6 quadrata a b, & 6 quadrata b c, & 24 positiones a b, & 100, æquantur cubo a b, cubo b c, 6 quadratis a b, & 45 a b & 66 numero, cubus autem b c est 8, & 6 quadrata b c sunt 24, igitur 6 quadrata a b, & 24 positiones a b, & 124, æquantur cubo a b, & 6 quadrat. a b, & 45 positionibus a b, & 74, facta igitur detractione similiũ ex utraque parte, scilicet 6 quad. 24 positionibus & 74. relinquetur cubus a b p: 21 positionibus a b, æqualis 50, manifestum est igitur quòd inuenta a b, ex capitulo suo, & addita b c ei, quæ est 2, conflatur a c. Manifestum est autem, quòd ubi positiones, quæ cum cubo erant, essent æquales productis, haberemus cubum æqualem numero tantum, & ubi positiones quæ cum cubo erant, essent pauciores, haberemus res ex una parte, & cubum ex alia, & tunc si numerus qui est cum cubo, foret æqualis alteri, essent positiones æquales cubo; & si esset minor, haberemus res & numerum æquales cubo: & si maior, haberemus res æquales cubo & numero, ex eadem demonstratione, uelut in præcedente capitulo.

	6 q̄d^{ta} a b	24 pos^{es} a b	124
cub^{9} a b	6 q̄drat^{a} a b	45 pos^{es} a b	74
cub^{9} a b	p:	21 pos^{es} a b æquales	50

Regula.

Regula igitur est, ut primò statuas numerum rerum semper, ut in præcedenti capitulo, & est ut ducas numerum quadratorum in tertiam sui partem, & differentia huius producti, à numero rerum, est numerus rerum, quæ si nulla sit, habebimus cubum æqualem numero, si autem productum sit minus numero rerum, differentia erit numerus rerum, quę cum cubo ęquantur numero, & si productum fuerit maius, habebimus res æquales cubo: & tunc si numeri erunt æquales, erit cubus æqualis rebus, & si, qui producitur ex numero rerum, in 3pq̄d: fuerit minor numero æquationis cum additione, erit cubus æqualis rebus & numero; quod si productus numerus ex rerũ numero in 3pq̄d: fuerit maior numero æquationis cum sua additione, habebimus res æquales cubo & numero. Numerus autem æquationis sic habetur, duc priorem numerum rerum, in tertiam partem numeri q̄dratorũ, & producti accipe differentiam, ab aggregato numeri æquationis, & dupli cubi 3pq̄d: differentia, erit numerus addendus cũ. si primũ productum fuerit maius aggregato: uel rebus si fuerit minus, uel numerus æq̄lis cubo, ubi nullæ sint res, inde habita æstimatione, eam adde uel minus 3pq̄d: prout in exemplis doceberis, & habebis quæsitam æstimationem.

Exemplum primum. Cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis & 25, duc 6 in 2, sui tertiam partem, fit 12, differentia cuius à numero rerum nulla est, igitur cubus æquabitur numero, duc ergo 12 numerum rerum, in 2 ℞pq̃d: fit 24, abijce ex 41, aggregato 16 dupli cubi 2, & 25 numero æquationis, relinquitur 17, qui æquatur cubo, res igitur est ℞ cubica 17, adde ei 2 ℞pq̃d: fit rei æstimatio ℞ cubica 17 p:2.

Exemplum secundum. Mercator fugiens, paciscitur redditurum $\frac{3}{4}$ debiti proportionaliter in tribus annis, ita quod si pactus fuisset redditurum $\frac{19}{27}$ primo anno reddidisset $\frac{9}{27}$, secundo $\frac{6}{27}$, tertio $\frac{4}{27}$, ut residua sint in eadem proportione, cum residuo capitali, quæritur portio cuiusque anni, reddendo solum $\frac{3}{4}$, & ponamus, quod capitale sit 4, ad uitãdum fractiones, uult igitur reddere 3, pone igitur quod restituat primo anno rem, igitur secundo anno restituet rem m: $\frac{1}{4}$ quadrati, & tertio anno, rem m: $\frac{1}{2}$ quadrati p: $\frac{1}{16}$ cubi, igitur in tribus annis restituet 3 res p: $\frac{1}{16}$ cubi m: $\frac{3}{4}$ quadrati, & hoc iam suponitur 3, quare reducito ad integrum, cubum ducendo per 16, habebis 1 cubum p:48 rebus, æqualem 12 quadratis p: 48, duc 12 in 4 tertiam sui partem, fit 48, igitur differentia rerum nulla est, & cubus æquabitur numero, duc igitur 48, numerum rerum, in 4 ℞pq̃d: fit 192, à quo detrahe 176, aggregatum ex dulpo cubi 4, & 48 numero æquationis, relinquitur 16, & hic æquatur cubo, igitur rei æstimatio est ℞ cubica 16, quam minue ex 4, ℞pq̃d: fiet æstimatio quæsita 4 m:℞ cubica 16, reddet igitur anno primo 4 m:℞ cubica 16, & secundo ℞ cubicam 16 m:℞ cubica 4, & tertio, ℞ cubicam 4 m:1, & horum residua, sunt proportionalia, cum 4, & iuncta faciunt 3, & est conuersum primi exempli, & residua ipsa sunt ℞ cubica 16, ℞ cubica 4, & 1.

Exemplum tertium. Cubus & 15 res, æquantur 6 quadratis & 24, duc 6 in sui tertiam partem, fit 12, cuius differentia à 15 numero rerum, est 3, & quia productum fuit minus, erit cubus & 3 res, æqualia numero, duc igitur 15 numerum rerum, in 2 ℞pq̃d: fit 30, minue ex 40, aggregato 24 & duplo cubi ℞pq̃d: relinquitur 10, igitur 10 æquatur cubo p:3 rebus, & rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ 26 p: 5, m:℞ v: cubica 26 m:5, cui adde 2 ℞pq̃d, habebis quæsitam æstimationem.

Exemplum quartum. Cubus & 15 res, æquantur 6 quadratis p: 10, iterum habebo cubum & 3 res, æquales numero, & numerus productus erit 30, ut prius, uerum aggregatum ex duplo cubi 2, ℞pq̃d, & 10 numero æquationis, est 26, differentia igitur est 4, cum igitur cubus & 3 res æquentur 4, rei æstimatio est 1, & quia productus

ctus numerus est maior aggregato, id est 30, maior est 26, minuemus 1 æstimationem æquationis inuentæ ex 2, Tpq̃d: & relinquetur 1 æstimatio quæsita cubi & 15 rerum, æqualium 6 quadratis & 10.

Ideo patet quod in hoc casu, ubi cubus & res, ęquantur numero, si differentia numerorum nulla foret, uelut si loco 10, posuissemus 14, æstimatio rei esset Tpq̃d: scilicet 2, quia in æquatione inuenta, nihil haberemus addendum uel minuendum, quia cubus & 3 res, æquarentur nihil.

Exemplum quintum. Cubus & 10 res, æquatur 6 quadratis p:4, duc igitur numerum quadratorum in tertiam sui partem, ut prius, fit 12, differentia cuius à numero rerum, est 2, & quia productum est maius numero rerum, ideo 2 res æquabuntur cubo, pro numero itaq; duc 10 numerum rerum primum, in 2 Tpq̃d: fit 20, differentia cuius à 20, aggregato dupli cubi Tpq̃d: & 4, est nihil, igitur non habebimus numerum, sed cubus æquabitur, ut dictum est, 2 rebus, igitur deprimendo, quadratum æquabitur 2, ergo rei æstimatio, est ℞ 2, quam adde uel minue Tpq̃d:, habebis ueram æstimationum quæsitam, 2 p:℞ 2, uel 2 m:℞ 2, & potest etiam esse 2, & sic habet tres æstimationes hic casus,

Exemplum sextum. Sit cubus & 21 res, æqualia 9 quadratis p:5, tunc ut prius, ducam 9, in 3 tertiam sui partem, fit 27, huius differentia à 21, est 6 numerus rerum, cubo æquandarum, quia productum 27, est maius 21 numero rerum, addo igitur 54, duplum cubi Tpq̃d: ad 5 numerum ęquationis fit 59, cuius differentia, à 63, producto numeri rerum prioris, in Tpq̃d: est 4, igitur quia productum est maius aggregato, addemus numerum cubo, & fiet 1, cubus p:4, æqualis 6 rebus, iam inuentis, huius igitur æstimationis sunt tres, prima est 2, secunda ℞ 3 m:1, tertia ficta m:℞ 3 p:1, quas adde ad 3 Tpq̃d: habebis ueras æstimationes illas quas à latere uides.

Prima	5
Secunda	2 p:℞ 3
Tertia	2 m:℞ 3

Exemplum septimum. Cubus & 26 res, æquantur 12 quadratis p:12, duc 12 numerum quadratorum, in sui tertiam partem, quæ est 4, fit 48, cuius differentia, à 26, numero rerum, est 22, & quia productum est maius numero rerum, res æquabunt cubo, deinde duc 26 numerum rerum, in 4 tertiam partem numeri quadratorum, fit 104, abijce ex 140 duplo cubi Tpq̃d: & 12 numeri simul iunctis, fit 36, numerus addendus rebus, quia aggregatum est maius producto, e contrario, exemplo precedenti, cubus igitur æquabitur 22 rebus, p:36, quare eius erunt tres ęstimationes, prima ℞ 19 p:1, & est uera, secunda ficta m:℞ 19 m:1 tertia etiam ficta, quæ est m, 2, has adde singu-

las, $\bar{\text{q}}$d: habebis ueras tres æstimationes, quarum experientiam à latere in margine posui.

Prima	5	p: R: 19
Secunda	5	m: R: 19
Tertia	2	

Ex hoc patet, quod numerus quadratorum, in his tribus exemplis, in quibus æstimatio rei triplicatur, semper componitur ex tribus æstimationibus iunctis simul, uelut in quinto exemplo, 2 p: R: 2, & 2, & 2 m: R: 2, componunt 6, numerum quadratorum, & in sexto exemplo, 5, & 2 p: R: 3, & 2 m: R: 3, componunt 9, numerum quadratorum, & in septimo exemplo, 5 p: R: 19, & 5 m: R: 19 & 2, componunt 12, numerum quadratorum, ideo duabus cognitis, tertia semper emergit, & causa est cognita in initio huius libri. Et manifestum est, quod cum peruenimus ad res, quæ à cubo separantur, seu numerus rebus, seu cubo iungatur, semper emergunt tres æstimationes, & causa dicta est superius ibidem, ubi de uera & ficta æstimatione locuti sumus.

cubus primæ 410 p: R: 167884
26 res 130 p: R: 12844
aggregatum 540 p: R: 273600
12 quadrata. 528 p: R: 273600
numerus 12
aggregatum 540 p: R: 273600
cub. secundæ 410 m: R: 167884
26 res. 130 m: R: 12844
aggregatum 540 m: R: 273600
12 quadra. 528 m: R: 273600
numerus 12
aggregatum 540 m: R: 273900
cubus tertiæ 8
26 res 52
aggregatum 60
12 quadra. 48
numerus 12
agggregatum 60

Et patet etiam, quod omnes modi hi, ad additionem semper possunt referri, quamuis minus cum additur, uicem gerat, plus cum detrahitur, ostensum est enim quod tantum est minuere 4 ex 12, quantum addere 4 m: ad 12, utroque enim modo fiet 8.

Ex hoc patet quod numerus quadratorum, diuiditur trifariam, & una æstimatione habita aggregatum reliquarum cognitum relinquetur.

ALIA DEMONSTRATIO.

Sit igitur cubus & 100 res æqualia 6 quadratis p: 10 numero. Et ponatur a b rei æstimatio, b c R $\bar{\text{q}}$d: a g autem æqualis, b c, quare g b est differentia a b & b c, cubus autem g b, est differentia cubi a b cum triplo a b. in quadratum b c, à cubo b c cũ triplo b c in quadratum a b, ex sexto capitulo, cubus uerò a b cum 100 rebus, æquatur 6 quadratis p: 10, ex supposito, 6 quadrata autem a b, sunt triplũ b c in quadratum a b, triplum igitur b c in quadratum a b, & cubus b c,

b c,qui est 8,sunt 2 m: quam cubus a b cum 100 rebus,dico autem 2 m:quia cubus b c, qui iungitur 6 quadratis,debuit esse 10,& est tantum 8,at cubus a b cum 100 rebus, superat cubum a b,& triplũ a b in quadratum b c quod est 12 res,in 88 rebus,differentia igitur cubi b c & tripli b c in quadratum a b, à cubo a b,cum triplo a b in quadratum b c,est 88 a b,m:2 huic igitur differentiæ,æqualis est cubus g b, ut diximus,ponatur igitur b g res erit igitur g c seu a b, 2 m:re cuius quantitas sumpta 88 uicibus,ut dictum est, æquatur cubo b g p:2,igitur cubus b g, p:2; p:88 suis rebus,æqualis est 176,quare cubus b g cum 88 suis rebus æquatur 174,quare si eam æstimationem b g detraxeris ex b c,quæ est ℞ p q̃d: scilicet 2,habebis quantitatem a b,quæsitam. Et hæc demonstratio fuit inuenta à Ludouico Ferrario,et ostendit clarius rationem supradictarum operationum.

a res b — z g — c

ALIA DEMONSTRATIO.

Ponatur rursus, cubus cum 5 rebus, æqualis 6 quadratis a c 10; & ponatur e f res,d e ℞ p q̃d: differentia d e & e f, e h, eritque ex demonstratione consimili præmissæ,ut cubus e h, æquetur 7 reb' p:16 inde inuenta æstimatione, si ei addatur h f ℞ p q̃d: quæ est 2,habebitur e f res quæsita, nec in hoc addam uerba,quia demonstratio est similis præmissæ,& operatio eius in hac parte,est clarior in nostra demonstratione.

d — z e — h res f

REGULA.

Regula igitur sumpta ex hac demonstratione est,si numerus rerum æqualis est,producto ex numero quadratorum in suam tertiam partem, duc ℞ p q̃d: ad cubum,℞ cubicam differentiæ huius, & numeri æquationis,adde ℞ p q̃d: ubi cubus sit minor numero, aut minue,ubi sit maior,& totum est æstimatio rei, manifestum est autem,quòd ubi cubus ℞ p q̃d: & numerus,sint equales,non addemus nec minuemus,sed ℞ p q̃d: erit ipsa rei æstimatio.

Exemplum,Cubus & 12 res,equantur 6 quadratis p:8,tunc quia ducto 6,numero quadratorum,in 2 sui tertiam partem,fit 12,numerus rerum,ad unguem,ideo duc 2 ℞ p q̃d: ad cubum, fit 8,cuius differentia à numero equationis nulla est,ideo estimatio rei est 2 ℞ p q̃d: Et si cubus & 12 res, æquantur 6 quadratis p:9, tunc quia cubus æquatur numero,abijciemus 8,cubum ℞ p q̃d: ex 9,relinquitur 1 cuius ℞ cubicam quæ est 1,addo ℞ p q̃d: quia cubus ℞ p q̃d. est minor æquatione numeri,fit rei æstimatio 3. Et eadem ratione,si cubus p:12 rebus,equetur 6 quadratis p:7,detracto 7 à b 8,cubo ℞ p q̃d. ℞ linqui-

linquitur 1, cuius ℞ cubicam quæ est 1, detrahe ex 2, ℞ p q̃d. relinquitur 1, rei æstimatio.

Quod si numerus positionum, maior sit producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam, differentia erit numerus rerum ut in prima demonstratione, & suis regulis, hunc duc in ℞ q̃d. & ei adde cubum ℞ q̃d. & huius aggregati, numeriq́ æquationis differentia, est numerus æquationis cubi, & talium rerum differentia, si nulla sit, æstimatio rei est ℞ q̃d. Et si numerus æquationis est minor aggregato, æstimationem inuentam minue, & si maior, adde ℞ q̃d. quod fiet, erit rei æstimatio. Exemplum, cubus & 20 res, æquantur 6 quadratis & 24, ducto 6 in 2, tertiam partem sui, fit 12, cuius differentia à 20, numero rerum, est 8, numerus rerum, quæ cum cubo æquantur numero, duc igitur numerum rerum, in 2 ℞ q̃d. fit 16, adde ei 8, cubum ℞ q̃d. fit 24, differentia cuius nulla est à 24 numero æquationis, igitur æstimatio rei est ℞ q̃d. scilicet 2, sit rursus cubus cum 20 rebus, æquales 6 quadratis & 15, habebimus igitur, ut prius, cubum & 8 res, pro numero, duc ut prius, 8 numerum rerum posteriorem in 2 ℞ q̃d. fit 16, adde cubum ℞ q̃d. fit 24, abijce 15, relinquitur 9, igitur cubus & 8 res, æquatur 9, & rei æstimatio est 1, quod minue ex 2, ℞ q̃d. relinquitur uera æstimatio rei 1, minuisti autem, quia 15 numerus æquationis, est minor aggregato cubi & producti, quod est 24, & si bene animaduertis, eodem modo fit in prima parte regulæ, quando numerus rerum æqualis est producto ex numero quadratorum in sui partem tertiam. Rursus, cubus cum 20 rebus, æqualis sit 6 quadratis p: 33, habebis itaque cubum, ut prius, & 8 res, æquales differentiæ 24 aggregati, & 33 numeri æquationis, quare cubus & 8 res, æquabuntur 9, & æstimatio rei erit 1, addendum ℞ q̃d. quia numerus æquationis 33, est maior numero aggregato 24, quare rei æstimatio erit 3.

Quòd si numerus positionum, minor sit producto ex numero quadratorum in sui tertiam partem, differentia nihilominus erit numerus rerum ut prius, sed hæ non copulabuntur cubo, imò erunt ei æquales, deinde duc ipsum numerum rerum posteriorum, in ℞ q̃d, & productū iunge numero æq̃tionis, huius aggregati & cu. ℞ q̃d. differentia est numerus æquationis secundę, si igitur differentia nulla est, cubus æquabitur rebus, & ℞ quadrata numeri rerum addita ℞ q̃d. est ęstimatio rei, quod si aggregatum sit maius cubo, erit differentia, numerus qui cū rebus æquaē cubo, inde habita æstimatione, adde ei ℞ q̃d. & fiet uera æstimatio. Quòd si cubus fuerit maior aggregato

gregato, differentia erit numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, adde ei ℞p̃q̃d. quod conflatur, est rei uera æstimatio, & tam multiplex habẽda, ut in nostra regula docuimus, quanquam quod ad regulam pertinet, & hæc nostra sit. Exemplum igitur, Cubus & 9 res, æquales sint 6 quadratis p: 2, tunc numerus rerum secundus erit 3, duc in 2, ℞p̃q̃d. fit 6, adde ad 2 numerum æquationis, fit 8, cubus autem ℞p̃q̃d. est 8, differentia nulla, igitur cubus æquatur 3 rebus, res igitur est ℞ 3, & rei æstimatio 2 p: ℞ 3. Rursus, cubus p: 9 rebus, æqualis sit 6 quadratis p: 4, habebimus ut prius, cubum æqualem 3 rebus, pro numero duc 3 numerum rerum posteriorem in 2 ℞p̃q̃d. fit 6, adde 4 numerum æquationis, fit 10, abijce 8, cubum ℞p̃q̃d. fit 2, addendus rebus, quia aggregatum est maius cubo ℞p̃q̃d. igitur cubus æquatur 3 rebus, p: 2, & res erit 2, addito 2 ℞p̃q̃d. fit 4, uera æstimatio. Iterum, sit cubus p: 21 rebus, æqualis 9 quadratis p: 5, erunt igitur 6 res in posteriore equatione, quia 9 numerus quadratorum, ductus in 3, tertiam sui partem, producit 27, duc igitur 6 numerum posteriorem rerum, in 3, ℞p̃q̃d. fit 18, adde ei 5, fit 23, differentia cuius à numero producto ex cubo ℞p̃q̃d. est 4, & quia aggregatum est minus cubo, ideo cubus & 4, æquabuntur 6 rebus, æstimatio igitur est 2, uel ℞ 3 m: 1, & ficta ℞ 3 p: 1, quæ est m: si igitur his addas 3 ℞p̃q̃d. habebis æstimationes quæsitas 5, & 4 p: ℞ 3, & 2 p: ℞ 3, in harum qualibet uerum est, quod cubus & 21 res, æquales sunt 9 quadratis & 5 numero.

De cubo & quadratis æqualibus rebus & numero.
CAP. XIX.

DEMONSTRATIO.



Sit etiam cub. a b, & 6 quadrata, æqualia 20 rebus p: 200. gratia exempli, & ponemus b c 2, ℞p̃q̃d. erit igitur a c res p: 2, & eius cubus, erit cubus & 6 quadrata, & 12 res, & 8 iam autem suppositũ est, quod cubus a b & 6 quadrata, sint æqualia 20 rebus p: 200. Igitur ponantur, 20 res & 200: loco cubi, & 6 quadratorum, & fiet cubus a c, æqualis 32 rebus p: 208, at quia 32 res 2 b, deficiunt à 32 rebus a c, in 32 b c, addantur utrique parti 32 b c, erunt igitur 32 res p: 208, æquales cubo p: 64, tantum enim sunt 32 b c, abijce 64 ab utraque parte, erit cubus æqualis 32 rebus p: 144, inde inuenta æstimatione abijce b c, ℞p̃q̃d. relinquetur a b.

REGULA.

Regula igitur est, duc numerum quadratorum, in tertiam sui par

tem, productum adde numero rerum, & aggregatum erit numerus rerum, inde duc hunc numerum in ℞ p̄q̄d. & producti sume differentiam, ab aggregato ex numero æquationis, & cubo ℞ p̄q̄d. quæsiti nulla est, habebis cubum æqualem rebus, si uerò sit productum minus aggregato, differentia est numerus, qui cum rebus, æquatur cubo, quod si productum fuerit maius aggregato, differentia est numerus qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, ℞ p̄q̄d. residuum est æstimatio uera, quæsita.

Exemplum, Cubus & 6 quadrata, æqualia sunt 20 rebus & 56, duc 6 in 2 tertiam sui partem, fit 12, adde ad 20 fit 32, duc 3 in 2 ℞ p̄q̄d. fit 64, adde ad 56 numerum æquationis 8 cubum ℞ p̄q̄d. fit 64, differentia producti ab aggregato nulla est, res igitur æquabuntur cubo, quare deprimendo quadratum æquatur 32, & res est ℞ 32, & uera æstimatio ℞ 32 m: 2. Rursus, cubus & 6 quadrata, æqualia sint 20 rebus p: 112, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 20, fit 32, numerus rerum, duc in 2 ℞ p̄q̄d. fit 64, abijce ex 120 aggregato cubi ℞ p̄q̄d. & numeri æquationis, relinquitur 56, numerus qui cum 32 rebus æquatur cubo, res igitur est ℞ 29 p: 1, minue ℞ p̄q̄d. relinquitur æstimatio rei ℞ 29 m: 1. Rursus, cubus & 6 quadrata æqualia sint 20 rebus p: 41, habebis igitur ut prius, in secunda æquatione, 32 res, & 15 numerum, nam detracto 49 aggregato numeri æquationis & 8 cubi ℞ p̄q̄d. ex 64, producto 32 in ℞ p̄q̄d. relinquitur 15, quia uerò productum est maius aggregato, erit 15 cum cubo æqualis 32 rebus, & res erit 5, uel ℞ $13\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, uel ficta ℞ $13\frac{1}{4}$ p: $2\frac{1}{2}$, abijce 2 ℞ p̄q̄d. habebis æstimationem ueram 3, & duas fictas per m: scilicet $4\frac{1}{2}$ o: ℞ $13\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{2}$ m: ℞ $13\frac{1}{4}$ sicut diximus in capitulo primo

De cubo æquali quadratis rebus & numero.
CAP. XX.

DEMONSTRATIO.



Sit iterum cubus a c, æqualis 6 quadratis, 5 rebus, & 88 (gratia exempli) & ponatur b c ℞ p̄q̄d. scilicet 2, manifestum est igitur, quod cubus a c, æquatur 6 quadratis a b & 1 · a b, & cubis a b, & b c, hæc eadem igitur æqualia sunt 6 quadratis a c, 5 rebus a c, & 88, abijciatur iam cubus b c communis, scilicet 8 relinquentur, cubus a b & 6 quadrata a b, & 12 a b, æqualia 6 quadratis a c, 5 rebus a c, p: 80, at 6 quadrata a c, superant 6 quadrata a b in 6 gnomonibus a b quadrati, & erunt 4 res a c, minus.

minus 6 quadratis b c, quæ sunt 24, igitur 6 quadrata a b & 92 res a c, & 56, æqualia sunt cubo a b, & 6 quadratis a b, & 12 rebus a b, abijciantur igitur 6 quadrata a b, communia, relinquentur 29 res a c, p: 56, æquales cubo a b, & 12 rebus a b, & 29 res a c, superant 29 res a b, in 29 b c. quare in 58, quia b c est 2, igitur addatur numeris numero, erunt 29 a b & 144, æqualia cubo a b & 12 rebus a b, abijciantur denuo 12 res communes, erunt 17 res p: 114, æquales cubo, inde habita æstimatione, adde ei b c,

REGULA.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, & productum adde numero rerum, aggregatum erit numerus rerum, æqualium cubo, pro numero autem, duc numerum rerum secundum in ᵀp̄q̄d. & productum adde numero equationis, à quo minue cubum ᵀp̄q̄d. residuum est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, inde inuenta æstimatione, adde ei ᵀp̄q̄d. & habebis uerum æstimationem.

QUAESTIO

Exemplum in hac quæstione. Quidam dedit aureos 2728 ad caput anni ut dicunt, seu sub usura rediuiua, ea conditione, ut reciperet tertio anno, ex capitali & usura, quantum est dimidium capitalis & dimidium eius quod debuisset in fine primi anni, & dimidium eius quod debuisset in fine secundi anni, ubi retinuisset pecunias, & uoluisset soluere sub eadem usura. Pone igitur quod in capite primi anni haberet 144 res, in capite secundi anni habebit 12 quadrata, in capita tertij anni habebit cubum, & hic erit æqualis dimidijs reliquorum annorum simul sumptis, igitur cubus erit æqualis 6 quadratis 72 rebus & 729, duc igitur 6 numerum quadratorum in 1, tertiam sui partem, fit 12, adde ad 72 fit 84, numerus rerum, duc 84 in 2 ᵀp̄q̄d. fit 168, adde ad 729. fit 897, abijce 8, cubum ᵀp̄q̄d. fit 889 igitur cubus æquatur 84 rebus p, 889, æstimatio igitur huius erit ℞ v: cubica $444\frac{1}{2}$ p: ℞ $175628\frac{1}{4}$, p: ℞ v: cubica $444\frac{1}{2}$, m: ℞ $175928\frac{1}{4}$ huic adde 2 ᵀp. habes quæsitam æstimationem ℞ v: cubicam $444\frac{1}{2}$ p: ℞ $175628\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $444\frac{1}{2}$ m: ℞ $175928\frac{1}{4}$ p: 2, cuius cubus est quantitas pecuniarum, quæ ei debentur tertio anno, inde detracto 1728, habebis sortem, per terminos analogos.

De cubo & numero, æqualibus quadratis & rebus.
CAP. XXI.

DEMONSTRATIO.


It cubus & 100, æqualia etiam 6 quadratis, & 24 rebus, & sit cubus ille a c, & b c ℞pq̃d. cumq; cubus a c, æqualis sit cubo a b & 6 quadratis a b, & 12 rebus a b, & cubo b c, qui est 8, erit cubus a b, & 6 quadrata a b, & 12 res a b, & 108, æqualia 6 quadratis a c, & 24 rebus a c, sed 6 quadrata a b, minora sunt 6 quadratis a c, in 6 gnomonibus a d e, & 24 res a b, mino res sunt 24 rebus a c, in 24 b c, quare cubus a b, & 6 quadrata a b, & 12 res a b, & 108, æquantur 6 quadratis a b, & 6 gnomonibus a d e, & 24 rebus a b, & 48, nam 24 b c sunt 48, igitur abiectis ex utraq; parte 6 quadratis a b, & 12 rebus a b, & 48, erit cubus a b, & 60, æqualis 6 gnomonibus a d e, & 12 rebus a b, sunt autem 6 gnomones a d e, 24 res a b, p:24, eo quòd quælibet superficierum a d, & d e, est 2 res, eo quòd b d est 2, & quadratum b c est 4, igitur 36 res a b, & 24, æquantur cubo a b p:60, abijce 24 ex utraq; parte, erit cubus a b p:36, æqualis 36 rebus a b, inde cognita a b addemus eam b c, quæ est ℞pq̃d. & conflabitur æstimatio.

REGULA.

Regula est igitur. Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, & conflabitur numerus rerum, hunc duc in ℞pq̃d. & producti sume differentiam ab aggregato ex numero æquationis, & cubo ℞pq̃d. quæ si nulla est, erunt res æquales cubo. Si uerò productum fuerit maius aggregato, differentia est numerus, qui cum rebus æquatur cubo, & si aggregatum fuerit maius producto, differentia est numerus, qui cum cubo æquatur rebus, inde habita æstimatione, addes eam ℞pq̃d. & conflabitur uera æstimatio. Memineris tamen, quod quando capitulum hoc peruenerit ad capitulum cubi æqualis rebus & numero, addenda erit uera æstimatio eius, & ex his quæ ficte sunt minor, per m: ℞pq̃d: ut habeas utramq; æstimationem capituli cubi & numeri æqualis rebus & quadratis, cum capitulum cubi æqualis rebus & numero, unam tantum ueram æstimationem habeat.

Exemplum, Cubus & 64, æqualia sunt 6 quadratis & 24 rebus, duc 6 numerum rerum in 2, tertiam sui partem, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, quem duc in 2 ℞pq̃d. fit 72, deinde cuba 2 fit 8, adde ad 64, numerum æquationis, fit etiam 72, ideo quia differẽtia horum numerorum nulla est, habebimus cubũ æqualem 36 rebus, quare quadratum æquabitur 36, igitur res est 6, ex capitulo simplici adde ad 2 ℞pq̃d. fit 8, æstimatio rei. Rursus, cubus & 128, æquetur 6 qua-

quadratis & 24 rebus, duc 6 in 2, ut prius, fit 12, adde ad 24, fit 36, numerus rerum, duc 36 in Tp̃q̃d. fit 72, differentia cuius à 136, aggregato 128 numeri æquationis, & 8, cubi Tp̃q̃d. est 64, numerus addendus cubo, quia aggregatum 136, est maius producto 72, quare cubus & 64, æqualia erunt 36 rebus, æstimationes autem sunt 2, & ℞ 33 m:1, quas adde ad 2 Tp̃q̃d, fiunt ueræ æstimationes 4, uel ℞ 33 p:1. Rursus, sit cubus & 9, æqualis 6 quadratis & 24 rebus, duc, ut prius, 6 in 2, tertiam sui partem, fit 12, quem adde ad 34, numerum rerum, fit 36, numerus rerum, ut prius, deinde duc 36, in 2 Tp̃q̃d. fit 72, differentia cuius à 17 aggregato 8, cubi Tp̃q̃d. & 9 numeri æquationis, est 55, ideo quia productum est maius aggregato, addemus 55 ad res, & habebimus cubum, æqualem 36 rebus p:55, huius igitur uera æstimatio est, ℞ $17\frac{1}{4}$ p:$2\frac{1}{2}$, falsa maior est m:5, & falsa minor m: v:℞ $27\frac{1}{4}$ m:$2\frac{1}{2}$, seu ut clarius intelligas, $2\frac{1}{2}$ m:℞ $17\frac{1}{4}$, adde igitur hanc æstimationem, & similiter ueram, Tp̃q̃d. quæ est 2, habebis æstimationes quæsitas, alteram $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $17\frac{1}{4}$, reliquam $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $17\frac{1}{4}$.

De cubo rebus & numero, æqualibus quadratis.

CAP. XXII.

DEMONSTRATIO.



It denuo cubus a c, cum 4 rebus, & 16 numero, æqualis 6 quadratis, & b c sit Tp̃q̃d, ut prius, resoluemus igitur cubum a c, qui æqualis est cubo a b, 6 quadratis a b, 12 rebus a b, & cubo b c, qui est 8, erit hoc totum, cum 4 rebus a c, & 16, æquale 6 quadratis a c, quare cum 4 res a c, sint 4 res a b, p:4 b c & ideo p: 8, erunt cubus a b, p:6 quadratis a b, p:16 rebus a b, p:32, æqualia 6 quadratis a c, 6 autem quadrata a c, æqualia sunt ut demonstratum est, 6 quadratis a b, p: 24 rebus a b, p:24, igitur cubus a b, & 6 quadrata a b, & 16 res a b, & 32, æqualia sunt, 6 quadratis a b, p:24 rebus a b, p:24, abijce ex utraque parte 6 quadrata a b, & 16 res, & 24, relinquetur cubus a b, p: 8, æqualis 8, rebus, incognita a b. adde ei b c, Tp̃q̃d. & fiet a c cognita, rei æstimatio. Rursus, cubus & 4 res & 1, æquentur 6 quadratis, erunt igitur 6 quadrata a c, ut prius, 6 quadrata a d, 24 res a b, & 24. At cubus a c, cum 4 rebus a c, p:1, æqualis est cubo a b, & 6 quadratis a b, & 16 rebus, & 17, quare abiectis communibus, 6 quadratis a b, & 16 rebus a b, & 17, erit reliquum reliquo æquale, scilicet cubus, æqualis 8 rebus p: 7, inde cognita a b, habes a c, ut prius, addendo b c Tp̃q̃d.

REGVLA.

Regula igitur est, Duc numerum quadratorum in sui tertiam partem, & à producto minue numerum rerum, quod si fieri nequeat, casus est impossibilis, in uera æstimatione, residuum itaque erit numerus rerum, inde multiplica primum numerum rerum in Tp̄q̄d. & productum adde numero æquationis, huius aggregati & dupli cubi Tp̄q̄d. differentiam accipe, quæ si nulla est, habes cubum æqualem rebus solum, sin duplum cubi Tp̄q̄d. maius est, differẽtia est numerus addendus rebus, si duplum cubi minus est aggregato, differentia est numerus addendus cubo, inde æstimationi inuentæ adde Tp̄q̄d. ut habeas æstimationem ueram.

Exemplum, cubus & 4 res & 8, æquantur 6 quadratis, duc 6 in 2, tertiam sui partem, fit 12, abiice 4 fit numerus rerum 8, duc etiam 4 numerum rerum, priorem, in 2 Tp̄q̄d. fit 8, adde ad 8, numerum æquationis, fit 26, huius & dupli cubi Tp̄q̄d. quod est etiam 16, nulla est differentia, quare cubus æquat̃ 8 rebus, & rei æstimatio est ℞ 8, cui adde 2 Tp̄q̄d. fiet uera æstimatio rei, ℞ 8 p:2. Rursus, cubus p:4 rebus p:16, æqualis fit 6 quadratis, duco 6 in 2 Tp̄q̄d. ut prius, fit 12, abiice 4 numerum rerum, fit 8, rerum numerus, duco 4 numerum priorem rerum, in 2 Tp̄q̄d. fit 8, adde ad 16 numerum æquationis, fit 24, abiice 16, duplum cubi Tp̄q̄d. relinquitur 8, igitur addemus 8 cubo, quia aggregatum maius est duplo cubi Tp̄q̄d. & fiet cubus p: æqualis 8 rebus, res igitur est 2, uel ℞ 5 m:1, quare addito 2, Tp̄q̄d. fiet uera æstimatio 4, uel ℞ 5 p:1. Rursus, cubus & 4 res & 1, æquent̃ 6 quadratis, eruntque ut prius, 8 res, & ducto numero rerum priore, qui est 4, in 2 Tp̄q̄d. fit 8, addito 1, numero æquationis, fit 9, duplum cubi Tp̄q̄d. est 16, differentia est 7, & quia duplum cubi maius est aggregato, erunt 8 res, & 7, æqualia cubo, quare res ualet ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, uel in æquatione falsa, minor æstimatio erit 1 m: adde 3 Tp̄q̄d. cuius, habebis duas ueras æstimationes, scilicet 1, & ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$.

Memineris autem eius, quod diximus in præcedenti capitulo, etiam hic, quod cùm peruenerit æquatio ad cubum æqualem rebus tantum, quia falsa æstimatio à uera non differt in numero, ideo pro secunda æstimatione, quia nihil additur, nec p: nec m: Tp̄q̄d. ideo ipsa Tp̄q̄d. erit æstimatio uera, in utroque, ut hic æstimatio cubi & 4 rerum & 8, æqualium 6 quadratis, erit ℞ 8 p:2, uel 2, & in præcedente capitulo, æstimatio cubi & 64, æqualium 6 quadratis & 24 rebus, erit 8 ut dictum est, & etiam est 2, Tp̄q̄d. scilicet, & hoc, quia omnes additiones & detractiones, ex tertia parte numeri quadratorũ fieri debent.

De

De cubo quadratis & numero, æqualibus rebus.
CAP. XXIII.

DEMONSTRATIO


it etiam cubus, 6 quadrata, & 4, æqualia 41 rebus, & sit cubus a b, cui addam b c Tpq̃d. eritq́ a c cubus, æqualis cubo a c, 6 quadratis, 12 rebus, & 8, loco cubi a b 6 quadratorum, & 4, ponantur 41 res, his æquales, erit cubus a c æqualis 53 rebus a b, & 4, qui est differentia cubi b c, & 4 numeri æquationis primi, ad complendum igitur 53 res a c, addantur 53 b c, eruntque cubus a c p: 106, æqualia 53 rebus a c, p: 4, abijce 4 ex utraque parte, erit cubus p: 102, æqualis 53 rebus suis, inde a c æstimatione inuenta, abijce b c Tpq̃d. relinquetur a b cognita, & est res ipsa

REGULA.

Regula igitur est. Duc numerum quadratorum in tertiam sui partem, productum adde numero rerum, fiet numerus rerum secundus, ab hoc minue quadratum Tpq̃d, & residuum duc in Tpq̃d. & totum productum adde numero æquationis, & conflabitur numerus, qui cum cubo æquabitur rebus iam assignatis, inde ab eius æstimationibus minue Tpq̃d. residua sunt quæsitæ æstimationes, ideo sufficiet unum exemplum.

Cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus, duc 6 numerum quadratorum, in 2, sui tertiam partem, fit 12, adde ad 31, fit 43, numerus rerum, ab hoc abijce 4 quadratum Tpq̃d. relinquetur 39, quem duc in 2 Tpq̃d. fit 78, adde ad 12, numerum æquationis, fit 90, igitur cubus p: 90, æquatur 43 rebus, res igitur est 5, uel ℞ $24\frac{1}{4}$ m: $2\frac{1}{2}$, abijce 2 Tpq̃d. habebis ueras æstimationes 3, uel ℞ $24\frac{1}{4}$ m: $4\frac{1}{2}$, & in his ambabus, uerum est quod cubus & 6 quadrata & 12, æquantur 31 rebus. Memineris igitur quod omnes horum capitulorum æstimationes, habentur, addendo semper ueras & fictas æstimationes capitulorum in quo resoluuntur Tpq̃d, & dummodo numeris relinquatur, etiam id quod additur sit m: purum, illud relictum est rei uera æstimatio. possunt etiam resolui in capitula alia quatuor denominationum, ut liquet.

DEMONSTRATIO.



Sit igitur (gratia exempli) cubus quadrati, cum 6 q̄d' q̄dra tis, æqualis 100, & sit cubus q̄drati, corpus a b c d, altitudinem habens a b, erit igitur q̄dratum, quia latus cubi cū corporis a b c d, quod supponitur cubus quadrati, manifestum est igitur, quod superficies a b c d, est q̄d' q̄d^m, quia iam a b supponitur quadratum, sexcuplum igitur a b c d superficiei, cum a b c d corpore, ęq̄le est 100, ex supposito, ponatur igitur a b res, erit igitur corpus a b c d cubus, & superficies a b c d q̄dratum, suppositum est aūt, quod corpus a b c d, cum sexcuplo a b c d superficiei, sit æquale 100, igitur cubus a b & 6 quadrata a b, æqualia sunt 100, quare ex suo capitulo a b cognita, at a b in prima interrogatione fuit q̄dratum, igitur æstimatio q̄drati in prima interrogatione, quando cubus quadrati, & 6 q̄d' q̄d^a equantur 100, cognita erit, cum sit eadem æstimationi rei in secunda quęstione. At nos uolumus in prima quæstione rei æstimationem, res autē est semper ℞ quadrati, igitur ℞ a b ęstimationis inuentę per secundam quęstionem, est rei æstimatio in prima quæstione, ut proponebatur. Eadem ratione, si posueri mus cubum q̄drati, & 6 cubos, ęquales 100,





erit corpus a b c d, cubus quadrati, & a b quadratum, cui si ponatur aliqua superficies q̄drata ęq̄lis, puta e f g, erit sexcuplū corporis ex e f in e f g, cum corpore a b c d, æquale 100, ponatur modo corpus e f g res, quia igitur e f est ℞ a b, ex supposito erit cubus e f ℞ cubi a b, igitur corpus a b c d, quadratum corporis ex e f in e g, posito igitur corpore a b c d quadrato, erit cubus e f res, & sexcuplum eius sex res, & iam sexcuplum cubi e f, cum corpore a b c d, equabatur 100 & non mutantur corpora, sed manent eadem, & sexcuplum cubi e f, est 6 res, & corpus a b c d quadratum, igitur quadratum & 6 res, æquantur 100. igitur res est cognita, scilicet cubus e f, sed cum e f sit latus cubi cum sui cubi, igitur e f cognita erit, quę est ℞ cubica æstimationis inuentæ. At cum e f sit res in prima quæstione, quia est ℞ quadrata a b, & a b supponitur quadratum, posito a b c d, corpore cubo quadrati, igitur posito a b c d corpore cubo quadrati, erit res e f, & nota latus scilicet cubicam æstimationis inuentæ per secundam quæstionem, quam uolumus.

Ex hoc manifestæ sunt regulæ capitulorum deriuatiuorum omnium.

nium. ostendimus enim in uniuersum, capitula 16 primitiua composita, & sunt hæc,

Primum, Quadratum æquale rebus & numero. 2^m, res æquales q̃d & numero. 3^m, numerus æqualis q̃d^o & rebus. 4^m, cubus æqualis rebus & numero. 5^m, res æquales cubis & numero. 6^m, numerus æqualis cubo & rebus. 7^m, cubus æqualis q̃d & numero. 8^m, q̃d æqualia cubo & numero. 9^m, numerus æqualis cubo & q̃d. 10^m, cubus æqualis q̃d rebus & numero. 11^m, q̃d æqualia cubo reb^9 & numero. 12^m, numerus æqualis cubo q̃d & rebus. 13^m, res æquales cubo q̃d & numero. 14^m, cubus & numerus æquales q̃d & rebus. 15^m cub^9 & res æquales q̃d & numero. 16^m, cubus & q̃d æqualia rebus & numero. Manifestum est aũt quòd ex his 2^m, 5^m, 8^m, 11^m, 13^m & 14^m, secundum naturam, habent duas æstimationes, ex toto diuersas, & à diuersis regulis pendentes. Vnde duplicatis his capitulis fient capitula primitiua 22 composita, & quia 15^m habet tres æstimationes, erunt capita 24 unicuiq; aũt eorum debentur duo capitula deriuatiua, alterum ex natura quadrati, alterum ex natura cubi, nam etsi deriuatiua sint infinita, in unoquoq; capitulo, omnia tamen reducuntur ad alterum horũ duorum modorum, loquendo de his, de quibus potest haberi regula generalis. Igitur manifestum est, ipsa esse ad unguẽ 48. Et mea nihil refert de numero dicere, modò scias, quòd omnia primitiua, habẽt duo deriuatiua diuersi generis, & quòd capitula primitiua cõposita, ad minus reduci nequeũt quàm 18, igitur cõtracto numero, quantumuis erunt deriuatiua saltem 36, nã capitula rerum ęqlium numero & cubo, & q̃dratorum ęqlium cubo & numero, necessario sunt duplicata, manifestũ est enĩ, quantũ una ęstimatio ab alia differat. Oblato igiť capitulo, ex tribus aut q̃tuor denominationibus, si non ad sit numerus, primo oẽs denominationes per minorẽ deprime, ita ut minor in numerũ euadat, deinde accipe inferiorem denominationem, & uide si constat capitulum, ex tribus denominationibus, an minor sit radix maioris quadrata uel cubica, uel quod radix minoris quadrata, sit ℞ cubica maioris, tunc quæres æstimationem in consimili capitulo ex 16, deinde eius æstimationis, accipe talem radicem, qualis est denominatio minor, cõparata ad minorem, una unius ordinis ad reliquam, & ad facilitatem. Disposui deriuatiua oĩa, in directo suorum primitiuorũ, in capitulo 2°, etiam constantia ex quatuor denominationibus, in quibus si bene aduerteris, semper minor denominatio, id est, inferior post numerum, est radix quadrata unius, & ℞ cubica alterius, denominationis eiusdem capituli. Exemplum. Igitur si quis dicat,

Quad q̃d p:2 quadratis, æquantur 10, uides quòd eius primi- 1 m.

 tiuum

tiuum est quad &res, æqualia numero, quære igitur æstimationem quadrati p: 2 rebus, æqualis 10, & est ℞ 11 m: 1, & quia res est ℞ quadrata quadrati, dic quod æstimatiu est ℞ v: ℞ 11 m: 1.

2m. Cu q̄d̄, p: 2 cu, æquatur 10, eius primitiuum est etiam quad p: rebus, æqualia numero, cum igitur q̄d & 2 res, æquantur 10, æstimatio rei est ℞ 11 m: 1, cum igitur res sit ℞ cubica cubi, minor scilicet denominatio minoris, erit æstimatio quæsita ℞ v: cub ℞ 11 m: 1.

3m. Quadm relati primi, & 2 res prima æquantur 10, uides quod relatum est ℞ quadrata, quadrati relati primi, dic igitur hoc esse deriuatiuum ex genere quadrati, si igitur q̄d & 2 res, æquantur 10, æstimatio est ℞ 11 m: 1, igitur cum res sit ℞ relata relati, dices quod æstimatio quæsita, est ℞ relata v: ℞ 11 m: 1.

4m. Cubus quadrati p: 3 q̄d q̄dratis, æqualis est 20, tunc uides, quod eius primitiuum est cubus & quadrata, æqualia numero, cum igitur cubus & 3 q̄drata, æquantur 20, æstimatio rei est 2, & quia quadratum est radix quadrata, q̄d quadrati, ideo æstimatio rei erit ℞ 2.

5m. Cubus quadrati p: 3 q̄d quadratis, p: 10, æquantur 15 quadratis, uides quod eius primitiuum in tabula, uel ex ratione dicta, est cubus & quadrata & numerus, æqualia rebus, ideo quære æstimationem cubi & 3 q̄d & 10, æqualium 15 rebus, quæ est 2, & quia res est radix quadrata, quadrati, ideo dices quod æstimatio erit ℞ 2.

6m. Cubus cubi & 3 cu quadrata, & 10, æquantur 15 cubis, dices ut prius, primitiuum esse cubum & quadrata & numerum, æqualia rebus, igitur si cubus & 3 quadrata & 10, æquantur 15 rebus, res est 2, & quia res est ℞ cubica cubi, ideo dicemus quod æstimatio erit ℞ cubica 2, & quia primitiuum habet duas æstimationes, ut notum est, totidem etiam habebit deriuatiuum, & utriusque ℞ cubica in hoc exemplo & quadrata in præcedenti, satisfaciet, & hoc est generale omnibus deriuatiuis, ut habeant totidem æstimationes, quot sua primitiua.

7m. Sit etiam cubus cubi æqualis 3 cubis quadrati & 16, tunc quia ducta ℞ cubi q̄n quæ est cubus, in cubum quadrati, fit cubus cubi, ideo res erit in capitulo deriuatiuo generali, & eius primitiuum erit, cubus æqualis quadratis & numero, si igitur cubus æqualis sit 3 quadratis p: 16, æstimatio rei erit 4, quia igitur quadratum minor denominatio in secunda æquatione, est ℞ cub. cubi quadrati, ideo dico, quod sumenda erit ℞ cub. 4, pro æstimatione. Et ita de alijs.

Et similiter dices, de cubo cubi & cubo, nam potest referri ad rem & cubum, ut enim res est ℞ cubica cubi, sic cubus est ℞ cu: cub cubi. Potest & referri ad quadratum, cubum quadrati, nam ex utraque in suam radicem, producitur compar denominatio, nam ex quadrato

quadrato in rem, fit cubus, & ex cũ quadrati in cubum, fit cubus cubi, sed prior modus est facilior.

De capitulis imperfectis & specialibus. CAP. XCV.

Regulæ hæ dicuntur generales, & hoc duabus de causis: prima, quia modus in se generalis est, quamq́ repugnet naturę ęstimationis, ut sit uniuersalis, uelut si quis dicat, omnis numerus productus ex aliquo in se ducto, q̃dratus est. regula est generalis: nec tamẽ sequit̃, quod per hanc regulam cognoscam omnem numerum quadratum, quia nõ licet cognoscere omnem numerum, qui ex alio in se ducto producitur. Dicitur & generalis regula, q̃a exhaurit ęstimationis genus uniuersum, quanquam æstimatio non exhauriat regulã, particulares tñ sunt regulæ; quia nõ omnem propositam quęstionẽ per illas soluere possumus.

Cum igitur cubus æqualis est rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum una in alterius radicem, fiat numerus æquationis, tunc adde quartam partem eius partis, cuius sumenda esset radix alteri parti, & ℞ aggregati, addito dimidio ℞ partis, cuius assumpsisti radicem, est æstimatio rei.

Exemplum. Cubus æqualis sit 20 rebus & 32, tunc ex 16 in ℞ 4, fit 32, igitur addo 1 quartam partem 4, ad 16, fit 17, cuius ℞ p: 1, dimidio ℞ 4, est rei æstimatio, quare res est ℞ 17 p: 1.

1 cub. æqlis 20 rebus p: 32
16 ℞ 4
℞ 17 p: 1

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & inueneris duos numeros, producentes numerum æquationis; quorum unus sit ℞ aggregati, ex altero & numero rerum, ille qui est ℞, est rei ęstimatio. 2m.

Si n. ille numerus est radix numeri rerum & partis producentis, numerum igitur si sit res ducta in quadratum producit cubum, & ducta in numerum rerum producit res, & in aliam partem ex supposito numerum. q̃re cubus æqualis erit rebus illis cum numero.

Exemplum, Cubus æquatur 24 p: 32 rebus & sunt duo numeri, producentes 24, qui sunt 6 & 4, quorũ 6 est ℞ aggregati, ex 32 numero rerum, & 4 alio producente, nam 6 est ℞ 36, igitur 6 est rei æstimatio.

cubus ęq̃lis 24 p: 32 rebus
6 4 32
36
6

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerum feceris duas partes, ex quarum utraq; in alterius radicem mutuo, fiat dimidium numeri æquationis, radices illarum partium, cõstituunt iunctæ, rei æstimationem. Nam cum aggregatum cuborum & duorum parallelipedorum mutuorũ se habeat ad reliqua quatuor parallelipeda ut aggregatum quadratorum ad duplum producti unius in alterum: Etiam ex supposit. ℞. illæ partium numeri rerum qui numerus est ęqualis aggregato quadratorum, pro-

ducant in ipsa quadrata mutuo dimidium numeri, his igitur producent numerum, ergo aggregatum illarum ℞ est res.

Exemplum, Cubus æquetur 10 rebus p:24, & ex 10 fiunt duæ partes, 9 & 1, ex quarum mutua unius in ℞ alterius multiplicatione fiunt 9 & 3, qui iuncti faciunt 12, dimidium 24, igitur radices 9 & 1, quæ sunt 3 & 1 iunctę, constituunt 4, rei æstimationem.

cub⁹ ęq̄lis 10 reb⁹ p:24
9 — 1   12
3 — 1
12
4

4ª. Cum fuerit cubus ęqualis rebus & numero, & ex numero rerum feceris tres partes in eadem proportione, ex quarum ductu mediæ in aggregatum radicum primæ & tertiæ fiat numerus æquationis, seu ex tertia in ℞ primæ, & primæ in ℞ tertiæ, quod idem est, tunc tale aggregatũ dictarum radicum, est rei æstimatio. Quia proportio quadratorum partium cum superficie media ad mediam superficiem est sicut aggregati cuborum cum quatuor parallelipedis ad duo reliqua parallelipeda; & illa duo quadrata habẽt superficiẽ in media ꝓportione, igitur diuiso cubo iuxta rationem basis latere q̃dratorum, si producant numerum inuicem mutuo ducta seu media sit perficies in rẽ; ex re in reliquas tres partes basis, fient sex corpora residua cubi; ergo cubus ille est æqualis rebus & numero.

Exemplum: Cubus æquatur 19 rebus p:30, & ex 19 fiunt tres partes analogę, 9, 6, 4, ex quarum secũda, quæ est 6 in 5 aggregatum radicum primę & tertiæ, fit 30, ideo 5 aggregatũ radicũ, est rei ęstimatio.

cub⁹ ęq̄lis 19 reb⁹ p:30
4 — 6 — 9
2   3
12 — 18 — 30

5ª. Cum fuerit cub⁹ ęq̄lis reb⁹ & numero, & inueneris duos numeros, quorũ aggregatũ, ductũ in ꝓductum unius in alterũ, ꝓducat tertiã partẽ numeri æq̃tionis: & q̃drata illorũ ęq̃lia fuerint aggregato ex numero rerũ, & ꝓducto unius in alterũ, tũc aggregatũ illorũ numerorũ, est rei æstimatio. Hæc.n. est conuersa generalis regulæ. Quia.n. a c cũ q̃drato differentiæ est æq̃le numero rerũ. igit̃ p demonstrata in libro de ꝓportionibus totidẽ res æq̃bunt̃ cubis a b & b c: ibidẽ etiam est demonstratũ ꝙ ꝓductũ a b in b c q̃dratũ, et b c in q̃dratũ a b est ęq̃le ductui a c in a e prius aũt supponit̃ ęq̃le tertię parti numeri, ergo & hoc & triplũ triplo igit̃ a c cub⁹ æq̃tur numero & reb⁹ ꝓpositis.

g f e d

Exemplum: Cubus æq̃tur 7 rebus p: 90, & 3 & 2 ducti inuicem ꝓducunt 6, q̃ ductus in 5, aggregatũ, ꝓducit 30: tertiã partem 90, differentia uerò 13, aggregati q̃dratorũ, ab ipso 6, producto unius in alterum,

cub⁹ æq̃lis 7 reb⁹ p: 90
9   3
4   2   6 — 7 — 13
13   5   30

alterũ, est 7, numerus rerũ, ideo 5, aggregatũ illorũ, est rei ęstimatio.

Cum fuerit cub⁹ æq̃lis reb⁹ & numero, & inuentus fuerit nume- 6.
rus cubicus, cuius ℞ cubica, ducta in numerũ rerum, p̃ducat aggregatũ ex numero cubico inuento, & numero ęq̃tionis, seu illorũ differentiã, tunc res p: eadẽ ℞ cubica, erit cõm unis diuisor cubi, p: eodẽ numero cubico, & numeri rerũ cũ numero aggregato, ex numero ęq̃tionis, & numero cubo, uel res m: ℞ cubica eadẽ, erit cõmunis diuisor, cubi m: numero cub. inuẽto, & numeri rerũ m: differẽtia numeri æq̃tionis, & numeri cubi inuẽti, inde peruenies ad rei ęstimationem.

Exemplum. Cubus æquatur 16 rebus p: 21, tunc quia addito 27 numero cubo, ad 21 fit 48, qui producitur ex 3 ℞ cubica 27 in 16 numerum rerũ, ideo dico, quod res p: 3, erit cõmunis diuisor, addito 27 utriq; parti, scilicet cubo & 16 rebus p: 21, inde facta diuisione, habebis q̃dratum m: 3 rebus p: 9, ęqualia 16, quare q̃dratum ęq̃bitur 3 rebus p: 7, & res erit ℞ 9¼ p: 1½. Et similiter, si dicamus, cubus æquat 4 rebus p: 15, hic abiecto 15 ex 27 numero cubo, differentia quæ est 12, continet 4, numerum rerum, in 3, radice cubica 27, ideo dico, quod abiecto communi 27, ex utraq; parte, fiet cubus m: 27, ęqualis 4 rebus m: 12, inde diuisis ambobus per rem m: 3, communem diuisorem, fiet quad. p: 3 rebus p: 9, æquale 4, quare æquatio nulla sequetur, quamuis perueneris ad modum æquandi, in detractione, nisi forsitan aliquando per m: syncerum.

cub⁹ æq̃lis 16 rebus p: 21
3 / 48 — 27 / 48
1 res p: 3
cub⁹ p: 27 | 16 res p: 48

cubus æq̃lis 4 reb⁹ p: 15
3 / 12 — 27 / 12
1 res p: 3
cubus m: 27 | 4 res m: 12

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & ex numero rerũ 7.
auferatur ¾ quadrati rei, & ℞ residui addatur, aut minuatur, ex dimidio rei, aggregatum ductum in quadratum residui, & residuum ductum in quadratum aggregati, producunt numerum æquationis.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & rei æstimatio est 4, cuius quadratum est 16, huius ¾ sunt 12, abijce ex 14 numero rerum fit 2 residuum, cuius radicem adde, & minue ex 2, dimidio 4, æstimationis rei fiunt 2 p: ℞ 2, & 2 m: ℞ 2, dico igitur quod ex uno in quadratum alterius mutuo fiunt 8 scilicet numerus æquationis.

cubus æq̃lis 14 rebus p: 8
res 4 quadratum 16
¾ q̃drati 12 — 14
2 p: ℞ 2 — 6 p: ℞ 32
2 m: ℞ 2 — 6 m: ℞ 32
8

Cum fuerit cubus æqualis rebus & numero, & diuiseris di- 8.
midium numeri æquationis, per rei æstimationem, addiderisque prouentum numero rerum, & ab aggregato detraxeris ¾ qua-

 drati

drati, ipsius rei, ℞ residui, addita & detracta, à dimidio æstimationis, ostendit partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius mutuò, producitur dimidium numeri æstimationis.

Exemplum. Cubus æquatur 14 rebus p: 8, & æstimatio est 4, diuide 4 dimidium 8, per 4, æstimationem, exit 1, adde ad 14 fit 15, abijce 12, qui sunt $\frac{3}{4}$ quadrati æstimationis, relinquitur 3, cuius radicē adde ac minue, ex 2 dimidio æstimationis, habebis 2 p: ℞ 3, & 2 m: ℞ 3, ex quorum ductu unius, in quadratum alterius mutuò, fit 4 dimidium numeri æquationis.

cubus ęq̄lis 14 rebus p: 8

1 — 4 — 4

15 — 12 — 3

2 p: ℞ 3	2 m: ℞ 3
7 m: ℞ 48	7 p: ℞ 48
2	2

9. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & inueneris numerum, qui ductus in ℞ aggregati, ex ipso & numero rerum, producat numerū æquationis, tunc dimidia eius ℞, addita, uel detracta radici differentiæ numeri æquationis, & $\frac{3}{4}$ eiusdem aggregati, constituit rei æstimationem.

Exemplum. Cubus p: 12 æquatur 34 rebus, tunc quia addendo 2 ad 34, productum ex ipso 2, in 6 ℞ 36 aggregati 2, & 34 est est 12 numerus æquationis, ideo dico, quod si ad 3, dimidium radicis 36 addatur uel minuat ℞ 7 differentiæ 34 numeri rerum & 27, quod est $\frac{3}{4}$ q̄drati 6, seu tales aggregati, quod consurget rei æstimatio, 3 p: ℞ 7, uel 3 m: ℞ 7.

cubus & 12 æq̄lis 34 reb⁹

2

36

12 — 2 — 6

34 3

27

7

10. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & subtraxeris talem numerum ex numero æquationis, ita quod ℞ cuba differentiæ, ducta in numerum rerum, producat numerum detractum, tunc res m: ℞ cubica differentiæ, erit communis diuisor, facta detractione, & hæc regula similis est sextæ, sicut præcedens secundæ.

Exemplum. 16 res æquantur cubo & 21, detracto 48, relinquitur 27, cuius ℞ cubica 3, ducta in 16 numerum rerū, producit 48, igitur detracto 48, ex utraque parte, fient cubus m: 27, & 16 res m: 48, inde diuisor communis erit res m: 3, & prouenient quadratum & 3 res & 9, æqualia 19. quare quadratum & 3 res, æquabuntur 7, & rei æstimatio erit, ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$.

cubus & 21 æq̄lis 19 reb⁹

48

27 — 3

48

res m: 3

cub⁹ m: 27 | 16 res m: 48

11. Cum fuerint res æquales cubo & numero, & ex numero rerum feceris tres partes proportionales, ex quarum secunda, ducta in differentiam radicum primæ & tertiæ, seu ex ductu primæ in ℞ tertiæ, & tertiæ in ℞ primæ, differentia æqualis fuerit tertiæ parti numeri

numeri æquationis, erit differentia illarum radicum rei æstimatio, & est similis 4.

Exemplum. 19 res æquales sunt cubo & 18, cum ex 19 factæ fuerint tres partes proportionales 4.6, 9, ex quarum media 6 ducta in differentiam radicum 9 & 4, quæ est 1, fiat 6, tertia pars 18 numeri æquationis, ideo dico quod 1 differentia talium radicum est rei æstimatio.

cub9 & 18 æq̃les 19 reb9
9 6 4
3 1 2
6 — 3 — 18

12 Cum fuerint res equales cubo & numero, & cum ℞ cubica numeri æquationis, diuiseris numerum rerum, & de eo quod exit, feceris duas partes, ex quarũ ductu unius in quadratum alterius, fiat numerus æquationis, tunc quantitas proportionalis, inter ℞ cubicam numeri æquationis, & partem, quã duxis in q̃dratum alterius, ut fiat equationis numerus, est rei estimatio.

Exemplum. 18 res æquantur cubo p: 8, diuiso 18 per 2 ℞ cubam 8, exit 9, ex quo fiunt duæ partes 8 & 1, ex quarum una quæ est 8, in quadratum alterius q̃d est 1, fit 8, numerus æquationis, ideo 4 numerus medius proportione inter 8, partem 9, quam duxisti in quadratum 1, alterius partis, & 2 ℞ cubã 8 numeri æquationis, est rei æstimatio.

18 res æq̃les cubo p: 8
2 — 2
9 — 1 — 8
1 4
8

13 Cum fuerit cubus & numerus æqualis rebus, & ex tertia parte numeri rerum, feceris duas partes, quæ ductæ in suas radices, producant duos numeros, qui iuncti, æquales sint dimidio numeri æquationis, aggregatum illarum radicum, est rei æstimatio, & est similis tertiæ regulæ.

Exemplum. 15 res, æquantur cubo & 18, capio 5, tertiam partem 15, ex quo facio duas partes, 4 & 1, quæ ductæ in suas radices, 2 & 1, producunt 8 & 1, quorum aggregatum 9, est dimidium 18 numeri æquationis, ideo dico, quod 3, aggregatum talium radicum, est rei æstimatio. Et iam scis, etiam ex regula generali, quod quotiens ex numero rerum possunt fieri duæ partes, quarum una ducta in alterius radicem, producatur numerus æquationis, quod talis ℞ est rei æstimatio, & quod hoc potest esse duobus modis, & quomodo cadat in Binomio uel reciso & integris, ideo quamuis essent similes primæ regulæ, quia tamen ex capitulo generali, quasi uiolenter in eam rapimur, satis fuerit admonuisse hic.

15 res æquales cubo p: 18
5
1 — 4
1 — 2 — res 3
1 — 8 — 9 — 9

Cum

Cum fuerit numerus æqualis cubo & quadratis, & scieris ex
14ª. numero quadratorum facere duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat numerus equationis, tunc duces partem quæ non in se ducitur, in aggregatum eius quæ in se ducitur, & quartæ partis eius, quæ non in se ducitur, producti ℞, detracto dimidio partis, quæ non in se ducitur, est rei æstimatio.

Exemplum. Cubus & 20 quadrata, equantur 72, ex 20 fiunt duę partes, 18 & 2, & ex una in quadratum alterius fit 72, nam ex 18 in 4 fit 72, dico, quòd si 18, ducatur in 6½ aggregatū ex 2 reliqua parte, & 4½, quarta parte ipsius 18, fiet 117, cuius ℞, detracto 9, dimidio 18, ostendit æstimationem rei ℞ 117 m: 9.

cub⁹ & 20 q̄darta æq̄lia 72			
2	18		
	4½		
	2		
	6½	18	117
℞ 117 m: 9			

15ª. Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, & inueneris numerum non minorem quarta parte numeri quadratorum, nec maiorem tertia parte, cum quo diuiso numero æquationis, proueniet numerus quadratus, cuius radicis dimidium additum numero quadratorum, faciat quadruplum ipsius diuisoris, tunc æstimatio rei est duplum numeri diuisoris, p: uel m: radice producti, ex quadruplo diuisoris, in differentiam numeri rerū, & tripli ipsius diuisoris.

Exemplum. Cubus p: 48 æquatur 10 quadratis, tunc quia 3, qui non est minor quarta parte 10 numeri quadratorum, nec eius tertia parte maior, diuidens 48 producit 16, cuius medietas radicis quæ est 2, addita ad 10 numerum quadratorum, constituit 12, quadruplum diuisoris 3, ideo dico, quòd si duplo diuisoris quod est, 6, addatur uel detrahatur ℞ producti, ex 12 quadruplo 3 diuisoris, in 1, differentiam 10 numeri rerum, & 9, tripli 3, diuisoris, & est tale productum etiam 12, quod constituemus utramque æstimationem, 6 p: ℞ 12, uel 6 m: ℞ 12.

10 quad. æq̄l. cubo & 48			
3			3
4		4	16
12	2	10	12
6 p: ℞ 12 uel 6 m: ℞ 12			

Et scias, quòd per capitula cognoscuntur regulæ & quæstiones
Nota. super his formatæ cum facilitate, quæ aliàs uix soluerent, ipsæ uero regulæ sumptæ sunt ex demonstrationibus capituli sexti, & ego nō apposui eas, quia intelligenti nostros libros super Euclidem, sunt per se manifestæ, & non intelligens non curabit illas nec quæret, quoniam non sunt ei necessariæ.

16ª. Operæpretium fuerit nunc ostendere, quòd hę regulæ non possunt esse generales, respectu æstimationis, & modus in uno sufficiet

ad

ad ostendendum in reliquis capitulis. Capiamus igitur capitulū, pximius, & de quo magis posset hoc credi, propter multiplicem æstimationem, & sit cubus p: numero, æqualis 7 quadratis, & sit $2\frac{2}{3}$ numerus positus, id est numerus, qui primo cognoscitur in sexto capitulo, regula secunda, erit igitur ex illa regula, rei æstimatio, ℞ 16 p: $2\frac{2}{3}$, quare $6\frac{2}{3}$, quare residuum ad numerum quadratorum est $\frac{1}{3}$, quare ex demonstratione posita in initio tertij libri, productum $6\frac{2}{3}$, in quadratum $\frac{1}{3}$, est numerus fractus, & est $\frac{20}{27}$, & econtrà, ducto $\frac{1}{3}$ in quadratum $6\frac{2}{3}$, fit fractus numerus etiam, scilicet $14\frac{22}{27}$, quare posito numero quadratorum integro, & æstimatione fractis numeris cōstituta, numerus æquationis, qui est superatio partium, quę sunt rationales, quadratorum ad cubū, nunquam poterit esse numerus integer, sed talis æquationis numerus producitur ex una parte numeri rerum, in alterius quadratum. Hoc ostenso, capio cubum & numerum æquales 7 quadratis: manifestum est autem ex demonstratis in septimo super Euclidem, & ex regulis sexti libri, deducendo numerum ad quadratum & cubum, quod maxima productio partium 7 in quadratum alterius, est $50\frac{22}{27}$, igitur poterit diuidi 7, ut producat numeros integros, per multiplicationem unius partis in quadratum alterius, ab 1 usq; ad 50, & non in fractos, ex demonstratis igitur in integros, at in integris non potest fieri nisi triplex diuisio, ut patet in figura, nec produci possunt alias quàm 6, 20, 36, 48, 30, igitur residui 45 numeri, nullo modo per genus huius ęstimationis exhauriri poterunt, specialis igitur est, ac ualde etiam specialis, nec tamen credas, quòd in alijs capitulis, numerus pro Binomij aut recisi altera parte non possit inseruire, ut sæpius in exemplis docuimus.

	7		
1	6,	36,	6.
2	5,	50	20.
3	4,	48,	36,

Cum fuerit cubus ac numerus æqualis rebus, & ex ℞ numeri rerum feceris duas partes, ex quarum ductu primæ in duplum quadrati secundæ, & secundæ in quadratum primę, fiat numerus ęquationis, tunc secunda pars erit rei æstimatio. 17ª.

Exemplum. Cubus & 48, ęquantur 25 rebus, tunc quia ex 5, & 25, fiunt partes 3 & 2, ex quarum ductu 2 in 18 duplum quadrati 3, & ex 3 in 4 quadratū 2, fit 48, ideo dico, quod 3 pars, cuius quadratum duplicatur, est rei æstimatio.

cubus & 48 ęq̃lis 25 rebus
2 ✕ 3 —— 5
4 18
12 —— 36
48

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, & duo numeri differentes in numero æquationis, ducti inuicem, produxerint tātum, quantum est cubo ⅓ pq̃d, in cubum differentiæ ℞ cubicarum 18ª.

talium numerorū, tunc differentia talium ℞ cubicarum, est rei æstimatio, ut in exēplo à latere patet, res eñ facilis est.

cubus & $22\frac{1}{2}$ q̄d. æq̄l. 98
3375 —— 125 —— 27
98
$7\frac{1}{2}$ 5 —$\frac{1}{2}$— 3
$421\frac{7}{8}$ —— 8
3375

Corm. Ex his patet unum admirabile: scilicet quòd in his capitulis cum numerus propositus fuerit compositus, facile frequenterque eueniet ut æstimatio possit inueniri, at si primus rarò admodum: quia non contingit duas partes numeri integri commensas inuicem seu fractas numerum integrum producere, quanto minus in radicem uel alterius quadratum: quod in his plerunque regulis præsupponitur.

Corm. Quia ex regula 14 huius ex $22\frac{1}{2}$ numero rerum possunt fieri duæ partes, ex quarum una in alterius quadratum, fient 98 numerus æquationis & æstimatio est differentia ℞ producti ex una illarum in suam quartam partem ac reliquam à dimidio eiusdem primę partis, ideò posita prima parte 1 pos. ducemus eam in $22\frac{1}{2}$ m: $\frac{3}{4}$ pos. & fient $22\frac{1}{2}$ pos. m: $\frac{3}{4}$ quad cuius ℞ est 2 p: quam $\frac{1}{2}$ pos. igitur $\frac{3}{2}$ pos. p: 2 æquatur illi radici ergo prima pars est $10\frac{1}{4}$ p: ℞ $101\frac{1}{16}$ alia $12\frac{1}{4}$ m: ℞ $101\frac{1}{16}$.

Ostendit regulas maiores, quæ sunt omnino singulares.

CAP. XXVI.

Prima. Vando quadratum quadrati & res, æquantur quadratis & numero, & diuiso numero rerum ac numero æquationis, per numerum quadratorum, dimidium exeuntis ex numero rerum, fuerit radix prouentus numeri æquationis iam diuisi, tunc accipe ℞ numeri primi æquationis, & ei adde quartam partem numeri quadratorum, & totius accipe radicem uniuersalem, à qua minue ℞ eiusdem quartæ partis numeri quadratorum, residuum est rei æstimatio.

Quæst. Exemplum. Quatuor iniere societatem. Primus posuit quantitatem. Secundus posuit quadratum quadrati decimæ partis primi. Tertius posuit quintuplū quadrati decimę partis primi. Quartus posuit quinque, & tantum posuit primus cum secundo, quantum tertius cum quarto. Quæritur quantū quisque posuerit? Pone quòd primus posuerit 10 res, secundus posuit igitur quadratum quadrati, tertius 5 quadrata, quartus autem ut dictum est, posuit 5. Igitur quadratum quadrati, & 10 res, æquantur 5 quadratis & 5, diuidendo. igitur numerum rerum per numerum quadratorum, exiret 2, cuius dimidium esset ℞ 1, qui prouenit diuiso 5 numero æquationis, per 5 numerum quadratotum, igitur accipe ℞ 5 numeri æquationis, cui adde quartam partem numeri quadratorum, & fiet ℞ 5 p: $1\frac{1}{4}$, cuius

accipe

accipe ℞ v: quæ est ℞ v: ℞ 5 p: $1\frac{1}{4}$, & ab ea minue quartã partem numeri quadratorum, habebis rei æstimationem ℞ v: ℞ 5 p: $1\frac{1}{4}$ m: ℞ $1\frac{1}{4}$ & habebunt ut uides.

Eodem modo, ubi q̃d quad^{a}, æquetur eisdem conditionibus quadratis reb^{9} & numero, regula tenebit similis, & in æstimatione

p^{a}	℞ v: ℞ 50006 p: 125 m: ℞ 125
2^{a}	$17\frac{1}{2}$ p: ℞ 500 m: ℞ v: ℞ 612500 p: $781\frac{1}{4}$
3^{a}	$12\frac{1}{2}$ p: ℞ 125 m: ℞ v: 78125 p: $156\frac{1}{4}$
4^{a}	5

22

erit idem modus, nisi quòd in fine addemus ℞ quartæ partis numeri quadratorum, radici uniuersali, quam in præcedente regula detrahebamus, ut in exemplo, si q̃d q̃d^{m} æquale foret 5 q̃dratis, 10 rebus & 5 numero, rei æstimatio esset ℞ v: ℞ 5 p: $1\frac{1}{4}$, p: ℞ $1\frac{1}{4}$.

Et causa in his regulis est, quod ℞ q̃d quadrati, est quadratum, & ℞ 5 quadratorum m: 10 rebus p: 5, est ℞ 5 m: ℞ 5 quadratorum, seu m: rebus ℞ 5, igitur quadratum & res ℞ 5, æquant^{r} ℞ 5, & æstimano est nota, quæ est eadem cum illa, q̃d quadrati, p: 10 rebus, ęqualium 5 quadratis & 5, & eadem ratione, si q̃d quadratum ęquale est 5 quadratis, 10 rebus & 5, erit quadratum æquale rebus ℞ 5 p: ℞ 5, quare nota est res.

Quando quadratum quadrati & quadrata ęst res, æqualia fuerint cubis & numero, qui sit 2 p: numero quadratorum, fuerintq; numerus rerum & cuborum idem, & dimidium numeri rerum, radix numeri, tunc duc in se quartam partem numeri rerum, & producto adde 1, & ab hoc minue ℞ aggregati ex quadrato dimidij numeri rerum & unitate, & residui ℞ adde uel minue â quarta parte numeri rerum, quod fiet, erit rei æstimatio.

Exemplum. Quad q̃dratum & 34 quadrata & 12 res, æquantur 12 cubis & 36, tunc uides quòd cubi sunt ęquales rebus in numero, et dimidium numeri rerum est ℞ 36 numeri, & numerus ipse est 2 p: numero quadratorum, ideo duc 3 quartam partem 12 numeri rerũ in se, fit 9, adde 1 pro regula, fit 10, abijce ℞ 37 aggregati ex quadrato dimidij numeri rerũ & unitate, fit 10 m: ℞ 37, huius ℞ uniuersalem minue uel adde 3, quartæ parti numeri rerum, habebis æstimationem rei, 3 p: ℞ v: 10 m: ℞ 37, uel 3 m: ℞ v: 10 m: ℞ 37.

Et modus inueniendi tales regulas habetur ex regula magna, unde etiam capitulo huic nomen dedimus, & est, ut soluas aliquã quæstionem simpliciter, deinde per regulam magnam, uel etiam aliam, deinde obseruabis conditiones necessarias, in transitu ex una in aliam, postmodum obserua, quo modo perueneris ad rei æstimationem, & facies regulam nouam hoc modo super capitulum ignotũ.

Exemplum. Fac ex 6 duas, partes, ita quòd cubus minoris, & qua

dratum maioris, & productum ex eadem maiore in 8, hæc tria producta, sint proportionalia, dico peruenies per regulam magnam ad hoc quòd proportio talium partium erit ℞ cub. 8, scilicet 2, quare diuidemus 6, per ℞ cu. 8 p: 1, & exibit rei æstimatio, at sequendo positionem, habebimus 1 q̄d q̄d° p: 24 q̄dratis p: 144, equalia 8 cub. p: 96 positionibus. Dicemus igitur, quādo q̄d q̄d^m & quadrata & numerus æquantur cubis & rebus, & potuerimus inuenire numerum aliquem, qui ductus in numerum æquationis, producat numerum cuius ℞ ducta per 6, pro regula, producat numerum, qui diuisus per primum numerum, quē multiplicasti, producat numerum quadratorum, tunc si ipsi primo numero iam dicto, quem multiplicasti in numerum æquationis, addas 3 pro regula, & ducto in ℞ radicis numeri quem iam ab initio produxisti, proueniat numerus, qui diuisus per numerum primum inuentum, producat numerū cuborum, & numerus rerum ductus per primum numerum, fuerit q̄druplus cubo eius ℞ ℞, tunc dico, quòd detracto 1, pro regula à primo numero quem multiplicasti, & residui sumpta ℞ cubica, & ei addita etiam unitate pro regula, & cū aggregato diuisa tali ℞ ℞, quod prouenit, est rei æstimatio. Et causa in hoc est, quòd in tali quæstione numerus q̄d q̄d^i, prouenit ex multiplicando, unitate addita, numerus cuborum, ex diuidendo in multiplicandum, p: 4, numerus uero quadratorum, ex sexcuplo quadrati diuidendi, numerus rerum ex q̄druplo cubi diuidēdi, numerus æquationis est q̄d q̄drati diuidendi. Diuidendum uoco in hac quæstione 6, multiplicandum autē 8.

6	
1 pos:	6 m: 1 pos:
1 cu. | 36 p: 1 q̄d m: 12 pos: | 48 m: 8 pos:	
48 cub. m: 8 q̄d q̄d. æquales 1296. p: 1 q̄d q̄d p: 216 q̄d. m: 24 cub. m: 864 pos:	
72 cub. p: 864 pos: æquales 9 q̄d q̄d. p: 216 q̄d. p: 1296	
8 cub. p: 96 pos: æquales 1 q̄d q̄d. p: 24 q̄d. p: 144.	

Exemplum, q̄d q̄dratum p: 6 quadratis p: 4, æquatur $3\frac{1}{2}$ cubis p: 7 rebus, pone primum numerum quadratum, duc in 4, fiunt 4 quadrata, huius ℞ est 2 res, duc in 6, ex regula, fiunt 12 res, quas diuide p̄ quadrata, exit quod æquatur 6, igitur 6 quadrata, æquantur 12 rebus, res igitur est 2. Nos autē in positione posuimus quadratū, igitur numerus primus seu multiplicandus erit 4, & cum ceteræ conditiones conueniant, quæ dictæ sunt, erit 2 numerus diuidendus, quo diuiso per ℞ cub. 3 p: 1, exibit æstimatio rei, & de hoc diximus capitulo sexto.

De transitu capituli specialis in capitulum speciale.
CAP. XXVII

Ic etiam transitus capituli singularis in singulare, hoc modo. Cubus, & 2 quadrata, & 56, æquantur 41 rebus, & rei æstimatio una est 3 p:℞ 2, quæro in eadem æstimatione, cubus cum 7 quadratis, quot rebus equabitur? & cum quo numero? duc differentiam numeri quadratorum, quæ est 2; in duplum partis, quæ est numerus in æstimatione, scilicet in 6, fit 30, cui adde 41 numerm rerum, fit 71, numerus rerum, deinde duc partes æstimationis in se, fiunt 2 & 9, quorum productorum differentiam, quæ est 7, duc in 5, differentiam numeri quadratorum, fit 35, quem adde ad 56, quia 3 est maior ℞ 2, fit numerus æquationis 91, igitur cubus & 7 quadrata & 91, æquantur 71 rebus, æstimatione existente 3 p:℞ 2, & ubi ℞ fuisset maior numero, detraxisses 35 à 56 & remansisset numerus 21. 1

cub⁹ & 2 q̃d. & 56, æq̃l. 41 reb⁹	
cubus & 7 q̃d'	æstimatio rei
5	3 p:℞ 2
6	9 —— 2
30	7
41	5
71 res	35
	56
numerus	91

Dico etiam, quod non licet transire à capitulo in capitulum, stante eodem genere denominationum, & quod æstimatio rei sit eadem, & non rationalis, id est, non numerus integer, aut fractus. Exemplum sit cubus p:3 rebus, æqualis 10, æstimatio rei est ℞ v: cubica ℞ 26 p:5 m: ℞ v: cubica ℞ 26 m:5, dico quòd sub hac æstimatione, non poterit cubus cum aliquibus rebus æquari ulli numero, usque in infinitum, nam sit (gratia exempli) cubus p:9 rebus, æqualis 18, quia igitur res est eadem, ℞ cubica scilicet dicta, erit cubus idem in utroque permutatum. Igitur ex tertio libro, cubi cubus p:9 rebus p:10, æquatur cubo p:3 rebus p:18, abijcio communem cubum, fient 9 res p:10, æquales 3 rebus p:18, igitur 6 res æquantur 8, igitur æstimatio rei est $1\frac{1}{3}$, numerus rationalis, & non ℞ cubica dicta, quod est contra suppositum. 2

cub. p:3 rebus æq̃l, 10	
cub. p:6 rebus æq̃. 18	

Similiter nec plures cubi cum pluribus rebus, æquabuntur alicui numero, stante eadem æstimatione, patet ex præcedenti, nam diuisis omnibus per numerum cuborum, habebimus, ut prius, cubum & res æquales numero, quod iam ostendi fore impossibile. Eadem ratio igitur militat in omnibus, nam si dixero cubus æquatur 6 rebus p:2, uel q̃d' q̃dratum æquatur 6 rebus p:2, dicam igitur 3

in eadem æſtimatione cubus aut q̄d quadratum nullis rebus & numero rationalibus æquari poteſt, dico rationalibus, quia non prohibet, quod aſſumptis aut rebus aut numero irrationalibus æquatio non ſequatur.

Et ex hoc ſequitur etiam, quòd in cæteris regula tenet denominationibus, ubi æſtimatio rei non ſit nec numerus rationalis, nec ℞ ſimplex ex genere mediæ denominationis. Exemplum, 2 cubi & 10, æquantur 1 q̄d quadrato & rei, ęſtimatio non eſt nec numerus, nec ℞ cubica ſimplex alicuius numeri rationalis, dico quod q̄d quadratum ſub eadem æſtimatione, nullis cubis ac numero æquari poterit, patet, quia facta tranſmutatione, & abiecto q̄d quadrato, relinquentur cubi æquales numero, igitur æſtimatio rei, erit neceſſariò ℞ cubica numeri, uel numerus, quod eſt contra ſuppoſitam.

De operationibus radicum Pronicarum ſeu mixtarum & Allellarum. CAP. XXVIII.



1. IAm oſtendimus in ſuperioribus, tres eſſe ſpecies Pronicarum radicum. Minorem, quando radix quadrata comparatur quadrati ſui & ſuimet aggregato, ipſum autem aggregatum dicet̃ pronicum minus. Medium, cum cubica radix comparatur aggregato ex ſe & ſuo cubo, ipſum autem aggregatum dicetur Pronicum medium, ſed maior radix pronica eſt, cum radix radicis alicuius numeri, comparatur aggregato ex ſeipſa & eius numeri, cuius eſt radix radicis, ipſum autem aggregatum dicetur pronicum maius, ut in exemplo. Pronicum maius 3, eſt 84, & 3 eſt radix pronica maior 84. Non contingunt autem his, cum ſint uelut anomala uerba in Grammatica, operationes quæ ſunt communes, neq; poſſunt multiplicari, uel diuidi, addi uel minui, ſed habent propriam quandam operationem, quæ dicitur tranſitus.

2. Cum igitur duxeris pronicum minus, in ſuam ℞ pronicam, productoq; addideris ipſum pronicum, ℞ quadrata aggregati, erit pronicum medium ℞ quadratæ radicis pronicæ minoris, ut in exemplo, duco 3 ℞ pronicam minorem 12, in 12, fit 36, addo ei 12, pronicum minus fit 48, huius ℞ (& eſt ℞ 48) eſt pronicum medium ℞ 3, quæ fuit ℞ pronica minor 12, nam ducta ℞ 3 ad cubum, fit ℞ 27, cui addita ipſa ℞ 3, producit ℞ 48, igitur ℞ 3 eſt ℞ pronica media ℞ 48, ut propoſitum eſt.

3. Cum duxeris pronicum medium in ſuam ℞ pronicam, producitur pronicum minus quadrati radicis pronicæ medię. Exemplum, duco 3, radicem pronicã mediam 30 in 30 fit 902, pronicum minus 9, quadrati 3, quod fuit ℞ pronica media ipſius 30.

Cum

Cum pronicum maius in se ducitur, & productum diuiditur per quadratum radicis suę pronicæ maioris, quod exit, ad cubum eiusdem radicis pronicæ, est uelut 1 quadratum p: 2 positionibus p: 1. Exemplum, capio 18 pronicum maius, duco in se fit 324, diuido per 4 quadratum 2, ℞ pronicæ maioris 18, exit 81, quod est 1 quadratum p: 2 positionibus p: 1, respectu 8, cubi 2, eiusdem radicis pronicæ. 4.

Allellę dicuntur radices, cum ex multiplicatione mutua duorum numerorum, in quadratum alterius, duo numeri consurgunt, uelut capio 2 & 3, ipsi dicuntur radices allellæ 12, & 18, nam ex 2 in 9, fit 18, & ex 3 in 4, fit 12, inueniuntur autem radices hoc modo, duc utrunque eorum in se, & diuide productum per reliquum, & ℞ cubicæ prouentus sunt allellæ. Exemplum, uolo ℞ allellam 4 & 8, duc 8 in se, fit 64, diuide per 4 exit 16, duc etiam 4 in se, fit 16, diuide per 8 exit 2, igitur ℞ cubica 16, & ℞ cubica 2, sunt allellæ 4, & 8, & ita allellæ 6 & 18 sunt ℞ cubica 54, & ℞ cubica 2. 5.

4	8
16	64
2	16

Ex quo patet, quod omnes ℞ allellę, sunt ℞ cubicæ numerorum, se habentium in triplicata proportione, in qua se habent sui solidi propositi priores, & hi sunt medij proportione. Corm.

Operationes igitur in his, ex hoc sunt manifestæ, nam cum inuentæ fuerint, reducentur ad radices cubicas, cum quibus operaberis rursus, perfecta operatione, reduces ad allellas. 6.

De regula Modi. CAP. XXIX.



Dicitur hęc regula (quia modum exhibet fabricandi regulas quotlibet mercaturæ) Modi, utilissima magistris Arithemeticæ, ut facilioribus quibusdam inuentis, artē docerent, cuius etiam auxilio, maximam sexti libri partem confecimus. Est igitur regula hæc, solue quamuis quæstionem propositã, modo quo potes, seu positione, seu auxilio sexti libri, deinde auferes positionē, & regulas alias, & serua operationes, quas quàm potes maxime, ad breuitatem redige, & habebis regulam de modo pro omni consimili quæstione.

Exemplum, Serici uiridis passus 7, & nigri passus 3, ueneunt denarijs 72, & eodem precio serici uiridis passus 2, & nigri passus 4, ueneunt denarijs 52, quæritur precium. Pones positionem, esse æstimationem unius passus serici uiridis, igitur 7 passus uiridis ueneunt 7 positionibus, quare 3 pas: nigri ueneunt 72, de: m: 7 positionibus, & passus ualebit $\frac{1}{3}$ horum, scilicet 24 de: m: $2\frac{1}{3}$ positionibus, & 4 passus nigri, ualebunt 96 de: m: $9\frac{1}{3}$ positionibus, at duo passus uiridis

uiridis ualent 2 positiones ex supposito, igitur 2 passus serici uiridis & 4 nigri ualent de:96 m:$7\frac{1}{3}$ positionibus, & hæc eadem æstimabantur 52 de: igitur de: 96 m: $7\frac{1}{3}$ positionibus, æquantur 52 de: quare de:44, qui sunt differentia 96, & 52, æquabuntur $7\frac{1}{3}$ positionibus, igitur pos, ualet 6 denarios, & tantam æstimationem passus serici uiridis esse conueniet. quare 7 passus uiridis ueneunt 42 de: & 3 passus nigri reliquis de: ad 72, scilicet de:30, quare passus unus de:10, serici igitur utriusque pretium habes. Hucusque positione operatus es, nunc uenio ad regulam dicoque, in talibus diuide passus numerosiores, scilicet 7, & numerum de℞: scilicet 72, per passus pauciores, scilicet 3, & quod exit, duc per passus positos in secunda positione, correspondentes paucioribus, & à producto numeri passuum, detrahe reliquos passus secundæ positionis, & cum residuo diuide precij 2 & producti differentiam, exibit æstimatio passus numerosioris, in prima positione. Exemplum, diuide 7 & 72 per 3. exit $2\frac{1}{3}$, & 24 duc per 4, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à 9 $\frac{1}{3}$ abijce 2, à 96 abijce 52, relinquuntur $7\frac{1}{3}$, & 44, diuide 44 per $7\frac{1}{3}$ exit 6, precium passus unius serici uiridis.

7	3 D 72
2	4 D 52
7 pos:	72 m: 7 pos:

3

24 m:$2\frac{1}{3}$ pos:

4

96 m:$9\frac{1}{3}$ pos,

2 pos:

96 m:$7\frac{1}{3}$ pos:

52

44 m:$7\frac{1}{3}$ pos:

$7\frac{1}{3}$

6

Inde ex hoc breuior regula emergit, ut in tertia figura, diuide 4 per 3, scilicet numerum passuum eiusdem generis serici in duabus petitionibus, exit $1\frac{1}{3}$, quem duc in 7, & 72, fiunt $9\frac{1}{3}$, & 96, à quibus abijce numeros suprapositos secundę positionis, & sunt 2 & 52, directos à directis, relinquuntur $7\frac{1}{3}$ & 44, diuide numerum denariorum 44 per $7\frac{1}{3}$ numerum passuum, exit 6, precium passus uiridis serici, & ita constitues breuissimam regulam, ex tam longa positionis operatione, unde meritò hæc modi regula, mater regularum dici potest.

uirid.	nigri	precium
pas:7	pas: 3	de: 72
pas:2	pas: 4	de:;2

7 — 3 — 72

$2\frac{1}{3}$ 24

4

$9\frac{1}{3}$ 96

2 52

$7\frac{1}{3}$ — 44

6

2 — 4 — 52

7 — 3 — 72

$9\frac{1}{3}$ — $1\frac{1}{3}$ — 96

$7\frac{1}{3}$ — 6 — 44

De regula Aurea. CAP. XXX.



Æc regula rerum, quæ in usum ueniunt, maximam partem amplectitur, nam quæstione ad positionem deducta, perfectaq; operatione, proximam quærit æstimationem, quæ sic habetur. Primò uenare próximiores, integros numeros, maiorem ac minorem, qui æquationi satisfaciunt, quos non difficile erit habere, horum minorem uocabimus primũ inuentum, & maiorem secundum inuentum, & differentiam productorum, differentiam maiorem, differentiam uerò producti primi & numeri æquationis differentiam primam, differentiam autem producti secundi & numeri equationis, secundam differentiam. Diuide igitur differentiam primam, per differentiam maiorem, quod exit, addatur primo inuento, & perficiemus æstimationem imperfectam quam deducemus ad æquationem, scilicet per denominationis æquationis, ut in primo & secundo inuento, & quod producitur, subtrahe à producto secundo, deinde subtrahe æstimationem imperfectam, ab inuento secundo, residuum duc in differentiam secundam habitam, & tale productum diuide per differentiam producti æstimationis imperfectæ, & secundi producti, quod exit, detrahe ex inuento secundo, residuum est æstimatio rei ualde proxima, cui per iteratas operationes semper propinquius licet accedere idem fiet, ubi æquatio sit denominationis alicuius, ad numerum, ac denominationes; ut in exemplis patebit.

Sit igitur primo, q̃d q̃dratum & 3 cubi, æqualia 100, uides quòd si res est 2 q̃d q̃dratum, & 3 cubi sunt 40, & si res est 3, erit q̃d q̃dratum & 3 cubi 162, igitur inuentum primum est 2, & productum primum 40, & inuentũ secundum 3, & productum secundũ 162, & 122, maior differentia, & 60 differentia prima, & 62 differentia secunda, & nota, quòd inuentum primum semper differt unitate ab inuento secundo, aliter non rectè es operatus, his cognitis, diuide 60 per 122, exit $\frac{30}{61}$, quod adde ad 2, primum inuentum, fit imperfecta æstimatio $2\frac{30}{61}$, hanc ducito ad q̃d q̃dratum & tres cubos, fit 85 ferè, subtrahe igitur 85 productum æstimationis imperfectæ, à 162, producto secundo, habebis 77, subtrahe etiam $2\frac{30}{61}$, ex 3 inuento secundo, relinquuntur $\frac{31}{61}$, duc in 62 differentiam secundam, fit $\frac{1922}{61}$, diuide per 77, exit $\frac{1922}{4697}$; detrahe ex 3 inuento secundo, erit æstimatio satis

2 3
4 —— 100 —— 162
60 62
122 162
$\frac{60}{122}$ | $\frac{30}{61}$ $2\frac{30}{61}$
77 —— 85.
62 —— 100
$2\frac{30}{61}$ | 3 | $\frac{31}{61}$
$\frac{31}{61}$ | 62 $\frac{1922}{61}$ 77
$\frac{1922}{4697}$ | 3 | $2\frac{2775}{4697}$

proxima q͠d quadrati p:3 cubis æqualium 100, hæc, $2\frac{2775}{46097}$, & si uelles, posses alternatis operationibus quantumlibet propius accedere.

Quòd si quadratum & 20, æquentur 10 rebus, tunc si res esset 7, haberemus quadratum p:20, æquale rebus $9\frac{6}{7}$, & si res esset 8, haberemus quadratum p:27, æquale rebus $10\frac{1}{2}$, igitur ut prius, inuentum primum est 7, productum primum $9\frac{6}{7}$, inuentum secundum 8, productum secundum $10\frac{1}{2}$, differentia maior $\frac{9}{14}$, differentia prima $\frac{1}{7}$, differentia secunda $\frac{1}{2}$, diuidemus igitur differentiam primam, per maiorem differentiam, exibit $\frac{2}{9}$ & addemus hoc ad 7, inuentum primum, fiet æstimatio imperfecta $7\frac{2}{9}$, cuius quadratum p:20, est æquale 9 rebus & $\frac{116}{117}$, ideo quia hoc insensibiliter differt ferè, à 10, numero rerum, ideo non utimur alia operatione, sed dicemus æstimationem propinquam esse $7\frac{2}{9}$.

7		8
$9\frac{6}{7}$	10	$10\frac{1}{2}$
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{9}$		$\frac{9}{14}$
$7\frac{2}{9}$		$9\frac{116}{117}$

Sit etiam cubus æqualis 6 rebus p, 20, dicemus, si 3 essent res, 6 res & 20 æquarentur $1\frac{11}{27}$ cubi, & si res essent 4, essent 6 res & 20, æquales $\frac{11}{16}$ cubi, igitur inuentum primum est 3, & productum primum $1\frac{11}{27}$, inuentum secundum erit 4, productum secundum $\frac{11}{16}$, differentia prima $\frac{11}{27}$, differentia secunda $\frac{5}{16}$, differentia maior $\frac{311}{432}$, cum qua diuide differentiam minorem, exit $\frac{176}{311}$, quam adde ad 3, fiet æstimatio imperfecta $3\frac{176}{311}$, sequere æquationem, scilicet assumendo 6 res p:20, & erunt $\frac{1245186154}{1363938029}$ sui cubi, hoc autem est proximum ad $\frac{31}{43}$, ab hoc detrahemus productum secundum, & relinquentur $\frac{61}{271}$ & $\frac{5}{16}$, similiter subtraho $3\frac{176}{311}$, æstimationem imperfectam, à 4 inuento secundo, relinquitur $\frac{135}{311}$, hoc duco in $\frac{5}{16}$ differentiam secundam, ut etiam primo exemplo, fit $\frac{675}{4976}$, diuide per differentiam producti secundi, & producti æstimationis, & est $\frac{61}{271}$, exit $\frac{182025}{303536}$, detrahe à secundo inuento, ut prius, relinquitur rei æstimatio $3\frac{120611}{303536}$, & hoc est proximum ad $3\frac{201}{506}$, & ideo ad $3\frac{2}{5}$, & 6 res p:20, sunt $40\frac{2}{5}$, & cubus $3\frac{2}{5}$, est $39\frac{38}{625}$, & si uelles proximius, posses operari tertio, sicut primò fecisti, & proculdubio peruenires ad insenbilem differentiam & ratio hæc uniuersalis est, nec indiget alia regula.

3		4
$1\frac{11}{27}$	1	$\frac{11}{16}$
$\frac{11}{27}$		$\frac{5}{16}$
	$\frac{311}{432}$	
$\frac{176}{311}$	$3\frac{176}{311}$	$\frac{11}{16}$
$\frac{61}{271}$	$\frac{31}{34}$	
$\frac{5}{16}$	1	
$3\frac{176}{311}$ | 4 |	$\frac{135}{311}$	$\frac{5}{10}$
$\frac{675}{4976}$ $\frac{61}{27}$ $\frac{305}{506}$	4 | $3\frac{208}{506}$	

Et similiter operaberis, ubi essent tres denominationes æquales duabus

duabus alijs, aut tribus, sed cum duplici ingressu, uel triplici, potes etiam deducere ad numeros omnia, ut in primo exemplo, & operationes in eo casu sunt longè faciores, uelut si dicam q̃d' quadratum & 6 quadrata & 200, equantur 10 cubis & 12 rebus, erit primum inuentum 6, & productum m: 152, differentia quia 10 cubi & 12 res superant q̃d' quadratum 6 q̃d. & 200, & secundum inuentum erit 10, & productum secundum erit 680 p: quo q̃d' quadratum & 6 quadrata & 200, superant 10 cubos & 12 res, & tunc differentia prima, æqualis est producto primo, & differentia secunda, producto secundo & maior differentia est aggregatum ex utroque, & tunc sufficiet pro prima operatione, diuidere ut prius, differentiam primã per differentiam maiorem, & quod exit, & est $\frac{19}{104}$, addemus primo inuento, & fiet æstimatio imperfecta $9\frac{19}{304}$, deinde si uis proximius accedere, produces hanc æstimationem ad suas denominationes utrinque, & collige differentiam, quæ uocetur a. quam multiplices per differentiam æstimationis imperfectæ & secundi inuenti, & productũ diuide denuo per maiorẽ differentiã, & quod exit, adde aut minue, secundum quod oportet, & habebis inuentum, & hoc modo liceret etiam operari in secundo & tertio exemplo, sed nos uoluimus declarare utrumque modum, ad maiorem in occasionibus facilitatem, idem dic de radicibus extrahendis.

9		10
152 m:	p: 680	
$\frac{152}{832}$	832	

25

De regula Magna. CAP. XXXI.

HÆc regula est pro magnis questionibus soluendis, & ex ea inuentæ sunt regulę auri & argenti consolandi, Acuit ingenium, & fit per demonstrationes, exigitque hominem expertum, doceturque per quæstiones, quoniam est multiformis, Fundamentum regulæ est commutatio.

QVAESTIO I.

Fac de 8 duas partes, ex quarum cubis inuicem ductis, fiat 16. Dices igitur, ex una in aliam fiet ℞ cubica 16, diuide 8 in duas partes, ex quarum ductu inuicem fiat ℞ cubica 16, & erunt 4 p: ℞: 16 m: ℞ cubica 16, & 4 m: ℞: v: 16 m: ℞ cubica 16.

QVAESTIO. II.

Fac de 8 tres partes proportionales, quarum quadratum primæ sit æquale reliquis, igitur fient primæ duæ partes, quarũ unius quadratũ, sit æquale alteri, deinde maiorem diuidemus in duas partes

existentes in continua proportione cum minore, & erunt.

QVAESTIO III.

Fac ex 8 tres partes in continua proportione quarum quadratum maioris, sit mediũ proportione inter cubum utriusq; partis, dices igitur, cubus minoris est R cubica cubi maioris, & hoc, quia proportio cubi maioris, ad suum quadratum, est ipsa maior, & hæc eadem est quadrati maioris, ad cubum minoris, igitur cubus minoris, est R quadrati maioris. & æqualis ipsi maiori, quare 8 constat ex minore & suo cubo, igitur 1 cub. p: 1 re, æqualis est 8, & æstimatio rei est minor pars.

p'	R $8\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2'	R v: R $63\frac{1}{4}$ m: $10\frac{5}{8}$ p: $\frac{1}{4}$ m: R $2\frac{1}{16}$
3'	$8\frac{3}{4}$ m: R $18\frac{9}{16}$ m: R v: $63\frac{1}{4}$ m: $10\frac{5}{8}$

QVAESTIO IIII.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd septuplũ maioris, sit proportione mediũ inter q̃dratum maioris, & cubũ minoris, sit a maior, & c quadratum eius, & b minor, & d cubus eius, sit etiã e septuplum a, cum igitur ex a in a fiat c, & ex a in 7 e, erit a ad 7, ut c ad e, quare ex 11 5', ut e ad d, igitur ex a in d, fit septuplum e, at e est septuplum a, igitur ex a in d, fit 49 a, igitur d est 49, quadratum 7, quare cubus b minoris est 49, & b est R cubica 49, & a residuum.

	8	
a	7	b
c	e	d

QVAESTIO V.

Fac ex 8 duas partes, ita quòd septuplũ maioris, sit proportione mediũ inter cubum maioris & quadratum minoris, sit a maior, & c cubus a, & b minor, & d q̃dratum b, & e productum ex 7 in a, quia igitur ex a in quadratum a, fit c, & in 7, fit e, erit quadrati a ad 7, ut c ad e, quare ut e ad d, proportio autem quadrati a, ad quadratum b, componitur ex proportione quadrati a ad 7, & 7 ad quadratum b, quare ex proportione e ad d, & 7 ad quadratum b, sed d est quadratum b, igitur proportio quadrati a ad quadratum b, componitur ex proportione septupli a, & est e ad d, & 7 ad ipsum d. proportio igitur quadrati a ad d, componitur ex proportione e ad d, & 7 ad d, igitur ex regula sex quantitatum, seu ex proportionum compositione, ex 7 in e, fit quadratum a in d, sed e est septuplum a, igitur ex 49 in a, fit quadratum a in d, igitur ex a in d, seu in quadratum b, fit 49, quare ex capitulo cubi & numeri æqualium quadratis, b est R $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & $47\frac{1}{2}$ m: R $7\frac{1}{4}$.

	8	
a	7	b
c	e	d

QVAESTIO VI.

Fac ex 8 duas partes, quarũ pductũ totius in minorẽ, sit pportione medium inter pducta maioris in totum, & maioris in minorẽ, quia

quia igitur minor ducitur in maiorem, & totum erit illorum productorū proportio, ut totius ad maiorem, item quia totum ducitur in maiorem & minorem, erit productorū, ut maioris ad minorem, sed producta sunt analoga. igitur ex 11 quinti Elementorum, totius ad maiorem partem, ut maioris ad minorem, igitur 8 diuisum erit secundum proportionem habentem medium & duo extrema, quæ re partes sunt manifestæ, ℞ 80 m: 4 & 12 m: ℞ 80.

QVAESTIO VII.

Fac de 8 duas partes, ita quod productum maioris in minorem, sit proportione medium inter quadratum minoris & decuplum eiusdem minoris, dices igitur, quia minor est illa, quæ multiplicatur in se, in maiorem, & in 10, quod maior est proportionalis inter minorem & 10, igitur quadratum maioris, æquatur decuplo minoris, & res nota est, nam maior erit ℞ 105 m: 5; & minor 13 m: ℞ 105.

QVAESTIO VIII.

Fac de 8 duas partes, quarum quadratum maioris sit proportione medium inter quadratum minoris, & productum ex toto in maiorem, pone maiorem a, & b minorem, quia igitur quod fit ex 8 in a, proportionale est inter 64 & quadratum a, ex demonstratis in secundo super Euclidem, erit 64 quarta quantitas in continua proportione, cum illis tribus productis, quare 64 ad quadratum a, ut quadrati a ad quadratum b duplicata, igitur 8 ad a, ut a ad b duplicata ex 17 sexti Elementorum, nam utraque est media proportionum suorum quadratorum, quare cubus a æqualis est producto ex 8 in quadratum b, hoc enim in septimo libro demonstratum est, quare ponemus a quadratum, erit cubus eius, cubus quadrati ℞ a, quæ sit c, igitur quadratum b, est æquale $\frac{1}{8}$ quadrati cubi c, igitur b est, ℞ $\frac{1}{8}$ quadrati cubi c, quare cum ℞ cubi quadrati sit cubus, erit b æqualis cubi c parti ℞ $\frac{1}{8}$, & cum a sit quadratum c, erit 1 quadratum p: cub. ℞ $\frac{1}{8}$, æquale 8, & ideo multiplicando omnia per ℞ 8, erit cubus p: q̄d ℞ 8, æqualis ℞ 512, solue igitur per capitulum 15m, ut in numeris notis a ceteris operando per regulas tertij libri.

	8	
c	a	b

QVAESTIO IX.

Fac ex 8 tres partes in continua proportione, quarum aggregatum primæ & secundæ, & aggregatū secundæ & tertiæ, & ipsum 8, sint rursus in continua proportione, dico, inuenies primo proportionē illarū quantitatū proportionalium, quarum aggregatū secundæ & tertiæ, est proportionale inter aggregatū primæ & secūdæ, & aggregatū omnium, sint igitur tales quantitates a b c, & quia proportio a b c, ad b c, est ut

a	b	c	d

b c, ad a b, ex suppofito quæftionis. & b c ad a b, ut c ad b, ex 12ª quinti Elementorum, erit a b c, ad b c, ut b ad c ex 11ª eiufdem, fed ex proportione in b fit c, igitur ex proportione in b c, fit, a b c, fit igitur, ut ex proportione in c fiat d, cum igitur ex proportione in b fiat c, & ex eadem in c fiat d, igitur ex proportione in b c fit c d, & ex eadem in b c fiebat etiam a b c, igitur a b c, æquatur c d, abiecto autem c, relinquitur a b, æqualis d, eft autem d quarta quantitas proportionalis, igitur oportebit inuenire quatuor quantitates, in continua proportione, quarum quarta fit æqualis duabus primis, pofita igitur prima 1, fecunda 1 re, tertia 1 quadratum, quarta 1 cubus erit cubus æqualis 1 rei p: 1, & nota eft ex capitulo, quantitas rei, quæ eft proportio, diuides igitur 8 in quatuor quantitates fub ea proportione continuatas, ut in fexto libro docetur, foluimus & aliter hanc quæftionem in quarto libro.

Quaestio. X

Fac ex 8 duas partes, quarum feptuplum maioris, proportione mediū fit inter cubum minoris, & productum maioris in minorē. Sit a minor, eius cubus c b autē maior, & ꝓductum b in a fit e, & feptuplū q fit d, quia igitur ex b in a, fit e, & ex b in, 7 fit d, erit a ad 7, ut e ad d, quare a ad 7, ut d ad c. igitur ex a in c, fit feptuplum d, fed d eft feptuplū b, igit 49 b, æqualia funt q̄drato quadrati a, igitur b eft æquale $\frac{1}{49}$ q̄d quadrati a, quia igitur a cum b eft 8, & b eft $\frac{1}{49}$ q̄d quadrati a, igitur a cum $\frac{1}{49}$ q̄d quadrati fui, æquatur 8, quare res & $\frac{1}{49}$ q̄d quadrati æquatur 8, igitur q̄d quadratum p: 49 rebus, æquatur 392, & quamuis huius non fit capitulum generale, pulcrum tamen fuerit hucuſq; perduxiſſe quæftionem.

	8	
a	b	7
c	d	e

2 Deprehenditur & quandoq; eodē modo quòd propofitæ quæftiones fint impofsibiles.

De regula æqualis pofitionis. CAP. XXXII.

1 Æc regula, eft utilior pofitione fimplici, in omnibus quæftionibus, ubi partes æqualiter multiplicantur, fecus ubi inæqualiter, nam in his fimplex facilior eft, ut fi dicam, diuide 8 in duas partes, quarum una ducta in quadratum alterius, uel in cubum, fiat 20, per fimplicē pofitionem, peruenies ad 8 quadrata m: 1 cubo, ęqualia 20, uel ad 8 cub. m: 1 q̄d q̄drato, ęqualia 20 in fecunda quæftione, fed ponendo 4 p: 1 pofitione, & 4 m: 1

pofitio-

positione, peruenies ad 16 pos: p:44, æquales 1 cubo p: 4 quadratis, & in secunda quæstione, ad 128 positiones 7:236, æqualia 1 q̄d quadrato p:8 cubis, manifestum est igitur, quàm hæ sint prioribus difficilores. In positione etiam simplici, inuenimus prima operatione, rei æstimationem in æquali differentia, quæ addita dimidio diuidendi, & detracta; ostendit numeros quæsitos, qui uerè sunt æstimatio rei, quanquam posuerimus rem esse differentiam, uoco autem positionem simplicem, cum dico, diuide 10 in duas partes, producentes 20, tunc ponimus partem unam rem, aliam 10 m:re, sed æqualem, cum pono partem unam 5 p:re, & aliam, 5 m:re, ideo cum simplex iam per se nota sit, de æquali per quæstiones & exempla dicendum erit, cum certe frequentissimus sit eius usus ac utilis.

QVAESTIO I.

Est trigonus, cuius laterum differentia primi ad secundum, est 1, & iterum secundi ad tertium, est etiam 1, & area est 3, pones secundum igitur positionem, & primum erit positio m:1, & tertium positio p:1, sequere trigonorū regulam, datam in libro sequente, & fiet R $\frac{3}{16}$ q̄d quadrati m: $\frac{3}{4}$ quadrati generaliter sumpta, æqualis 3, quare $\frac{3}{16}$ q̄d quadrati æquabitur $\frac{3}{4}$ quadrati p: 9, ideoq; 1 q̄d quadratum, æquatur 4 quadratis p:48, & res erit per capitulum deriuatiuorum, R v:R 52 p:2, & hoc est latus secundum, adde igitur & minue 1, habes reliqua latera, ut in figura uides.



QVAESTIO II.

Fac de 10 duas partes, quarum cubi cum quadratis iuncti, faciant 400, pones primā partem 5 p:1 positione, & secundam partē 5 m:1 positione, sequere problema, reducendo partes ad cubum, & ad quadratum, colliges tandem cadentibus uicissim partibus, 32 quadrata p:300, æqualia 400, quere quadratum æquabitur $3\frac{1}{8}$, & res quæ est differentia, erit R $3\frac{1}{8}$, igitur partes sunt 5 p:R $3\frac{1}{8}$ & 5 m:$3\frac{1}{8}$.

5 p:1 pos:	25 p:1 q̄d. p:10 rebus
	125 p:15 q̄d. p:75 rebus p: 1 cu.
5 m:1 pos:	25 p:1 q̄d. m:10 rebus
	125 p:15 q̄d. m:75 rebus m:1 cu.
	300 p:32 q̄d. æqualia 400

QVAESTIO. III.

Fac ex 6 duas partes, quarum quadratorum aggregatum, sit æquale differentiæ cuborum. Pones maiorem 3 p: 1 positione, & minorem 3 m: 1 positione, sequere quæstionem, habebis aggregatum quadratorum, 2 quadrata p: 18, & differentiam cuborum 2 cubos p: 54 positionibus, & hæc æquantur inuicem, igitur cubus & 27 positiones æquant quadrato et 9, sequere capitulum, fiet rei æstimatio, id est differentiæ, ℞ v: cubica ℞ 702$\frac{2}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: cubica ℞ 702$\frac{1}{3}$ m: $\frac{8}{27}$ p: $\frac{1}{3}$, quare partes erunt, 3$\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica ℞ 702$\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: ℞ 702$\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$, & minor, 2$\frac{2}{3}$ p: ℞ v: cubica ℞ 702$\frac{1}{3}$ m: $\frac{1}{27}$ m: ℞ v: cubica ℞ 702$\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{27}$.

3 pos: 1 pos:	9 p: 1 qd. p: 6 rebus
3 m: 1 pos:	9 p: 1 qd. m: 6 rebus
	18 p: 2 qd, aggregatum
3 p: 1 pos:	17 p: 9 qd. p: 27 pos: p: 1 cub.
3 m: 1 pos:	27 p: 9 qd. m: 27 pos: m: 1 cu.
	differentia 54 pos: p: 2 cu.

QVAESTIO. IIII.

Fac ex 8 duas partes, quarum productum maioris in minorem, proportionale sit, inter nonuplum maioris, & ipsam minorem. Pone partem primam 4 p: 1 positione, & minorem 4 m: 1 positione, sequere propositũ, habebis productum maioris, in 9, esse 36 p: 9 positionibus, & maioris in minorem 16 m: 1 quadrato, & minorem 4 m: 1 positione, & hæc sunt in eadem proportione, igitur ducto 36 p: 9 positionibus, in 4 m: positione, fit quadratum 16 m: 1 quadrato, ducito igitur inuicem 36 p: 9 positionibus, & 4 m: 1 positione, & cadent positiones propter mutuam proportionem, quare producetur, 144 m: 9 quadratis, & hoc est æquale quadrato 16 m: 1 quadrato, quod est, 256 p: 1 qd quadrato m: 32 quadratis, quare reddendo m: parti aduersæ, 112 p: 1 qd quadrato, æquabuntur 23 quadratis, habebis æstimationem rei, ℞ v: 11$\frac{1}{2}$ m: ℞ 20$\frac{1}{4}$, id est ℞ 7, quam adde & minue à 4, erunt partes quæsitæ, 4 p: ℞ 7, & 4 m: ℞ 7, & quamuis potuisses soluere per simplicem, ueniens ad capitulum cubi & rerum, æqualium quadratis & numero, fuisset tamen negocium inexplicabilius, sine ulla comparatione, nam plusquam decem alijs indiges operationibus, antequam peruenias ad ueram æstimationem, quæ semper est in natura Binomij, uel recisi ueri, non improprij.

9		4 m: 1 pos:
4 p: 1 pos:		
36 p: 9 pos:	16 m: 1 q.	4 m: 1 pos:
	256 p: 1 qd qd m: 32 qd	
	144 m: 9 qd.	
	112 p: 1 qd qd. æql. 23 qd.	

QVAESTIO V.

Diuide 10 in duas partes, quarum quadrato primae detracto ex 100, & quadrato secundae detracto ex 97, residuorum R iunctae, constituant 17. Si libet ad uitandum laborem, primò uidebis uia tentatiua an casus possibilis sit, hoc igitur cognito, pone primum partem 5 p: 1 positione, & reliquam 5 m: 1 positione, duc partes in se, & quadratum maius detrahe ex 100, & minus ex 97, habebis residua, ut in figura, quorum R iunctae, debent aequari 17, igitur 17 m: una illarum radicum aequatur reliquae, quare ducemus in se, 17 m: R v: 75 m: 1 quadrato m: 10 positionibus, & habebimus 364 m: 1 quadrato m: 10 positionibus m: R v: 86700 m: 1156 quadratis m: 11560 rebus, aequalia quadrato alterius radicis, scilicet 72 m: 1 quadrato p: 10 rebus, abijce similia ex utraque parte, & radicem uniuersalem solam ex aduerso omnium colloca, ut in tertio libro docuimus, ac in quarto habebis 292 m: 20 rebus, aequalia R v: 86700 m: 1156 quadratis m: 11560 rebus, quare ducendo denuo partes in se, habebis 86700 m: 1156 quadratis m: 11560 positionibus, aequalia 85264 p: 400 quadratis m: 11680 rebus, duc ad aequationem reducendo ad 1 quadratum habebis rei aestimationem esse R $\frac{139876}{151321}$ p: $\frac{15}{389}$, sed R $\frac{139876}{151321}$, est $\frac{374}{389}$, igitur additis $\frac{15}{389}$ fient $\frac{389}{389}$, igitur res est 1, & partes 4 & 6.

5 p: 1 pos.   5 m: 1 pos.
25 p: 1 q̄d. p: 10 pos.   100
25 p: 1 q̄d. m: 10 pos.   97
75 m: 1 q̄d. m: 10 pos. resid.
72 m: 1 q̄d. p: 10 pos. resid.
17 m: R v: 75 m: 1 q̄d. m: 10 pos.
R v: 72 m: 1 q̄d. p: 10 pos.
364 m: 1 q̄d. m: 10 pos. m: R v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos. 72 m: 1 quad. p: 10 pos.
292 m: 20 rebus
R v: 86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos.
86700 m: 1156 q̄d. m: 11560 pos.
85264 p: 400 q̄d. m: 11680 pos.
1436 p: 120 pos. aequal. 1556 q̄d.
1556
quad. aequal. $\frac{30}{389}$ pos. p: $\frac{359}{389}$

QVAESTIO VI.

Est etiam, ubi positio aequalis, non soluit omnino quaestionem, & simplex soluit. Exemplum, fac de 8 duabus partes, quarum quadratum maioris, sit proportione medium inter productum maioris in minorem, & decuplum totius, ut pote 60, posita itaque maiore 1 posi-

tione, habebis 60 & 1 quadratum & 8 positiones m: 1 quadrato proportionalia, quare ducta media in seipsam, habebimus 1 q̄d quadratum, æquale 480 positionibus m: 60 quadratis, deprime, & fiet cubus & 60 res, æqualia 480. & ideo res nota est, per positionem autem æqualem, peruenies ad capitulū constans ex quinq; denominationibus, posset aūt solui, & per regulam magnam, sed hoc ad rem nihil pertinet.

60 | 1 q̄d. | 8 pos. m: 1 q̄d,
1 q̄d q̄. æq̄. 480 pos. m: 60 quad.

De regula inæqualiter ponendi seu proportionis.
CAP. XXXIII.



HÆc regula nos docet, ut positis numeris inæqualibus, positiones pariter æquales annectamus, sic ut in multiplicatione, uicissim similes excidant partes. Docebo autem hoc per exempla, quamuis quæstiones quæ per hāc soluuntur, etiam per regulam retro agendi positionem, de qua in capitulo quinto dictum est, dissolui possint.

QVAESTIO I.

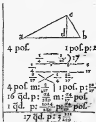
Exemplum. Sunt duo numeri, quorum differentia est 4, & quadratū minoris cum quadrato dimidij maioris, & ℞ aggregati ipsorum quadratorum, constituit 110, posses hanc retro agendo dicere, igitur 110 componitur ex aggregato quadratorum, & ℞ aggregati, igitur posito aggregato quadrato, erit 110 æquale quadrato & uni rei, quare res est 10, aggregatum 100, ideo facies ex 100 duas partes, quarum duplum ℞ unius, excedat aliam ℞ in 4, & solutio clara est, uerū hoc modo nos sic ponemus. Sit primus numerus minor 2 positiones, quia pars est $\frac{1}{2}$, erit maior 2 positiones p: 4, inde accipe partem secundi, quę est in se ducenda, & est $\frac{1}{2}$, erit igitur pars multiplicanda 1 positio p: 2, & primus numerus ut dictū est, 2 positiones, hoc habito, positū est, non permutata quęstionis natura, partes numeri ita aptare cum rebus, ut in quadratis res ex toto excidant, sic igitur facies. Considera secūdum numerum in se ducendū, qualis pars sit primi, ut in exemplo, 1 positio p: 2, quę pars est 2 positionum, inuenies quod est $\frac{1}{2}$ p: 2, duc igitur denominatorē & numeratorem fracti in se, & pro ducta iunge, et habebis 5, pro diuisore, deinde duc numeratorem in se, & ꝑductum in numerum differentiæ, qui est 4, fit etiam 4, ꝑ diuidendo, diuide igitur

2 pos. | 2 pos. p: 4
2 pos. | 1 pos. p: 2
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$) 5
$\frac{1}{2}$ 1 4 $\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ | $\frac{8}{5}$
2 pos. m: $\frac{4}{5}$
1 pos. p: $\frac{8}{5}$
4 q̄d. p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ pos.
1 q̄d. p: $2\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ pos.
5 q̄d. p: $3\frac{1}{5}$

tur 4 per 5, exit $\frac{4}{5}$, hoc auferes ex 2 positionibus, scilicet maiore parte, habebis 2 pos. m: $\frac{4}{5}$, deinde diuide $\frac{4}{5}$ per $\frac{1}{2}$ partem, exit $\frac{8}{5}$, hoc addes ad positionem, habebis 1 pos. p: $\frac{8}{5}$, ecce uides, quoniam habes 2 positiones m: $\frac{4}{5}$, & 1 positionem p: $\frac{8}{5}$, & proportio $\frac{8}{5}$ ad $\frac{4}{5}$, est ut 2 positiones 1 ad positionem, & si sumpseris duplum maioris, scilicet 2 pos. p: $3\frac{1}{5}$, superabit minorem scilicet 2 pos. m: $\frac{4}{5}$, in 4, ad unguem, hoc peracto, ex regula uniuersali, duc partes in se, habebis 4 quadrata p: $\frac{16}{25}$ m: $\frac{16}{5}$ positionibus, & 1 quadratum p: $2\frac{14}{25}$ p: $\frac{16}{5}$ positionibus, iunge, habebis 5 quadrata p: $3\frac{1}{5}$, hæc cum radice æquantur 110, igitur R: æquatur 110 m: hoc aggregato, igitur $106\frac{4}{5}$ m: 5 quadratis, æquatur R: v: 5 quadratis p: $3\frac{1}{5}$, duc partes in se, habebis 5 quadrata p: $3\frac{1}{5}$, æqualia $11406\frac{6}{25}$ p: 25 q̃d quadratis m: 1068 quadratis, redde red dendam alteri parti, & diuide per numerum q̃d quadratorum, qui est 25, habebis 1 q̃d quadratum p: $456\frac{78}{625}$, æqualia $42\frac{43}{25}$ quadratis, ideo res ualet R: v: $21\frac{23}{50}$ m: R: $4\frac{1025}{2500}$, sed R: $4\frac{1025}{2500}$ est $2\frac{1}{10}$, igitur res est R: $19\frac{36}{100}$, sed hæc est $4\frac{2}{5}$, igitur res fuit $4\frac{2}{5}$, sed prima pars seu maior, fuit 2 positiones m: $\frac{4}{5}$, igitur ipsa fuit 8, & minor fuit 1 positio p: $\frac{8}{5}$, igitur fuit 6, & eius duplum fuit 12, qui excedit 8 in 4, & hoc est quod uoluimus.

QVÆSTIO II.

Est trigonus a b c, cuius basis a b, est 8 p: catheto c d, & a d tripla est d b, & quadratum b c cum latere c b, est 182, posita igitur c d re, & a b, re & 8, seu c d 4 rebus, & a b 4 rebus p: 8, erit b d res p: 2, & proportio $\frac{1}{4}$, ideo ut prius, duc 4 in se, fit 16, duc 1 in se, fit 1, iunge, fit 17, diuisor, inde duc 1 numeratorem $\frac{1}{4}$ in se, fit 1, duc in 8 differentiam, fit 8 diuide per 17, exit $\frac{8}{17}$, pars minuenda ex 4 rebus, inde diuide $\frac{8}{17}$ per proportionẽ quæ est $\frac{1}{4}$, exit $\frac{32}{17}$, pars addenda uni rei, erit igitur b d 1 positio p: $\frac{32}{17}$, & c d, 4 positiones m: $\frac{8}{17}$, duc partes in se, habebis quadrata c d & b d pariter accepta, & ex consequenti, quadratum b c, esse 17 quadrata p: $3\frac{221}{289}$, sequere ut in præcedente, addendo ei latus b c, eritq; R: v: 17 quadratorum p: $3\frac{221}{289}$ p: 17 quadratis p: $3\frac{221}{289}$ æqualis 182, quare $178\frac{68}{289}$ m: 17 quadratis æquatur R: v: 17 quadratorum p: $3\frac{221}{289}$, sequere igitur operationem, ut prius, habebis rei æstimationem esse $3\frac{2}{17}$, cum igitur



b d sit 1 positio p: $\frac{12}{17}$, erit b d 5 & a b 20, quadrupla b d, quare c d, quę est 8 m: quàm a b, erit 12.

QVAESTIO III.

Et similiter, si diceret, sunt duo numeri, quorum differentia est 12, & quadratum minoris cum quadrato $\frac{3}{10}$ maioris, & quadrato aggregati, æquatur 1000, tunc ut prius operaberis, ducendo numeratorem ac denominatorem in se, & iungendo, fit diuisor 109, deinde duco 3 numeratorem in se, & productum in 12, fit 108, diuido per 109, habeo partem minuendam ex 10 positionibus, deinde diuido $\frac{108}{109}$, per $\frac{3}{10}$, exit $\frac{360}{109}$, pars addenda 3 positionibus, si igitur 3 positiones p: $\frac{360}{109}$, ducantur in $\frac{10}{3}$, numerus qui producetur, erit 12 p: quàm 10 res m: $\frac{108}{109}$, & talis est proportio $\frac{360}{109}$ ad $\frac{108}{109}$, qualis 10 ad 3, & ideo, quia regula hæc habent infinitos modos, uelut si dicamus, $\frac{1}{2}$ primi & $\frac{1}{3}$ secundi numeri, differentium per 12, in se ducti addita radice, faciunt 100, tunc quæres eodem modo suam regulam, per regulam de modo, quia hæc regula est ramus illius, quærendo numeros differentes primo in 12, quorum $\frac{1}{2}$ unius ita diuidatur, in $\frac{1}{2}$ rem & numerum, & reliquus in $\frac{1}{3}$ rei & numerum, ita ut producta rerum sint æqualia. Ponendo unum numerum p: alium m: & inuenitur per capitulum nonum, cum quantitate surda, ut in talibus, ponam regulam exemplo adiunctam, dico quod si quis dicat.

10 pos. 3 pos.
$\frac{3}{10}$ — $\frac{9}{100}$) 109
$\frac{3}{10}$ — 9 — 12 — $\frac{108}{109}$
$\frac{108}{109}$ ╳ $\frac{3}{10}$ $\frac{360}{109}$
3 pos. p: $\frac{360}{109}$
10 pos. m: $\frac{108}{109}$

QVAESTIO IIII.

Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 14, & $\frac{1}{3}$ unius in se ductum, cum $\frac{1}{4}$ alterius in se ducto, et cum ℞ aggregati talium productorum, fiat 110, dico primo, duc denominatores in numeratores uicissim, uidelicet 4 in 1, & 3 in 1, & productorum quæ sunt etiam 4 & 3, iunge quadrata, habebis 25 pro diuisore, deinde duc denominatores inuicem, 3 in 4, fit 12, & quod fit in differentiam quæ fuit 14, fit 168, hoc ducito in productum numeratorum, quod fuit 1, fit etiã 168, pro diuidendo, diuide igitur 168, per 25, exit $\frac{168}{25}$, hoc multiplica in ipsas partes, uidelicet $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, habebis 2 $\frac{6}{25}$, addendum, & 1 $\frac{17}{25}$ minuendum, quia semper ut dictum est, minor pars numeri, minuitur à maiore,

$\frac{1}{3}$ ╳ $\frac{1}{4}$ — 12 — 14 — $\frac{1}{168}$ $\frac{}{168}$
3 — 4
9 — 16 — 25
2 $\frac{6}{25}$ — $\frac{1}{3}$
1 $\frac{17}{25}$ — $\frac{1}{4}$ $\frac{168}{25}$
$\frac{1}{3}$ pos. m: 1 $\frac{17}{25}$
$\frac{1}{4}$ pos. p: 2 $\frac{6}{25}$
$\frac{1}{9}$ qd. p: 2 $\frac{504}{625}$ m: 1 $\frac{3}{25}$ pos.
$\frac{1}{16}$ qd. p: 5 $\frac{11}{625}$ p: 1 $\frac{3}{25}$ pos.
$\frac{25}{144}$ qd. p: 7 $\frac{103}{125}$

maiore, & maior additur minori, duc igitur $\frac{2}{3}$ positionis m: $1\frac{17}{25}$ in se, & similiter $\frac{3}{4}$ positionis p: $2\frac{6}{25}$ in se, & collige producta, habebis $\frac{25}{144}$ quadrati p: $7\frac{103}{125}$, absque rebus, quare sequeris operationem, ut in prioribus. Aliud exemplum, in regula parum difficili, inuenias duos numeros differentes in 4, quorum $\frac{3}{4}$ minoris in se ducta, & $\frac{2}{3}$ maioris in se ducta, & aggregato productorum addita radice, fiat 110, duces igitur in crucem, 3 in 3, & 4 in 2, & fient 9 & 8, quorum quadrata iuncta sunt 145, pro diuisore, similiter duces 3 in 4, denominatores, fit 12, duc in 4, differentiam numerorum, fit 48, duc in 6, productum numeratorum, fit 288, pro diuidendo, inde diuiso 288 per 145, exit $\frac{288}{145}$, duc in $\frac{2}{3}$ & in $\frac{3}{4}$, partes acceptas seorsum, habebis $\frac{192}{145}$ & $\frac{216}{145}$, partes addendas ad minuendas ut prius.

$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ — 6
— 12 — 4 — $\frac{48}{288}$ $\frac{288}{145}$
9 — 8

81 — 64 — 145
$\frac{3}{4}$ pos. p: $1\frac{71}{145}$
$\frac{3}{4}$ pos. m: $1\frac{47}{145}$

$\frac{288}{145}$
$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$
$\frac{192}{145}$ $\frac{216}{145}$

QVAESTIO V.

Et similiter dicemus de aggregato, ueluti si dicat, fac ex 10 duas partes, quarum una in se ducta, & alterius dimidio in se ducto, & accepta radice aggregati, totum fit 30, dico operaberis per regulam dictam, in quaestione prima scilicet, quia est, de integris ex una parte, inuenies igitur numeros 4 & 2, & à maiore minues 1 positionem, & minori addes 2 positiones, & ideo in hoc differt à regulis numerorum differentium, caetera paria sunt, & ideo sequendo operationem, habebis rei aestimationem, R: V: $2\frac{1}{10}$ m: R: $\frac{121}{100}$, quod est dicere 1, ideo numeri sunt 6 & 4.

$\frac{1}{2}$ — 2 — 4) 5
$\frac{1}{2}$ — 1 — 10 — 10

10 — 5 — 2
$\frac{2}{1}$ $\frac{16}{24}$ 4
4 m: 1 pos.
2 p: 2 pos.

De regula medij. CAP. XXXIIII.

HAEc sic uocata à me est, quia medium inquiritur, scilicet 1 proportio, & quia ad unitatis confusionem uitandam, ponimus partem unam, dimidium unitatis, & est eius usus solum ad quaerendum quantitates, quae aequaliter multiplicantur, & proportionem seruant, cum autem eam non seruauerint, usus regulae non est utilis, uerum in duabus quantitatibus solum explicatur, de pluribus autem in capitulo trigesimo nono dicemus. Patet autem, quod si quis dicat, inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi iuncti sint 30, quod regula haec non seruiet, quia proportio 30 ad 10, quae est tri-

pla, non seruatur inter cubos & quadratos, uariata quantitate, at regulam ipsam ostendere quemadmodum & alias per exempla utile fuerit.

QVAESTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ducta in quadratorum differentiam faciat 10, & aggregatum illorum in quadratorum aggregatum, faciat 20. Pones igitur ut dictum est unum illorũ, positionẽ, alium $\frac{1}{2}$ deinde inuenies differentiã, & aggregatum, & quadrata partium, & differentiam quadratorum, & aggregatum, ut in margine, inde ducito differentiam partium in differentiã quadratorum, & habebis $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo m: $\frac{1}{2}$ quadrato m: $\frac{1}{4}$ positionis, & hoc debet esse dimidium producti aggregatorum numerorum scilicet ac quadratorum, quia 10 est dimidium 20, igitur erit dimidium $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positionis, quare $\frac{1}{4}$ p: 2 cubis m: 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione, æquatur $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo p: $\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{1}{4}$ positionis, igitur reddendo partes m: ad p: erit ut $\frac{1}{8}$ p: 1 cubo, æquetur $1\frac{1}{2}$ quadrato p: $\frac{3}{4}$ positionis, quare diuisis partibus, ad faciliorem operationem, quæ semper poterunt diuidi, habebimus $1\frac{1}{2}$ positionis, æqualem 1 quadrato m: $\frac{1}{2}$ positione p: $\frac{1}{4}$, diuisor, namq; cõponitur ex partibus ab initio sumptis, scilicet 1 positione & $\frac{1}{2}$, quare 1 quadratum p: $\frac{1}{4}$, equabitur 2 positionibus, et res erit 1 p: R: $\frac{3}{4}$, sunt igitur quantitates in proportione 1 p: R: $\frac{3}{4}$, & $\frac{1}{2}$, quare in proportione 2 p: R: 3, & 1. Iterum igitur quæramus duas quantitates in hac proportione, quarum aggregatum in aggregatum quadratorum ductum, faciat 20, nam tales necessario habebunt etiam reliquã conditionẽ, ponemus igitur unam illarum rem, aliam res 2 p: R: 3, & queremus sua quadrata, que iungemus, & erunt q̃drata 8 [illegible] p: R:

Numeri	1 pos.	$\frac{1}{2}$
Differentia numerorum	1 pos. m:	$\frac{1}{2}$
Aggrega. numerorum	1 pos. p:	$\frac{1}{2}$
Quadrata	1 q̃d.	$\frac{1}{4}$
Differentie quadratorum	1 q̃d. m:	$\frac{1}{4}$
Aggregatum q̃drat.	1 q̃d. p:	$\frac{1}{4}$

productum different. $\frac{1}{8}$ p: 1 cu. m: $\frac{1}{2}$ q̃d. m: $\frac{1}{4}$ pos.

productum q̃drat. $\frac{1}{8}$ p: 1 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{4}$ p: 2 cub. m: 1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ pos.

$\frac{1}{8}$ p: 2 cub. p: $\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{1}{4}$ pos.

$\frac{1}{8}$ p: 1 cub. æquatur $1\frac{1}{2}$ q̃d. p: $\frac{3}{4}$ pos.

1 pos. p: $\frac{1}{2}$	1 pos. p: $\frac{1}{2}$
1 q̃d. m: $\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$ pos.

Numeri res	1	res 2 p: R: 3
Quadrata q̃d.	1	q̃d. 7 p: R: 48
Aggreg. numero.		res 3 p: R: 3
Aggreg. q̃d.		q̃d. 8 p: R: 48
Productum cubi		36 p: R: 1200

p: ℞ 48, & ducemus in aggregatum numerorum, scilicet res 3 p: ℞ 3, & fiunt cubi 36 p: ℞ 1200, diuidemus igitur 20 per ℞ 1200 p: 36, & exibit $7\frac{1}{2}$ m: ℞ $52\frac{1}{12}$, cuius ℞ cubica erit numerus minor quæsitus, maior autem habebitur, ducto minore in 2 p: ℞ 3, quare numeri quę siti erunt,

Primus ℞ v: cubica $7\frac{1}{2}$ m: ℞ $52\frac{1}{12}$

Secundus ℞ v: cubica 195 m: ℞ $35437\frac{1}{2}$ p: ℞ 33075 m: ℞ 35490

QVAESTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum differentia ducta in differentiam cuborum, producat 10, & aggregatum in aggregatum cuborum constituat 30, hac in quę stione, procedes ut in pręcedenti, uerum pones partes 1 positionem & 1, ad facilitatem maiorem, & sequeris ut in præcedenti, donec uenies ad 1 q̄d quadratum p: 1, æquale 2 cubis p: 2 positionibus, igitur habeo quinque quantitates continue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ, est duplum aggregato secundę & quartæ, igitur per capitulum quinque quantitatum

Numeri	1 pos.	1
Differentia numer.	1 pos. m:	1
Aggregatū numero.	1 pos. p:	1
Cubi	1 cub.	1
Differentia cuborum	1 cub. m:	1
Aggregatum cuborū	1 cub. p:	1
Produc. aggregatorum		
1 q̄d q̄d. p: 1 cub. p: 1 pos. p: 1		
Productum differentiarum		
1 q̄d q̄d. m: 1 cub. m: 1 pos. p: 1		
3 q̄d q̄d. m: 3 cub. m: 3 pos. p: 3		
1 q̄d q̄d. p: 1 cub. p: 1 pos. p: 1		
2 q̄d q̄d. p: 2	4 cub. p: 4 pos.	
1 q̄d q̄d. p: 1	2 cub. p: 2 pos	

in continua proportione constitutarum quæro proportionem; assumendo puta 2 & 4 quorum 4 est duplus alteri, & faciendo de 4 primam & quintam, & de 2 secundam & quartam, igitur talis ppor tio erit ut $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, ad unitatem, pones igitur denuo res sub his numeris, uidelicet 1 rem; & res $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: ℞ v: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, inde ducito ad cubum partes per regulas tertij libri, quod non difficile fiet, inde duces res ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, differentiam scilicet numerorum, in differentiam cuborum, quę habetur detracto 1 cubo, ex cubo dicti iam compositi ex quatuor nominibus, & productū æquabitur 10, diuides 10 per tale productum & eius quod exit ℞ ℞, erit æstimatio primæ quantitatis, qua ducta in $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: ℞ $6\frac{3}{4}$ m: $2\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $\frac{3}{4}$ m: $\frac{3}{4}$, consurget secunda quantitas, seu secundus numerus.

QVAESTIO III.

Inuenias duos numeros quorum relati primi iuncti faciant 20, & aggre-

aggregatum cuborum in aggregatum quadratorum ductum, faciat 25, pones ut in precedente, partes, 1 positionem & 1, & relati primi earum, sunt 1 $p^m r^m$ & 1, & productum aggregati quadratorum in aggregatum cuborum est, 1 $p^m r^m$ p: 1 cubo p: 1 quadrato p: 1, & hoc se habet ad 1 $p^m r^m$ p: 1. ut 25 ad 20, & ut 5 ad 4, igitur per regulam quantitatum proportionalium, ducto 2 $p^o r^o$ p: 1 cubo p: 1 quadrato p: 1, per 4, faciemus quantum ducto 1 $p^o r^o$ p: 1, per 5, igitur 4 $p^i r^i$ p: 4 cubis, p: 4 quadratis p: 4, æquantur 5 $p^{is} r^{is}$ p: 5, quare tandem habebimus 1 $p^m r^m$ p: 1, facta detractione, æquale 4 cubis p: 4 quadratis, diuide partes per positionem p: 1 q̄d' quadrato m: 1 cubo p: 1 quadrato m: 1 positione p: 1,

1 pos.	1
1 $p^m r^m$	1
1 cub. p:	1
1 q̄d. p:	1
1 $p^m r^m$ p: 1 cu: p: 1 q̄d. p: 1	

5 $r^i p^i$ p:	5
4 $r^i p^i$ p: 4 cub. p: 4 q̄d. p: 4	
1 $r^m p^m$ p: æquatur 4 cub. p: 4 q̄d.	

1 pos. p: 1

1 q̄d' q̄d. m: 1 cub. p: 1 q̄d. m: 1 pos. p: 14. q̄d.

1 q̄d' q̄d. p: 1 | 1 cu. p: 3 q̄d. p: 1 pos.

æqualia 4 quadratis, igitur 1 q̄d' quadratum p: 1 æquatur 1 cubo p: 3 quadratis p: 1 positione, sunt igitur quinque quantitates continue proportionales, quarum aggregatum primæ & quintæ, est gratia exempli 10, & aggregatum secundæ & quartæ cum triplo tertiæ etiam, 10, igitur nota erit proportio, per capitulum 5 quantitatum continuæ proportionis, & erit

$$\frac{\text{R}\!\!\!/\ 3\frac{6}{7}\ m: 1\ p: \text{R}\!\!\!/\ v: \text{R}\!\!\!/\ 1\frac{5}{7}\ m: \frac{6}{7}}{2\ m: \text{R}\!\!\!/\ 1\frac{5}{7}}$$

, & est proportio illarum quantitatum, in secunda igitur positione, pones 1 rem, & res in numero supradicto seu proportione, uel reductam proportionem, ut in præcedente quæstione, facta diuisione per numeratorem, ad relatum ducito, per suam regulam, cui adde 1, relatum primum de 1, & cum aggregato diuide 20, & R relata prima, prima, prouentus est numerus minor, inde multiplica ipsum in proportionem, & prouenict maior, & perficere talem operationem est res quasi supra humanum laborem, & nisi essent regulæ tertij libri, uix omnino possibile foret.

De regula aggregati. CAP. XXXV.
REGULA I.



Icut ex præcedente, & regula iterata, proportio ipsa quæritur, sic per hanc habemus aggregatum, Est autem utilis ualde, ubi inter partes nulla supponitur proportio. Nam medi-

medium ad quærendum plures numeros simul, est uel proportio, uel aggregatum, aut differentia, cum igitur ex præcedente & regula iterata proportio habeatur, cum hac autem & aggregatum & differentia, satis constat, quanto hæc illas antecedat interuallo. Vocauimus & hanc regulam dupli, quòd duas contineat partes, seu duos numeros quæsitos, ratio uero eius, ut reliquarum, per exempla patet.

QVÆSTIO I.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, cum ipsis numeris, sit 16, dico (quamuis ex sexto libro solui posit) sic per regulam faciemus. Pone aggregatum 1 positionem, seu rem, & quia ex uno in alterum fit 10, minus aggregato, igitur ex uno in alterum fiet 10 m: re, fac igitur ex positione duas partes, producentes 10 m: 1 positione, & erunt ex regula capituli de operationibus in sexto libro posita, partes, $\frac{1}{2}$ positionis p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, & $\frac{1}{2}$ positionis m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positione m: 10, horum itaque quadrata iuncta debent esse 20, & quia una pars est Binomium, altera recisum respectu $\frac{1}{2}$ positionis, sufficiet ducere partes in se, non unam in aliam, ut in libris 3° & 4° & 5° docuimus, ideo ducta $\frac{1}{2}$ positio in se, fit $\frac{1}{4}$ quadrati, & ducta ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positionem m: 10, in se fit $\frac{1}{4}$ quadrati p: 1 positionem: 10, & tantundem ex alia parte, ut in figura, quare quadrata Binomij & recisi iuncta, sunt 1 quadratum p: 2 positionibus m: 20, & hoc æquatur 20, ut dictum est, igitur 1 q̄d. p: 2 positionibus æquatur 40, & rei æstimatio erit ℞ 41 m: 1, fac ex ℞ 41 m: 1 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 20, & erunt per nouam positionem, uel per regulas capituli de operationibus in quarto libro partes quas à latere uides.

$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{4}$ q̄d. p: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
$\frac{1}{4}$ q̄d. p: $\frac{1}{4}$ q̄d. p: 1 pos. m: 10
1 q̄d. p: 2 pos. m: 20

p^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
2^a ℞ 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 10 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$

QVÆSTIO II.

Inuenias duos numeros, qui iuncti faciant tantum, quantum inuicem ducti, & eorum quadrata iuncta sint 20, si igitur aggregatum est 1 positio, productum etiam unius in alterum est 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, producentes 1 positionem, per regulas capituli de operationibus in sexto libro positas, seu per quintam secundi Elementorum, & erunt partes quas à latere posui, harum igi-

 tur

tur quadrata iuncta sunt 20, quare cũ habeant ut in præcedenti rationem Binomij & recisi, sufficiet ducere partes unius cor in se, & duplicare. igitur habebimus pro aggregato quadratorum 1 quadratum m: 2 positionibus, æqualia 20, quare res erit ℞ 21 p: 1, ideo faciemus ex ipsa partes, ut propositum est, & erunt ut uides.

$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d. m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ q̄d. p: $\frac{1}{2}$ q̄d. m: 2 pos.

℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$
℞ 5 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 4 $\frac{1}{2}$ m: ℞ 5 $\frac{1}{4}$

QVAESTIO III.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur aggregatum, & quadrata ipsorum cum ipsis numeris faciant 20, fac ut in præcedenti, & habebis aggregatum ℞ 20 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quod est 5, & quia quadrata partium cum ipsis numeris debent æquari 20, igitur quadrata ipsa sola absque numeris erunt 15, fac igitur ex 5 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 15, & habebis numeros quos uides memineris autem, quod in prima operatione, quando perueneris ad 1 quadratum m: 2 positionibus, pro aggregato quadratorum, ut addas 1 positionem, quod est aggregatum numerorum, & peruenies ad 1 quadratum m: 1 positione, æqualia 20.

2 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{4}$
2 $\frac{1}{2}$ m: 1 $\frac{1}{4}$

QVAESTIO IIII.

Inuenias duos numeros, qui inuicem ducti producant aggregatum, & diuiso 12 per utrumque, quadrata prouenientium iuncta cum aggregato diuidentium faciant 80, hæc cum præcedentibus est fratris Lucæ, in quodam scripto quod perierat. Pone aggregatum rem unam, eam diuide in partes, producentes rem unam, et habebis partes, ut uides, cum quibus diuide 12, ut in figura.

$$\text{Partes} \quad \frac{12}{\frac{1}{2}\text{ pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d. m: 1 pos.}} \qquad \frac{12}{\frac{1}{2}\text{ pos. m: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d m: 1 pos.}}$$

$$\text{quadrata partium} \quad \frac{144}{\frac{1}{2}\text{ q̄d. m: 1 pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d q̄d. m: 1 cub.}} \qquad \frac{144}{\frac{1}{2}\text{ q̄d. m: 1 pos. p: ℞ v: }\frac{1}{4}\text{ q̄d q̄d. m: 1 cub.}}$$

$$\text{Aggregatum q̄dratorum} \quad \frac{144\text{ q̄d. m: 288 pos.}}{1\text{ quad.}}$$

Igitur ex partibus ipsis factis q̄dratis, iunctisque ut in quinto lib. docui re, habebis aggregatum q̄dratorum, cui adde aggregatum diuidentium, siquidem rem unam habebis, $\frac{144\text{ quad. m: 288 positionibus}}{1\text{ quad.}}$

p: 1

p:1 positione, æqualia 80, multiplica omnia per positionem, fient 144 positiones m:288 p:1 quadrato, æqualia 80 positionibus, quare quadratum, & 94 positiones, æquantur 288, res igitur est ℞ 1312 m:32, fac igitur ex ℞ 1312 m:32, duas partes, producentes ℞ 1312 m: 32, & illæ erunt numeri quæsiti.

QVAESTIO V.

Inuenias duos numeros quorum quadrata iuncta sint 20, & productum unius in alterum, æquale sit quadrato differentiæ, hæc quamquã clara sit, quoniam necessariè sit eos numeros esse in proportione, quę dicitur habere medium & duo extrema. Possit etiam solui ex regula positionis æqualis, nam plures quæstiones, multis ac diuersis regulis solui possunt. Sic tamen ex hac regula faciemus, posito aggregato re, diuidemus eam in partes, quarum quadrata iuncta sint 20, & erunt ut uides, igitur quadratum differentiæ est 40, m:1 quadrato, & hoc æquatur producto partium inuicem, quod est $\frac{1}{4}$ quadratum m:10; quare $1\frac{1}{4}$ quadratum, æquatur 50, igitur res est ℞ $33\frac{1}{3}$, ex hoc fac duas partes, quarum quadrata iuncta sint 20, & erunt ℞ $8\frac{1}{3}$, p: ℞ $1\frac{2}{3}$, & ℞ $8\frac{1}{3}$ m: ℞ $\frac{2}{3}$. Et ex hac regula deducuntur octo quæstiones, quas ego ob uehementem similitudinem Sorores appellaui, ad capiuia melius, quàm alia.

$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: 10 m: $\frac{1}{4}$ quad.
Differentia ℞ v: 40 m:1 q̃d.
Quad. differẽtię 40 m:1 q̃d.
productum $\frac{1}{4}$ quad. m: 10.

Sequunt̃ octo quæstiones, quæ uocantur Sorores, q̃rũ ultima sola pro aliarum exemplo declaratur.

QVAESTIO VI.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & cubi sint 30, pones aggregatum numerorum positionem, & facies partes ex ea, quarum quadrata iuncta sint 10, inde iunge cubos illarum partium, & habebis cubum p:60, æqualia 30 rebus.

QVAESTIO VII.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & differentia cuborum illorum sit 15, pone aggregatum eorum ut prius, rem, & habebis 1 cub' quadratum, æquale 300 q̃dratis p:1100.

QVAESTIO VIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, & ex ductu cuiuslibet eorum in quadratum alterius, producta iuncta faciant 20, pones eodem modo aggregatum numerorum, rem, & habis 1 cub' q̃dratum p:300 quadratis p:800 positionibus, æqualia 40 q̃d' q̃dratis p:1600.

QVAESTIO IX.

Inuenias duos numeros, quorum quadrata iuncta sint 10, et producta unius in alterius quadratum mutuò, differant per 4. Pones ut prius aggregatum, rem, & habebis 1 cub' quadratum p: 500 quadratis æqualia 40 q̃d' quadratis p: 1936.

QVAESTIO X.

Inuenias duos numeros, quorum differentia quadratorum sit 10, & cuborum aggregatum sit 100. Pones aggregatum numerorum, rem, & facies ex ea partes, quarum quadrata differant in 10, & eas duces ad cubum, & habebis 1 quad' quadratum p: 300, æqualia 400 positionibus.

QVAESTIO XI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & cuborum differentia sit 100. Pones ut prius, aggregatum numerorum, rem, & habebis 1 quad. quadratum p: $33\frac{1}{3}$, æqualia $13\frac{1}{3}$ cubis.

QVAESTIO XII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & aggregatum productorum unius in quadratum alterius mutuo, sit 100. Pones ut prius aggregatum illorum, rem, & habebis 1 q̃d quadratum æquale 400 rebus p: 100.

QVAESTIO XIII.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & differentia productorum unius in alterius quadratorum, sit 100, hanc explicabo diligenter, ut sit forma operandi, atque exemplar in reliquis, nõ solum septem procedentibus, sed & alijs multis, quæ formari possunt in hoc genere. Ponam igitur illorum aggregatum, rem, & per regulam de modo, uel capituli operationum in quarto libro, faciam ex ea duas partes, quarum quadratorum differentia sit 10, & est, ut diuidas illã differentiam scilicet 10, per duplum diuidendi, quod est 2 positiones, exiens quod est $\frac{5}{1\ pos.}$, addes & minues dimidio diuidendi, quod est $\frac{1}{2}$ positio, habebis partes, & quadrata illarum, quæ

$\frac{1}{2}$ pos. p: $\frac{5}{1\ pos.}$	$\frac{1}{2}$ pos. m: $\frac{5}{1\ pos.}$
$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{25}{1\ quad}$ m: 5	$\frac{1}{4}$ q̃d. p: $\frac{25}{1\ quad}$ p: 5
$2\frac{1}{2}$ pos. m: $1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$ pos. m: $2\frac{1}{2}$
pos. m: $\frac{125}{1\ cu.}$	pos. p: $\frac{125}{1\ cu.}$
Differentia $2\frac{1}{2}$ pos. m: $\frac{250}{1\ cu.}$ equalia 100	
1 q̃d' q̃d. æquale 40 cub. p: 100	

suppone permutato ordine suis radicibus, ut in figura patet, duces igitur inferiora in sua superiora, sufficitque in his, quorũ uolumus differentiã multiplicare, partes dissimiles, id est quæ in uno p̃ducant p: in alio m: sicut in aggregandis sufficit multiplicare partes similes, nam

nam reliquæ per se cadūt, duc igitur $\frac{1}{2}$ positione in m: $\frac{1}{1\ p:1}$ m: 5, & $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{5}{1\ quad.}$, quia ubi una producit p: alia producit m: & detrahe m: à p: & hoc non est aliud, quàm duplicare unum illorum productorum, habebis differentiam unius producti ab altero, 2 $\frac{1}{2}$ positiones m: $\frac{250}{1\ cu}$, igitur hoc ęquatur 100, diuide omnia per 2 $\frac{1}{2}$, & multiplica per 1 cubum, habebis 1 q̃d quadratum æquale 40 cubis p: 100, & ita in aliis, & posses super hoc statuere regulam de modo, dicendo, cum duo numeri, quorum quadratorum differentia est constituta ex multiplicatione uicissim in quadrata, debent producere aliquam differentiam inter ipsa producta, tunc erit q̃d quadratum æquale quadrato differentiæ quadratorum, & totidem cubis, quotus est numerus, qui prouenit, diuiso numero differentiæ productorum per quartam partem differentiæ quadratorum, uelut si dicam, inuenias duos numeros quorum quadratorum differentia sit 6, & productorum unius in quadratum alterius differentia sit 60, dicemus igitur 1 q̃d quadratum æquabitur 40 cubis p: 36, & ita de aliis.

REGVLA II.

Est & alius modus regulę aggregati, longe subtilior pręcedente, & facit duas positiones simul & duas conuersiones, & nihil est subtilius his in regulis, & inueni ipsum in quodam fragmento fratris Lucæ, & tandem reduxi ipsum post multos labores, quia uix poterat legi in hac parte, uel percipi imago huius regulæ, & ego explicabo eam faciliter, & nisi esset, quod non est multū generalis hic modus, quantum ad ostendendam æstimationem rei, licet quo ad positionem sit amplissimus, nihil aliud posset excogitari præstantius, & exemplum ac regula erit in quæstionibus.

QVAESTIO XIIII.

Inuenias duos numeros, ex quorum ductu unius in alterum producatur 8, & quadrata iuncta cum ipsis numeris, faciant 40. Pones aggregatum illorum numerorum $\frac{1}{2}$ quantitatem, & alterū ex illis 1 positionem, reliquus igitur est $\frac{1}{2}$ quantit. m: 1 positione, duc inuicem, fiunt $\frac{1}{2}$ quan' pos. m: 1 q̃drato, & hoc ęq̃tur 8, igit̃ habes q̃dratum p: 8, ęq̃le quantitati, cuidam rerum. Sequere igitur capitulū, accipe dimidium numeri rerum, id est $\frac{1}{4}$ q̃ntitatis, ut in capitulo quinto doceris, quando q̃dratū & numerus æq̃ntur rebus, duc igitur $\frac{1}{4}$ q̃ntitatis in se, fit $\frac{1}{16}$ q̃d' quan: abiice 8, numerū æq̃tionis, fit $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃n: m: 8, accipe R: v: q̃m adde, ac minue, ad $\frac{1}{4}$ q̃ntitatis, dimidium numeri rerum, fiet rei æstimatio, seu numeri quęsiti, quorum unus est, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: R: v: $\frac{1}{16}$ q̃d' quan' m: 8, & alter, $\frac{1}{4}$ quantitatis m: R: v: $\frac{1}{16}$ q̃d' quan' m: 8, horum igitur quadrata, addito aggregato nu-

merorum, id est $\frac{1}{2}$ quantitatis, equantur 40, quadrata igitur partium, cadentibus uicissim multiplicationibus $\frac{1}{4}$ quantitatis in ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d quan: m: 8, quia sunt equalia, m: & p: erunt $\frac{1}{8}$ q̄d quan: m: 8, & $\frac{1}{8}$ q̄d quan: m: 8, iuncta igitur $\frac{1}{4}$ q̄d quan: m: 16, equalia cum $\frac{1}{2}$ quantitatis, aggregato numerorũ ad 40, pone igitur pro quantitate rem, erit $\frac{1}{4}$ quadrati p: $\frac{1}{2}$ positione æquale 56, igitur 1 q̄dratum p: 2 positionibus, æquat 224, quare res ualet ℞ 225 m: 1, id est 14, & tantundẽ ualet quãtitas, sed nos posuimus dimidium quantitatis aggregatũ, igitur aggregatũ numerorum est 7, fac ex 7 duas partes, ex quarũ ductu inuicem fiat 8, & erunt $3\frac{1}{2}$ p: ℞ $4\frac{1}{4}$, & $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $4\frac{1}{4}$, numeri quæsiti, quorum quadrata cum numeris ipsis sunt 40.

$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ quan: pos. m: 1 q̄d.
æqualis 8
$\frac{1}{4}$ quan:
$\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄d: p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d: q̄n: m: 8
$\frac{1}{4}$ q̄n: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. q̄n: m. 8

$\frac{1}{8}$ quad. quan: m: 8
$\frac{1}{8}$ quad. quan: m: 8
$\frac{1}{2}$ quan:

$\frac{1}{4}$ q̄d. quan: m: 16 p: $\frac{1}{2}$ quan:
æqualis 40

1 q̄d. quan. p: 2 quan: æqualis 224
æstimatio rei ℞ 225 m: 1

Notandum. Et si quis quærat, quid prosit hæc regula, cuique possit opitulari præter primam? Respondeo, Prima indiget regula speciali sexti libri in operando, hæc autem libere usque in finem agit, deducendo, quod quàm pulcherrimum ultra id quod utilissimum est, nullo alieno indigere præsidio. Est & aliud exemplum.

QVAESTIO XV.

Inuenias duos numeros, ex quorum multiplicatione producatur 6, & quorum cubi iuncti faciant 100. Ponemus $\frac{1}{2}$ quantitatẽ pro aggregato, & partem unam rem, alia erit $\frac{1}{2}$ quantitas m: re, duc partes inuicem, habebis $\frac{1}{2}$ quan: pos: m: 1 quadrato, æqualia 6, sequere æquationem tanquam $\frac{1}{2}$ quantitas esset aliquis numerus, & habebis æstimationem, duas æstimationes pos. scilicet, $\frac{1}{4}$ quantitatis p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d quan: m: 9, et $\frac{1}{4}$ quantitatis m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d quan: m: 6, horum cubi debent æquari 100, duc ad cubũ, dimittendo partes, que in uno sunt p: in alio m: habebis $\frac{1}{16}$ cub quan: m: 4 $\frac{1}{2}$ q̄ntitatibus pro

$\frac{1}{2}$ quan:
1 pos. | $\frac{1}{2}$ quan: m: 1 pos.
$\frac{1}{2}$ quan: pos. m: 1 q̄d
æqualis 6

$\frac{1}{4}$ quan: p: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d, quan: m: 6 | pos.
$\frac{1}{4}$ quan: m: ℞ v: $\frac{1}{16}$ q̄d. quan: m: 6 | pos.

$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: $4\frac{1}{2}$ quan: | cubus
$\frac{1}{16}$ cub. quan: m: $4\frac{1}{2}$ quan: | cubus

$\frac{1}{8}$ cub. quan: m: 9 quan: æqualia 100
1 cub. æqualis 72 res p: 806

singulis partibus, quare in totū $\frac{1}{8}$ cub' quan: m: 9 quantitatibus, equalia 100, permuta cub' quan: in cubū rei, & quantitatem in rem, & reduces ad 1 cubum, habebis cubum, æqualem 72 rebus p, 800, & rei æstimatio erit æstimatio quantitatis, scilicet ℞ v: cubica 400 p: ℞ 146176 p: ℞ v: cubica 400 m: ℞ 146176, huius igitur dimidium, quod est ℞ v: cubica 50 p: ℞ 2284 p: ℞ v: cubica 50 m: ℞ 2287 est aggregatum quęsitorum numerorum, & partes sunt, ℞ v: cubicę quęsitæ, sed hoc apparet alia operatione.

QVAESTIO XVI.

Inuenias duos numeros, quorum quadratorum differentia sit 10, & ex maiore illorum iuncto cum suis quadratis, fiat 40. Pones aggregatum numerorum rem, & unam partem $\frac{1}{2}$ quantitatem, reliqua erit res m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, duc in se partes, habebis $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: & 1 quadratum p: $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 1 quan' pos. sume differentiam, quæ erit 1 quan' pos. m: 1 q̄d. & hoc æquatur 10, igitur rei æstimatio est $\frac{1}{4}$ quantitas p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 10, & $\frac{1}{2}$ quantitas m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 10,

	1 pos.
$\frac{1}{2}$ quan:	1 pos. m: $\frac{1}{2}$ qoan:
$\frac{1}{4}$ q̄d' quan:	1 q̄d. p: $\frac{1}{4}$ q̄d. quan: m: 1 quan: pos.
$\frac{1}{2}$ quan: p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' q̄n: m: 10	pos.
$\frac{1}{2}$ quan: m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' q̄n: m: 10	pos.
$\frac{1}{4}$ q̄d' quan: | $\frac{1}{4}$ q̄d' q̄n: m: 10	$\frac{1}{2}$ quan:
1 q̄d' quan: p: 1 quan: æquantur 100	

horum quoduis æquatur 1 positioni, & iam positio diuisa fuit in $\frac{1}{2}$ quantitatem, & positionem m: $\frac{1}{2}$ quantitate, igitur cum $\frac{1}{2}$ quantitas sit communis utrobiq;, erit ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 10, æqualis 1 positione m: $\frac{1}{2}$ quantitatis, igitur quadrata partium, quæ sunt $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: & $\frac{1}{4}$ q̄d' quan: m: 10, cum una partium, scilicet $\frac{1}{2}$ quantitate, æquantur 40, quare 1 q̄d' quan: p: 1 quantitate, æquatur 100, res igitur quæ est quantitas, est ℞ 100$\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & quia nos posuimus $\frac{1}{2}$ quantitatis, erit una pars, ℞ 25$\frac{1}{16}$ m: $\frac{1}{4}$, dimidium scilicet ℞ 100$\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$, & minor erit ℞ v: 15$\frac{1}{8}$ m: ℞ 6,$\frac{17}{64}$. Et generaliter in hac regula, qui plus ualet ingenio, plus ualet in operatione; nam modi sunt complures, & de omnibus dicere longum foret. Ista igitur sufficiant, & ad exempla primæ regulæ denuo transeamus, quærentes hoc modo.

QVAESTIO XVII

Inuenias duos numeros, quorum quadratum secundi, æquale sit ducto primi in aggregatum, & quadrata illorum iuncta sint 10, ut des manifeste, quod si ponatur aggregatum illorum res, ipsa erit diuidenda secundū proportionem habentem medium & duo extrema, eruntq; partes, ℞ v: $\frac{5}{4}$ q̄drati m, $\frac{1}{2}$ positionis: & 1$\frac{1}{2}$ positiones m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quadrati, harum igitur quadrata erunt 5 quadrata m: ℞

20,

20 q̃d' quadratorum, & erunt æqualia 10, igitur ex capitulo argumentandi p: & m: 5 quadrata m: 10, æquantur ℞ 20 q̃d' q̃dratorum, quare partes erunt ut uides.

℞ v: $2\frac{1}{2}$ p: ℞ 5 p: ℞ v: $2\frac{1}{2}$ m: ℞ 5
℞ v: $2\frac{1}{2}$ p: ℞ 5 m: ℞ v: $2\frac{1}{2}$ m: ℞ 5

QVAESTIO XVIII.

Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum primus & secundus æquentur tertio, & quadrata primi & secundi iuncta sint 10. Pones tertium 1 positionem; fac de 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, & erunt $\frac{1}{2}$ positionis p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positio m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, duc 1 positionem in minorem, & producetur quadratum maioris, aliter diuides 1 positionem secundum proportionẽ habentem medium & duo extrema, inde duces partes ad q̃dratum, & quadrata iuncta erunt 10, partes igitur erunt.

p^a	℞ v: $22\frac{1}{2}$ p: ℞ 405 m: ℞ v: $12\frac{1}{2}$ p: ℞ 125
2^a	℞ v: $12\frac{1}{2}$ p: ℞ 125 m: ℞ v: $2\frac{1}{2}$ p: ℞ 5
3^a	℞ v: 10 p: ℞ 80.

QVAESTIO XIX.

Similiter, si quis dicat, inuenias tres numeros in continua proportione, ex quorum ductu primi in secundum fiat 10, & primus cum secundo æquentur tertio, eodem modo procedendo habebis quantitates.

p^a	℞ v: ℞ $31\frac{1}{4}$ p: 5 m: ℞ v: ℞ $31\frac{1}{4}$ m: 5
2^a	℞ v: ℞ $31\frac{1}{4}$ p: 5 p: ℞ v: ℞ $31\frac{1}{4}$ m: 5
3^a	℞ v: ℞ 500 p: 20

De regula liberæ positionis. CAP. XXXVI.



IStregula pro quæstionibus, quæ consequuntur proprietates numerorum uniuersales, quas homo ignorat, inde quærens per alias regulas, laborat inaniter, non enim proportionem exigunt, nec tamen in omnibus quantitatibus inueniri queunt, tales autem sunt.

QVAESTIO I.

Inuenias quinque quantitates, quarũ secundæ quadratum, æquale sit aggregato earum, cum quadrato primæ, sintque hæ quantitates in continua proportione, ponã igitur in quacunque uoluero proportione, ab una positione inchoando, uelut in figura uides, eritque in dupla (exempli gratia) q̃dratum secundæ, 4 q̃drata, & hoc æquatur 1 q̃drato quod est qua-

1 q̃d. 1 pos.
4 q̃d. 2 pos.
4 pos.
8 pos.
16 pos.
3 q̃d. æq̃lia
31 pos.

dra-

dratum primæ & 31 rebus, igitur 3 quadrata æquantur 31 rebus, & res erit $10\frac{1}{3}$, & reliquæ secundum duplam proportionem, ut uides, $10\frac{1}{3}$, $20\frac{2}{3}$, $41\frac{1}{3}$, $82\frac{2}{3}$, $165\frac{1}{3}$.

QVAESTIO II.

Inuenias duos numeros, in proportione dupla, quorum quadrata, uel cubi, uel relati, sint æqualia ipsis, & sit exemplum de relatis, tanquam magis admirandis. Ponemus igitur in proportione dupla, 1 positionem & 2 positiones, quorum relata erunt, 32 relata prima, & 1 relatum primum, iunge, fient 33 relata prima, æqualia 3 rebus, igitur per capitulum simplex, res erit R: R: $\frac{1}{11}$, diuiso 3 per 33, reliqua quantitas, igitur erit R: R: $1\frac{5}{11}$, scilicet duplum R: R: $\frac{1}{11}$.

QVAESTIO III.

Inuenias tres quantitates in continua proportione, quarum proportio sit tripla, & $\frac{1}{4}$ aggregati, in se ductum, producat $\frac{1}{7}$ secundæ quantitatis. Ponemus igitur quantitates, 1 positionem, 3 pos. 9 pos. harum aggregatum est 13 positiones, cuius $\frac{1}{4}$ est $3\frac{1}{4}$ positiones, & quadratum est $10\frac{9}{16}$, & hoc est $\frac{1}{7}$ de 3 positionibus, igitur $73\frac{15}{16}$ quadrata, æquantur 3 positionibus, quare positio est $\frac{48}{1183}$, & quantitas secunda erit $\frac{144}{1183}$ & tertia erit $\frac{432}{1183}$.

QVAESTIO IIII.

Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum secundus sit 10: & $\frac{1}{20}$, aggregati omnium in se ductum, producat septuplum secundi, ponemus primum rem, igitur tertius erit $\frac{100}{1\ pos}$, & quia $\frac{1}{20}$ aggregari in se ductum, producit septuplum secundi, igitur producit 70, & R: 70, est $\frac{1}{20}$ aggregati, igitur aggregatum est R: 28000, & ideo prima & tertia, erunt R: 28000 m: 10, & hoc æquale est 1 pos. p. $\frac{100}{1\ pos}$, igitur 1 quadratum p: 100, æquatur positionibus R: 28000 m: 10, igitur prima quantitas fuit R: 7000 m: 5 m: R: v: 6925 m: R: 700000, & tertia quantitas erit R: 7000 m: 5 p: R: v: 6925 m: R: 700000, posset etiam breuius fieri, sed absque positione.

De regula falsum ponendi. CAP. XXXVII.

REGVLA I.

HÆc regula triplex est, aut enim ponit m: aut quærit R: m: aut quærit quod non est. Primo igitur quærimus quæstionum solutiones, quæ per p: uerare minimè licet, uelut si quis dicat, quadratum æquatur 4 rebus p: 32, & in eadem æstimatione, quadratum æquatur 1 rei p: 20, tunc si uelles scire æstimationem ueram, in prima res esset 8, in secunda autem quæstione 5, sed si dicas conuertendo, igitur quadratum p: 4 rebus,

æquatur 32, & res erit 4, & in hoc etiam uerum erit, quòd quadratum & res, æquantur 20, dic igitur, si 4 p: seruit his quæsitis, igitur 4 m: est æstimatio 1 quadrati: æqualis 4 rebus p: 32, & 1 quadratum æquale 1 rei p: 20, ideo conuertes capitula, ut in primo capitulo diximus, & si casus est impossibilis, in utroque quæstio falsa est, per p: & per m: & si uera est, per p: in uno, erit uera per m: in alio, & eiusdemmodi generis est quæstio hæc.

QVÆSTIO I.

Dos uxoris Francisci, est aurei 100 plusquam Francisci peculium, & dos uxoris eius in se ducta, est aurei 400 plus peculio Francisci in se ducto, quæritur dos, & peculium. Ponemus Franciscum habere rem unam m: igitur dos uxoris est aurei 100 m: 1 re, duc partes in se, fient 1 quadratum & 10000, p: 1 quadrato m: 200 positionibus, horum differentia est 400 aurei, igitur 1 quadratum p: 400 p: 200 positionibus, æquatur 10000 p: 1 quadrato, abijce communia, habebis 9600, æqualia 200 positionibus igitur res est 48, & tantum habuit m: id est debiti, & dos erit residuum ad 100, scilicet 52, igitur Franciscus habuit 48 aureos debiti, sine ullo capitali uel peculio: & dos eius uxoris fuit 52 aureorum, & secus operando peruenires ad quæstiones difficilimas, ac inextricabiles. Talis modi etiam hæc est.

m: 1 pos.	100 m: 1 pos.
1 q̃d.	10000 p: 1 q̃d.
	m: 200 pos.
differentia 10000 m: 200 pos. æqualis 400	

QVÆSTIO II.

Ego habeo aureos 12 plus Francisco, & cubus meorum est, 1161 aurei plus cubo Franscisci, ponatur 1 res m: Francisco, ego habeo 12 aureos m: 1 positione duc ad cubum partes, fient 1 cubus m: & 1728 p: 36 q̃dratis m: 432 rebus m: 1 cubo, & horum differentia, est 1161, igitur 1 cubus m: p: 422 rebus p: 1161, æquabitur 1728 p: 36 quadratis m: 1 cubo, abijce m: 1 cubum & 1161 ex utraque parte, fient 432 res æq̃les 36 q̃dratis p: 567, quare 2 q̃dratũ p: 15 $\frac{3}{4}$, æq̃lia 12 rebus, igitur res est 1 $\frac{1}{2}$, & hoc habuit m: Franciscus, & ego 10 $\frac{1}{2}$ p: & tot sunt aurei quæsiti

QVÆSTIO III.

Et eodem modo, si dicam etiam sic, aurei mei sunt 12 p: quàm illi Francisci. Et q̃dratum meorum est 128 p: cubo aureorum Francisci dabimus rem unam m: Francisco, ego uerò habeo 12 aureos m: 1 re, & quadratum meorum erit 144 p: 1 quadrato m: 24 rebus, & hoc æquale est m: 1 cubo p: 128, igitur 16 p: 1 quadrato p: 1 cubo, æquatur 24 rebus, Et res erit 4 m: & tantum habet Franciscus debiti, ego uero aureos 8 peculij.

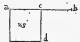
REGVLA II.

Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m: Et dabo exemplum.

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producat 30, aut 40, manifestum est, quod casus seu quæstio est impossibilis, sic tamen operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25 ipsum producendum, ut pote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet residuum m: 15, cuius R̸ addita & detracta à 5, ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: R̸ m: 15, & 5 m: R̸ m: 15.

DEMONSTRATIO.

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit a b linea, quæ dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat esse 40, est autē 40 quadruplum ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius a b, igitur fiat a d, quadratum a c, dimidij a b, & ex a d auferatur quadruplum a b, absque numero, R̸ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex a c, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis R̸ m: 15, id est differentiæ a d, & quadrupli a b, quam adde & minue ex a c, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: R̸ v: 25 m: 40, & 5 m: R̸ v: 25 m: 40, seu 5 p: R̸ m: 15, & 5 m: R̸ m: 15, duc 5 p: R̸ m: 15 in 5 m: R̸ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15 quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamen a d, non est eadem cum natura 40, nec a b, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamen huic quantitati, quæ uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs: operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à R̸ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplum, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratum dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius R̸ minue 5, et adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, R̸ 65 p: 5 & R̸ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed R̸ 260, & hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixit, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: R̸ m: 15
5 m: R̸ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. est 40

QVAESTIO IIII.

Fac de 8 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, hæc soluitur per primam, non per secundā regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit re-

 siduum

ſiduum 16,cuius ℞ 4,adde & minue à 3,dimidio 6,fiunt partes 7,& 1 m:harum quadrata iuncta ſunt 50,& aggregatum eſt 6.

QVAESTIO V.

Per idem ſoluitur quæſtio hæc,fac ex 6 duas partes,quarum una in reliquam ducta,producatur m:40,duc 3 dimidium 6,in ſe,fit 9, adde ad 40,fit 49,huius ℞ quæ eſt 7,adde ad 3, dimidium 6, & minue,habebis 10 p:& 4 m : quæ ducta inuicem producunt 40 m: & iuncta,faciunt 6,& ita 10,m:& 4 p:producunt 40 m:& iuncta, faciunt 6 m:ideo etiam hæc quæſtio,eſt de puro m : & pertinet ad primam regulam.

Ex hoc patet,quod ſi quis dicat,fac de 6 duas partes,ex quarum multiplicatione inuicem,producatur 40, quæſtio eſt de m: ſophiſtico,& pertinet ad ſecundam regulam. Et ſi dicat, fac de 6 duas partes,ex quarum multiplicatione inuicem producatur 40 m : uel ex 6 m:fiant duæ partes producentes m:40,utroq; modo erit quæſtio de m:puro, & pertinebit ad primam regulam, & tales partes erunt quæ dictæ ſunt,& ſi dicat, quod ex 6 m : fiant duæ partes, quarum productum ſit 40 p:quæſtio erit de m:ſophiſtico,& pertinebit ad ſecundam regulam,& erunt partes m:3 p:℞ m:15,& m:3 m: ℞ m:15.

REGVLA III.

Sor^{m}. Poſſumus uerò uenari genus m:aliud, quod neq; eſt purum m: neq; ℞ m:ſed res omnino falſa,& componitur hæc regula quaſi ex ambobus,& dabo huius unum exemplum,quod eſt hoc.

QVAESTIO VI.

Inuenias tres numeros in continua proportione,quorum ℞ primi detracta à primo,facit ſecundum,& ℞ ſecundi,detracta à ſecundo,faciat tertium.Ponemus igitur primum,1 quadratum, & ſecundus erit 1 q̄d.m:1 poſitione, & tertius erit 1 q̄d. m : 1 poſitione m:℞ v: 1 quadrati m:1 poſitione,duc primum in tertium,& ſecundum in ſe,habebis quantitates ipſas, operando ut uides , & productum primi in tertium,eſt m:$\frac{1}{16}$ p:℞ $\frac{1}{64}$,quod eſt $\frac{1}{8}$ m:$\frac{1}{16}$,& tantum fit ducto ſecundo numero in ſe.

$\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$	m: $\frac{1}{4}$ m : ℞ m: $\frac{1}{4}$

Quomodo excidant partes & denominationes multiplicando. CAP. XXXVIII.

REGVLA I.


T ſi hoc & generale ſit, & abundè in libro tertio & quarto demonſtratum,nihilominus denuo ad facilitatē & utilitatem repetendum erit,fit autem hoc duobus modis,to-

tidemq;

tideminꝙ regulis indigemus, quarum prima particularis est, & inuen ta causa capitulorum illorum, quæ postmodum Geometrica ratione, in quatuor denominationibus superiùs à nobis sunt demonstrata, nunc inuentis illis, eius utilitas magna ex parte extincta est, docebimus tamẽ eam ob artis locupletationem, & ingenij eius admirationem, cum etiam ad alia utilis sit, ad quæ transferri commodè potest, quanquam nullo usui generali posit conuenire. Igitur eius regula hæc est. Vel uis numeros differentes, quorum quadratum unius, cum cubo alterius faciant iuncti, numerum: tunc diuides differentiam illam in duas partes, quarum triplum quadrati unius, sit æquale duplo alterius, per positionem, inde inuentis partibus, pones rem, p: parte, cuius sumitur triplum quadrati, pro parte cubanda, & partem quadrandam, rem m: parte, cuius sumitur duplum, inde peracta operatione, peruenies ad cubum, ac quadrata æqualia numero, excidentibus rebus.

QVAESTIO I.

Exemplum. Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 8, & cubus unius, cum alterius quadrato iunctus, faciat 100, fac primo per positionem duas partes, quarum triplum quadrati unius, sit æquale duplo alterius, quas inuenies esse, 2 & 6, nam triplum 4, quadrati 2, est 12, quod est duplum 6 residui, igitur pones partem cubandam positionem p: 2, & quadrandam positionẽ m: 6, iunge cubum 1 positionis, p: 2, cum quadrato 1 positionis m: 6, habes 1 cub. p: 7 quadratis p: 44, æqualia 100, igitur 1 cub. p: 7 quadratis, æquat 56, & rei æstimatio, erit ℞ v: cubica $15\frac{8}{27}$ p: ℞ $72\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cubica $15\frac{8}{27}$ m: ℞ $72\frac{16}{27}$ m: $2\frac{1}{3}$, & quia partes fuerunt, res p: 2, & res m: 6, ideo huic adde 2, & minue 6, habebis partes, ut uides à latere. Est autem manifestum, quod una illarum est m: purum, & si uoluisses ut essent ambæ p: oportuisset ponere, quòd cubus & quadratum talium numerorum æquarentur numero maiori, ut putà 1000, loco 100.

pos. p: 2
pos. m: 6
cu. p: 12 pos. p: 6 q̃d. p: 8
m: 12 pos. p: 1 q̃d. p: 36
cub. p: 7 q̃d. p: 44
æqualis 100

| ℞ v: cub. $15\frac{8}{27}$ p: ℞ $72\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. $15\frac{8}{27}$ m: ℞ $72\frac{16}{27}$ m: $\frac{1}{3}$
| ℞ v: cub. $15\frac{8}{27}$ p: ℞ $72\frac{16}{27}$ p: ℞ v: cub. $15\frac{8}{27}$ m: ℞ $72\frac{16}{27}$ m: $8\frac{1}{3}$

Et eodem modo facies, si uolueris, quod numerorum differentium in aliquo numero, cubus & quadratum differant in assignato numero, eadem regula inuenies partes differentiæ, quibus inuentis, pones econtra, scilicet positionem m: numero, cuius sumitur triplum quadrati, & positionem p: numero, cuius sumitur duplum, inde sequeris operationem, ut in exemplo.

QVAESTIO II.

Inuenias duos numeros, quorum differentia sit 8, & differentia cubi unius, à quadrato alterius, sit 100; facies ex 8 duas partes, ut dictum est, & erunt 2, & 6, pones igitur rem m: 2, & rem p: 6, cuba rem m: 2, & quadrata rem p: 6, & sume differentiam habebis cubum m: 7 quadratis m: 44, æqualem 100, quare cubus æquabitur 7 quadratis p: 144, & rei æstimatio erit ℞ v: cubica $84\frac{10}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica $84\frac{10}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $2\frac{1}{3}$, & quia nos posuimus partes, rem m: 2, & rem p: 6, erunt numeri quæsiti, ut uides.

pos. m: 2
pos. p: 6
cub. p: 12 pos. m: 6 q̄d. m: 8
p: 12 pos. p: 1 q̄d. p: 36
cub. m: 7 q̄d. m: 44
æqualis 100

Et similiter, si dicat, duas fac partes ex aliquo numero, quorum quadratum unius, cum cubo alterius iunctum, faciat aliquem numerum; facies enim duas partes ex numero diuidendo, ut supra; quarum uni, scilicet cuius sumitur triplum quadrati, addes rem, alteri cuius sumitur duplum ipsius, detrahes rem, inde perficies operationem, ut in exemplo.

℞ v: cu. $84\frac{10}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cu. $84\frac{10}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $\frac{1}{3}$
℞ v: cu. $84\frac{10}{27}$ p: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cu. $84\frac{10}{27}$ m: ℞ $7013\frac{1}{3}$ p: $8\frac{1}{3}$

QVAESTIO III.

Fac ex 8 duas partes, quarum cubus unius, cum quadrato alterius, faciat 400, facies ex 8 duas partes, ut prius, quæ erunt 6 & 2, & pones 2 p: re, & 6 m: re, duces 2 p: 1 positione ad cubum, & 6 m: 1 positione ad quadratum, habebis iungendo 1 cub. p: 7 quadratis p: 44, æqualia 400, igitur 1 cub. p: 7 quadratis, æquatur 356, quare rei æstimatio, est ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ p: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: $2\frac{1}{3}$, quare cum partes sint 2 p: 1 positione, & 6 m: 1 positione, ipsæ erunt quales uides, $8\frac{1}{3}$ m: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ p: ℞ $27161\frac{13}{27}$ p: ℞ v: cubica $165\frac{8}{27}$ m: ℞ $27161\frac{13}{27}$ m: $\frac{1}{3}$.

2 p: 1 pos.
6 m: 1 pos.
8 p: 6 q̄d. p: 12 pos. p: 1 cub.
36 p: 1 q̄d. m: 12 pos.
44 p: 7 q̄d. p: 1 cub.
æqualia 400
1 cub. p: 7 quad. æqual. 356

Et si dicat de diuisione numeri assignati, in duas partes, quarum differentia cubi unius à quadrato alterius, sit numero dato ęqualis, tunc semper pones $\frac{1}{3}$ p: 1 positione, pro parte quæ cubari debet, & residuũ numeri diuidendi, detracto $\frac{1}{3}$ m: 1 positione, pro numero in

se

ſe ducendo, inde facta detractione, habebis cubum & res æquales numero, quare erit cognita utraque pars confeſtim.

QVAESTIO IIII.

Exemplum, Diuide 8 in duas partes, quarum cubus unius, excedat quadratum alterius, in 10. Ponemus itaque partem primam $\frac{1}{3}$, & ſecundam $7\frac{2}{3}$, & addemus ad $\frac{1}{3}$, rem, & fiet $\frac{1}{3}$ p: 1 poſitione, & minuemus rem ex $7\frac{2}{3}$, & fiet $7\frac{2}{3}$ m: re, inde ſequemur operationem, & habebimus pro cubo, $\frac{1}{3}$ p: 1 poſitione, hoc, 1 cubo p: 1 quadrato p: $\frac{1}{3}$ poſitionis p: $\frac{1}{27}$, & pro quadrato, 1 quad. m: $15\frac{1}{3}$ poſitionibus p: $58\frac{7}{9}$, horum differentia erit 1 cubus p: $15\frac{2}{3}$ poſitionibus m: $58\frac{20}{27}$ & hoc æquatur 10, igitur cubus & $15\frac{2}{3}$ poſitiones, æquatur $68\frac{20}{27}$, & rei æſtimatio cognita eſt, cui addemus $\frac{1}{3}$ pro prima parte, & minuemus eam à $7\frac{2}{3}$, pro ſecunda parte, & ſi uoluiſſemus, quod quadratum ſuperaſſet cubum, detraxiſſemus 10 numerum æquationis, ex $58\frac{20}{27}$, & haberemus 1 cubum p: $15\frac{2}{3}$ poſitionibus, æqualem $48\frac{20}{27}$, & modi huius primæ regulæ ſunt innumerabiles, & ſunt quaſi pars regulæ de modo.

$\frac{1}{3}$	p:	1 poſ.
$7\frac{2}{3}$	m:	1 poſ.
$\frac{1}{27}$ p: $\frac{1}{3}$ poſ. p: 1 q̃d. p: 1 cu.		
$58\frac{7}{9}$ m: $15\frac{1}{3}$ poſ. p: 1 q̃d.		
$58\frac{20}{27}$	$15\frac{2}{3}$ poſ. p: 1 cub.	

REGVLA II.

Verum alia regula quæ multum apud nos in uſu eſt, & facilior, talis eſt, & etiam exemplis ut reliquæ facilius explicabitur.

QVAESTIO V.

Fac igitur ex 8 duas partes, quarum aſſumptis quadratis ſimul, item cubis ſimul, ductóque uno aggregato per alterum, fiat numerus perfectus, poſſem dicere, quod faceret etiam numerum terminatum, ut 10000, uel alium, datur etiam maximus quem poteſt producere, & eſt 32768, & producitur ex cubo totius, in quadratum totius, datur etiam minimus quo minorem producere non poteſt, & eſt 4096. Videndum eſt igitur primo, an inter hos duos numeros, cadat numerus perfectus, & eſt 8128, qui ſi non caderet, eſſet quæſtio impoſsibilis, pone igitur unam partem 4 m: 1 poſitione, aliam 4 p: 1 poſitione, & fient quadrata, 16 p: 8 poſitionibus p: 1 quadrato, & 16 m: 8 poſitionibus p: 1 quadrato, quæ iuncta erunt 32 p: 2 q̃dratis, excidentibus rebus, cubi etiam erunt, 64 p: 12 quadratis p: 48 poſitionibus p: 1 cubo, & 64 p: 12 quadratis m: 48 poſitionibus m: 1 cubo, qui iuncti, ſunt 128 p: 24 q̃dratis, quare ducemus 32 p: 2 quadratis, in 128 p: 24 quadratis, & fient 4096 p: 1024 quadratis p: 48 q̃d' quadratis, & hæc ſunt æqualia 8128, igitur habebimus, facta

detra-

detractione & diuisione 1 q̃d quadratum p: 21$\frac{1}{3}$ quadratis, æqualia 84, quare res est ℞ v: ℞ 197$\frac{7}{9}$ m: 10$\frac{2}{3}$, partes igitur sunt 4 p: dicta radice & 4 m: dicta radice.

QVAESTIO VI.

Fac de 10 duas partes, quarum radices quadratæ cubicatæ faciant 26, pone quod tales ℞ sint 1 positio, fac ex 1 positione duas partes, quarum quadrata iuncta sint 10, eo quòd radices talium partium debent aggregare 1 positionem, ex regulis igitur sexti libri, uel ex Euclide, habebis partes, ut uides, id est, $\frac{1}{2}$ positionem p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati & $\frac{1}{2}$ positionis m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ quadrati, istæ reducendæ sunt ad cubũ, & quia in cubando Binomium, oportet ducere quamlibet partium in se: & triplare, & addere quadrato alterius partis & productum ducere in illam alteram partem, ideo, cum talia producta assimilentur, & sint æqualia, & unum sit p: aliud m: quando duceremus triplum quadrati primæ partis cum quadrato secundæ in secundam, ideo sufficiet ducere, triplum quadrati secundæ partis, quod est 15 m: $\frac{3}{4}$ quadrati cum quadrato primæ partis, quod est $\frac{1}{4}$ quadrati, & fiet totum 15 m: $\frac{2}{4}$ quadrati, in primam partem quæ est $\frac{1}{2}$ positio, sed quia hęc operatio geminanda est, propter duas partes, habebimus multiplicationem 15 m: $\frac{1}{2}$ quadrati, in 1 positionem, quæ est duplum $\frac{1}{2}$ positionis primæ partis, igitur tandem producentur 15 positiones m: $\frac{1}{2}$ cubi, æqualis 26, quare 1 cubus p: 52, æquabitur 30 positionibus, & rei æstimatio erit ex capitulo suo, ℞ 27 m: 1, inde habebis partes, ut uides, & in uerificatione operationis, multo magis hac regula indiges ad facilitatem, uerum de hoc diximus in tertio libro suo loco.

$\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ q̃d.	℞ 6$\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: ℞ 6$\frac{3}{4}$ m: 2
$\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 5 m: $\frac{1}{4}$ q̃d.	℞ 6$\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: ℞ 6$\frac{3}{4}$ m: 2

QVAESTIO VII.

Et ad hanc reducitur quæstio illa. Quidam emit Croci lib. 1. Cinamoni lib. 2. Piperis lib. 5, precijs inter se eandem seruantibus proportionem sic, ut se habuit precium totius piperis, ad precium cinamomi, sic precium cinamomi, ad precium croci, ita quòd precium croci fuit minimum, & piperis maximum, & cinamomi medium, & hæc tria precia, iuncta simul, fuerunt 6 aurei. Denuo sub eisdem precijs emit croci lib. 30, cinamomi lib. 50, piperis lib. 40, aureis 100, quæritur singulorum precia. Hæc quæstio, à fratre Luca posita est, sed in numeris proportionalibus, nam sic existimat eam admodum difficilem, sed non est, nam cum precia hæc, 5 librarum piperis, & 2 cinamomi, & 1 croci sint proportionalia,

lia, ipſa manebunt etiam proportionalia, in ſuis aggregatis, diuidemus igitur 30 lib. croci per 1, & eſt ſecunda quantitas per primam, & ita 50 cinamomi per 2, & 40 piperis per 5, & exibunt numeri in margine, id eſt

Crocus	Cinamomũ	Piper	Aurei
30	50	40	100
1	2	5	6
30	25	8	100

30 pro croco, 25 pro cinamomo, & 8 pro pipere, manifeſtum eſt igitur quod hi ſunt numeri trium quantitatum analogarum, quæ ſunt precia 1 lib: croci, 2 cinamomi, & 5 piperis, & quod prima quantitas ſeu precium, ſumptum 30 uicibus, & ſecundum 25 uicibus, & tertium 8 uicibus, faciunt 100 aureos, at uero iſtę quantitates, ut dictum eſt, ſunt 6 aurei, ſimpliciter ſumptæ, fac igitur ex 6 tres quantitates proportionales, quarum prima ducta per 30, ſecunda per 25, tertia per 8, faciant 100. Ponemus igitur, mediam 2 poſitiones, relinquentur reliquæ, 3 m: 1 poſitione p: ℞ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 poſitionibus, & 3 m: 1 poſitione m: ℞ v: 9 m: 3 quadratis m: 6 poſitionibus, ducendæ igitur ſunt ſingulæ per ſuos numeros, quia igitur primæ partes Binomiorum ſunt æquales, & ambæ p: tantũ erit ducere eas per 30; & per 8, quantum per 38, & ſimiliter, quia radicum uniuerſalium una eſt m: ducenda per 30, alia p: ducenda per 8, tantum erit, cum ſint æquales, quantum, ſi ducantur per 22, differentiã 30 & 8, & producentur partes, quas uides à latere, & ipſæ erunt æquales 100, iunge & detrahe ſimilia, habebis 14 p: 12 poſitionibus, æqualia ℞ v: illi, quæ eſt m: & ideo quadratum quadrato, id eſt 196 p: 336 poſitionibus p: 144 quadratis, æqualia 4356 m: 1452 quadratis m: 2904 poſitionibus, æqualia partes, habebis 4160 æqualia 1596 quadratis p: 3240 poſitionibus, quare 1 quadrat. p: 2 $\frac{4}{133}$, æquetur 2 $\frac{245}{399}$, eſt igitur rei æſtimatio ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ m: 1 $\frac{2}{133}$, precium igitur unius libræ croci, eſt aurei 4 $\frac{2}{133}$ m: ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$, & precium duarum librarum cinamomi, eſt ℞ 14 $\frac{3862586}{7057911}$ m: 2 $\frac{4}{133}$, & precium quinque librarum piperis, eſt ℞ 3 $\frac{4494602}{7057911}$ p: 1 $\frac{131}{133}$; ſi igitur diuiſeris hæc precia analoga, per ſuarum librarum numerum,

3 m: 1 poſ. p: ℞ v: 9 m: 3 q̃d. m: 6 poſ.
8
3 m: 1 poſ. m: ℞ v: 9 m: 3 q̃d. m: 6 poſ.
30
2 poſ. —— 25 —— 50 poſ.
p: 3 m: 1 poſ. | m: ℞ v: 9 m: 3 q̃d. m: 6 poſ.
38 | 22
114 m: 38 poſ. | m: ℞ v: 4356 m: ℞ 1452 quad. m: 2904 poſ.
114 m: 38 poſ.
50 poſ.
m: ℞ v: 4356 m: 1452 q̃d. m: 2904 poſ. æqualia 100.

rum, referendo singula singulis, primum per 1, secundũ per 2, tertiũ per 5, habebis precia librarũ singularum, uniuscuiusq; generis, & si duxeris ea per duos numeros, in secunda emptione, precium croci per 30, cinamomi per 50, piperis per 40, habebis quantum pecuniarum singulis impenderit.

QVAESTIO VIII.

Eodem modo soluitur quæstio hæc, fac ex 14 tres partes in eadem proportione, quarum maior ducta per 2, media per 3, minor per 4, producta hæc iuncta, faciant 36, peruenies enim per modum superioris, ad 1 quadratum p: $9\frac{1}{3}$ positionibus, æqualia $53\frac{1}{3}$, quare res est ℞ $75\frac{1}{9}$ m: $4\frac{2}{3}$, & est 4, media quantitas, posita media quantitate 1 positione, non ut in priore, 2 positionibus.

QVAESTIO IX.

Diuide 14 in tres partes in continua proportione, ut ducta prima per 2, secunda per 3, talia producta æquentur tertiæ multiplicatæ per 7. Pones secundam, esse 2 positiones, reliquæ erunt ut uides, ducta secunda per 3, fiunt 6 positiones, modo prima habet multiplicari per 2, & tertia per 7, & habent detrahi, igitur cum ambæ partes sint similes, & prima in ambabus sit p: & secunda in prima sit p: & secunda in tertia m: ideo primam partem sufficit multiplicare per differentiam 7 & 2, quæ est 5, & producentur pro tertia parte, 35 m: 5 positionibus, quibus demptis 6 positionibus producto secundæ partis, habebimus 35 m: 11 positionibus, pro differentia tertij & secundi producti, primum autem producetur, ducto 9 aggregato primi & tertij, in radicem uniuersalem, & fit ℞ v: 3969 m: 1134 positionibus m: 243 quadratis, hæc igitur æquatur 35 m: 11 positionibus, quare quadratum quadrato, igitur 1225 m: 770 positionibus p: 121 quadratis, æquantur 3969 m: 1134 positionibus m: 243 quadratis, æqua partes, habebis 2744 æqualia 364 positionibus p: 364 quadratis, quare 1 q̃d. p: una positione æquant̃ $7\frac{7}{13}$, quare rei æstimatio est cognita & eius duplum est pars secunda, scilicet ℞ $31\frac{2}{3}$ m: 1.

2^a	2 pos.
p^a 7 m: 1 pos. p: ℞ v: 49 m: 14 pos. m: 3 quad.	
3^a 7 m: 1 pos. m: ℞ v: 49 m: 14 pos. m: 3 quad.	

QVAESTIO X.

Fac de 8 tres partes quæ sint in continua proportione, ut aggregatum quadratorum primæ & secundæ, triplum sit quadrato secundæ, pones quantitatem mediam 2 positiones, eius quadratum est 4 quadrata, cuius triplum est, aggregatum quadratorum pri-

mæ tertiæ, est autem prima 4 m:1 positione p:℞ v:16 m:8 positionibus m:3 quadratis, & tertia est 4 m:1 positione m:℞ v:16 m:8 positionibus m,3 quadratis, deducendo igitur hæc ad quadrata, uides quod oportet multiplicare ℞ v: in se semel, & partem primã in se semel, & omnia sunt p: quare sufficiet talia producta duplicare, deinde oporteret ducere ℞ v: in primam partem bis, quare cum in una producatur p: in alia m: suppositis, partibus æqualibus, nihil producet, igitur habebimus aggregatum quadratorum 64 m:32 positionibus m:4 quadratis, & hoc est æquale 12 quadratis, triplo quadrati secundæ, igitur 1 quadratum p:2 positionibus æquatur 4, & res est ℞ 5 m:1, & duplum eius, est quantitas media scilicet ℞ 20 m:2, & reliquæ, ut uides, quadratum secundæ est 24 m:℞ 320, quadrata autem primæ & tertiæ, 72 m:℞ 2580 probata est. Sed si diceret, quod quadrata primæ & tertiæ, tripla essent quadratis secundæ & tertiæ, tunc difficulter per hanc regulam soluitur, uerum facilius longe, per primam regulam 39ᵗ capituli, ponendo quantitates 1, 1 positio, & 1 quadratum, habebis 1 q̄d quadratum p: triplum de 1 quadrato p:1, quare res nota est.

4 m:1 pos.	p:℞ v:16 m:8 pos. m:3 quad.
4 m:1 pos.	p:℞ v:16 m:8 pos. m:3 quad.
4 m:1 pos.	m:℞ v:16 m:8 pos. m:3 quad.
4 m:1 pos.	m:℞ v:16 m:8 pos m:3 quad.
32 m:16 pos. p:2 quad.	p: 32 m:16 pos. m:6 q̄d.

p^a 5 m:℞ 5 p:℞ v: 6 m:℞ 20	
3^a 5 m:℞ 5 m:℞ v:6 m:℞ 20	

QVAESTIO XI.

Si dicas, fac ex 8 duas partes, quæ uicissim diuisæ per alterius quadratum, producant iuncta pouenientia 10, pones partes 4 p:1 positione & 4 m:1 positione, & per hanc regulam, peruenies ad capitulum deriuatiuum, q̄d q̄drati & q̄drati & numeri, & est facilis.

QVAESTIO XII.

Inuenias quatuor numeros in continua proportione, quarum aggregatum, primi secundi & quarti, sit 15, & aggregatum primi & tertij & quarti sit 17, tunc dices, igitur cum hęc aggregata differant, per differentiam secundæ & tertiæ, igitur tertia est 2 p: quàm secunda, ponam igitur secundam, 1 positionem m:1, & tertiam 1 positionem p:1, nam sic differentia illarum erit 2, relinquetur igitur aggregatum primæ & quartæ 16 m:1 positione, duc secundam in tertiam, fit 1 q̄d. m:1, fac ex 16 m:1 positione duas partes, ex quarum multiplicatione inuicem, producantur 1 quadratum m,1, & erunt partes

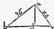
ut uides, quia igitur proportio quartę ad tertiam, est ut secundæ ad primã, ex constituto, quia productum secundæ in ter

8 m: $\frac{1}{2}$ pos. p: ℞ v: 65 m: 8 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.	4^a
8 m: $\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v: 65 m: 8 pos. m: $\frac{3}{4}$ q̄d.	p^a
1 pos. p: 1	3^a
1 pos. m: 1	2^a
2 cub. p: 6 pos.	

tiam, æquale est producto primæ in quartam, sufficiet ad demonstrandum, quòd sint in continua proportione, quod cubi secundæ & tertiæ iuncti æquales sint, productis quantitatum quartæ & primæ, in sua quadrata mutuo, at tales cubi, fiunt solum ex multiplicatione tripli quadrati secundæ partis, cum quadrato primæ, in ipsam primam, eo quod reliqua multiplicatio tripli quadrati primę partis, cum quadrato secundæ in ipsam secundam, excidit, eo quod in una est p: in alia m: igitur habemus cubos iunctos, 2 cub. p: 6 positionibus, & tantùm debet fieri ex multiplicatione quadratorum primæ & quartę quantitatis, in ipsas quantitates uicissim, hoc autẽ ut demonstratum est, æquale est ductui unius quantitatis in alteram, multiplicato in aggregatum ipsarum quantitatum, ex dictis in sexto libro, duc igitur quantitates inuicem, & quia ℞ v: sunt similes, multiplicatio in crucem nulla erit, quare sufficiet quadrare utramq; partem, & minuere unam ab altera, quia m: in p: facit m: producentur igitur à partibus similibus 1 q̄d. m: 1, aggregatum etiam radicum est 16 m: 1 positio, eo quod ℞ v: excidunt, igitur productum erit 16 quadrata m: 1 cubo p: 1 positione m: 16, & hoc æquatur 2 cubis p: 6 positionibus, igitur 3 cubi p: 5 positionibus p: 16, æquantur 16 quadratis, quare res est in capitulo, uides autem quoniam inextricabilis quæstio ad magnam reducitur facilitatem, & posset reduci ad regulam de modo, nam ubi differentia est 2 semper 3 cubi p: 5 positionibus, p: numero medio inter duo aggregata per æquidistantiam, æquantur totidem quadratis, quotus est numerus.

QVAESTIO XIII.

Est trigonus a b c orthogonius, & eius perpendicularis ad basim a d, cuius latus a b, cum b d, est 36, & a c cum c d, est 24, quæritur area, pone b c 1 positionem, erit igitur quadratum b c 1 quad. & ideo cum a b & b d, sint 36, & rursus a c & c d, 24, erunt omnia latera trigoni 60, quare a b & b c, erũt 60 m: 1 positione, oportet igitur ex a b & a c, facere duas partes, quarum quadrata iuncta sint æqualia quadrato b c, per 47 primi Elementorum Euclidis, quare ex regulis sexti libri nostri, diuide 60



de 60 m:1 positione per æqualia, fit 30 m:$\frac{1}{2}$ positiones, duc in se, fit 900 m:30 positionibus p:$\frac{1}{4}$ quadrati, detrahe ex dimidio quadratu b c, relinquitur $\frac{1}{4}$ quadrati p:30 positionibus m:900, cuius ℞, addita & detracta, à dimidio aggregati a b, & a c, ostendit partes, est igitur a b 30 m:$\frac{1}{2}$ positionis p:℞ v:$\frac{1}{4}$ quadrati p:30 positionibus m:900, & a c 30 m:$\frac{1}{2}$ positionis m:℞ v:$\frac{1}{4}$ quadrati p:30 positionibus m:900, quare si detrahatur a b ex aggregato a b & b d, relinquetur b d 6 p:$\frac{1}{2}$ positionis m:℞ v:$\frac{1}{4}$ quadrati p,30 positionibus m:900, & similiter, detracta a c, ex aggregato a c & c d, relinquitur c d, $\frac{1}{2}$ positionis m:6 p:℞ v:$\frac{1}{4}$ quadrati p:30 positionibus m:900, est autem manifestum ex demonstratione 47ª, primi Elementorum Euclid. quod differentia quadrati a b, à quadrato a c, æqualis est differentiæ quadrati b d, á quadrato c d, differentia autem duarũ quantitatum, est semper in partibus dissimilibus, nam quæ similes sunt, nullam producunt differentiam, quare cum quadrata partium constent ex nouem multiplicationibus, quarum tres sunt quadrata partium, erunt illæ tres omnino similes, cõparando a b ad a c, & b d ad c d, & similiter multiplicationes duæ 30 in $\frac{1}{2}$ positionis, sunt communes a b & a c, cum utræq; producant m: & ita in b d & c d, cõmunes sunt multiplicationes, 6 in ℞ v: nam utrinq; prouenit idẽ m: differentia igitur a b & a c, ex parte a b, est multiplicatio 30 in ℞ v: & ex parte a c, multiplicatio $\frac{1}{2}$ positionis in ℞ v: quare differentia q̃dratorum a b, & a c, est illud quorum ℞ v:225 quadratorũ p,2700 positionibus m:810000, excedit ℞ v:$\frac{1}{16}$ q̃d' quadrati p:7$\frac{1}{7}$ cubis m:225 quadratis, eadem est ratione differentia b d & c d quadratorum, est qua 3 positiones excedunt ℞ v:$\frac{1}{16}$ q̃d' q̃drati p:7$\frac{1}{2}$ cubis m:

a b 30 m:$\frac{1}{2}$ pos. p:℞ v:$\frac{1}{4}$ q̃d. p:30 pos. m:900
a c 30 m:$\frac{1}{2}$ pos. m:℞ v:$\frac{1}{4}$ q̃d. p:30 pos. m:900
b d $\frac{1}{2}$ pos. p:6 m:℞ v:$\frac{1}{4}$ q̃d. p:30 pos. m:900
c d $\frac{1}{2}$ pos. m:6 p:℞ v:$\frac{1}{4}$ q̃d. p:30 pos. m:900

---

pars q̃d. a b dissim. ℞ v:225 q̃d. p:27000 pos. m:810000
pars q̃d. a c dissim. ℞ v $\frac{1}{16}$ q̃d' q̃d. p:7$\frac{1}{2}$ cub. m:225 q̃d.
pars q̃d. b d 3 pos.
pars q̃d. c d ℞ v:$\frac{1}{16}$ q̃d' q̃d. p:7$\frac{1}{2}$ cub. m:225 q̃d.

---

225 quadratis, oportuisset aũt complendo operationẽ, omnia quadruplicare, sed hoc uitauimus, quia si q̃druplũ est æquale q̃druplo, igitur & simplum simplo, hæ igitur differentiæ æquales supponuntur, & radices v: etiam sunt idẽ, igitur ex communi sententia, 3 positiones

ſitiones æquantur illi ℞ v: primæ, id eſt, ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, igitur 216 quadrata p: 27000 poſitionibus æquantur 810000, & 1 quad. p: 125 poſitionibus, æquabitur 3750, & res erit ℞ $7656\frac{1}{4}$ m: $62\frac{1}{2}$, quod eſt 25, & tanta fuit b c, unde habes alias.

Qvaestio XIIII.

Rurſus diſponatur trigonus a b c, orthogoniua, cum perpendiculari a d, & ſint a b cum c d 29, & a c cum b d 31, quæritur area, ponemus b c poſitionem, & erunt rurſus a b a c eadem, ut in ſuperiore quæſtione, ſed caue, ne maius latus ponas ex parte maioris numeri, ut in priori, detrahe igitur a b ex 29, & a c ex 31, & habebis quantitates, ut uides, differentia igitur quadratorum a b & a c, æqualis eſt differentiæ quadratorum b d & c d, eſt autem differentia quadratorum a b & a c, ut prius, at differentia quadratorum b d & c d, eſt ut uides, ſumpta eodem modo ut in priori quæſtione, ſed eſt ſuperatio abſoluta, non autem mutua, ut in priori quæſtione, quia igitur quadratum a b, excedit quadratum a c in differentia quadrati b d, ad quadratum c d, erit differentia quadratorum b d & c d, addita quadrato a c conſtituens quadratum a b, quare ℞ v: 225 quadratorum p: 27000 poſitionibus m: 810000, æquabitur $\frac{1}{2}$ poſitionis p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ quad. quadrati p: 30 cubis m: 900 quadratis, nam hæc ℞ v: eſt aggregatum ex ℞ v: differentiæ quadratorum b d & c d, & partis quadrati a c, in qua ſuperat quadratum a b, quare ducendo partes in ſe, habebimus $675\frac{1}{4}$ quadrata p: 27000 poſitionibus m: $\frac{1}{4}$ quad. quadrati m: 30 cubis m: 810000, æqualia ℞ v: 225 q̃d. q̃dratorum p: 27000 cubis m: 810000 q̃dratis, & cum duxeris partes in ſe, peruenies ad quantitatem cuius non eſt nota æſti-

a b 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 poſ. m: 900
a c 30 m: $\frac{1}{2}$ poſ. m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 poſ. m: 900
b d $\frac{1}{2}$ poſ. p: 1 p: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 poſ. m: 900
c d $\frac{1}{2}$ poſ. m: 1 m: ℞ v: $\frac{1}{4}$ q̃d. p: 30 poſ. m: 900

---

pars q̃d. a b diſsim. ℞ v: 225 q̃d. p: 27000 poſ. m: 810000
pars q̃d. a c diſsim. ℞ v $\frac{1}{16}$ q̃d. q̃d. p: $7\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̃d.
pars q̃d. b d qua ſuperat quadratum c d eſt $\frac{11}{2}$
poſ. p: ℞ v: $\frac{17}{16}$ q̃d. q̃d. p: $7\frac{1}{2}$ cub. m: 225 q̃d.

---

matio, quare alia regula indigebis aut generali aut ſpeciali. Volui tamen, ut intelligeres facilitatem operandi in hoc, & quæſtionẽ ualde difficlem, niſi Geometrico auxilio diſſoluatur, manifeſtũ eſt enim quod

quod b c est 25, ut in priore quæstione, uerum generalis debet esse solutio, latera igitur trigoni b c 25, a b 20, a c 15, a d 12, b d 16, c d 9, area igitur eius est 150.

De regula qua pluribus positionibus inuenimus ignotam quantitatem, CAP. XXXIX.

REGVLA I.

HÆc regula similis est regulæ de medio, est autem talis, Constitue quantitates totidem in denominationibus liberis, quotus est numerus quærendarum, inde inuenies proportionem, qua inuenta, denuo pones res sub numero quantitatum inuentarum, utque propositum est, perfice operationem, & habebis æquationem, qua habita, habebis rei æstimationem.

QVAESTIO I.

Exemplum. Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum quadratum primi sit æquale secundo & tertio, & quadratum tertij sit æquale quadratis primi & secundi, quia igitur quadratum tertij æquale est quadratis secundi & primi, ipsum sit 1 q̈d. quadratum, æquale 1 quadrato p: 1, quare res, seu proportio, est ℞ v ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, igitur ponemus res 1, & ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, quadratum igitur primæ quantitatis, quod est 1 quadratum, æquatur secundæ & tertiæ, scilicet totidem rebus, igitur rei æstimatio, est aggregatum ex secunda & tertia quia diuidere aliquid per unitatem, qui est numerus quadratorum, est non diuidere, igitur rei æstimatio est, ℞ $1\frac{1}{4}$ p. $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & secunda quantitas, est quod producitur ex hac, in ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia habebitur, ducendo rem quam habes in ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$.

1	1 pos.	1 quad.	
1	1 quad.	1 q̈d quad.	

QVAESTIO II.

Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum tertius sit æqualis secundo & primo, & quadratum primi, sit æquale aggregato secundi & tertij, pones primum quadratū, secundum rem, tertium unitatem, & quia tertius, æqualis est secundo & primo, igitur 1 quadratum, æquatur 1 rei p: 1, & proportio erit ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, partes igitur erunt, 1 positio, & positiones ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & positiones $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$, & quia quadratum primi æquale est aggregato secundi & tertij, igitur 1 quadratum æquatur positionibus ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$ p: $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$, quare rei æstimatio erit ℞ 5 p: 2, & partes ut uides.

℞ 5	p:	2
$3\frac{1}{2}$	p: ℞ $11\frac{1}{4}$	
℞ $31\frac{1}{4}$	p: $5\frac{1}{2}$	

QVAE-

QVAESTIO III.

Inuenias quatuor quantitates in continua proportione, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ, & secundæ, & quantitates iunctæ simul, faciant 10, capiam 1, rem, quadratum & cubum, igitur q̄d cubus æquatur 1 quadrato p:1, quare res ualet ex capitulo deriuatiuorum, ℞ v^m: ℞ v: cubicæ $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$, igitur posita prima unitate, hæc est secunda quantitas, & tertia erit quadratum huius, scilicet ℞ v cubica $\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{23}{108}$ p: ℞ v: cubica $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{23}{108}$; quarta erit cubus secundæ seu proportionis, inde iunctis quatuor quantitatibus scilicet unitate, re, quadrato, & cubo, & diuiso 10 per aggregatum, exibit prima quantitas, qua ducta in rem habebimus secundam, hac denuo ducta in rem, habebimus tertiam, qua ducta per rem, habebimus quartam.

1	1 pos.	1 quad.	1 cub.
1		1 quad. —	1 cub' q̄d.

QVAESTIO IIII.

Inuenias quatuor quantitates in continua proportione, quarum quadratum quartæ, æquale sit quadratis primæ & tertiæ, & aggregatum earum sit 10, capiam ut in præcedente 1, rem, quadratum cubum, erit igitur cū quadratum æqualis q̄d quadrato p:1, quare ex capitulo deriuatiuorum, rei æstimatio est ℞ v^m: ℞ v: cubicæ $\frac{29}{54}$ p: ℞ $\frac{31}{108}$ p: $\frac{1}{3}$ p: ℞ v: cubica $\frac{29}{54}$ m: ℞ $\frac{31}{108}$, & huius quadratum, quod est, idem, abiecta ℞ v^m: est tertia quantitas, inde ductis inuicem secunda & tertia, uel secunda ad suum cubum, uel tertia ad quadratum, & addita unitate consurgit quarta, quibus quatuor quantitatibus iunctis, si per eas diuiseris 10, habebis primam quæsitarum, qua ducta per secundam, & tertiam, & quartam, præcedentium, habebis secundam & tertiam & quartam quantitatem quas quærebas.

REGVLA II.

Alia est regula nobilior præcedente, & est Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes æstimationes fermè capitulorum q̄d quadrati & quadrati rerum, & numeri, uel q̄d quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modo ut uides.

1 q̄d quad. æquale quad. rebus & numero
2 q̄d quad. æquale q̄d. cubis & numero
3 q̄d quad. æquale cubis & numero
4 q̄d quad. æquale rebus & numero
5 q̄d quad. æquale rebus & numero
6 q̄d quad. cum rebus æqualia quad. & numero

7 q̄d' q̄d. cum cubis æqualia numero
8 q̄d' q̄d. cum rebus æqualia numero
9 q̄d' q̄d. cum q̄d. æqualia cub. & numero
10 q̄d' q̄d. cum q̄d. æqualia rebus & numero
11 q̄d' q̄d. cum q̄d. & rebus æqualia numero
12 q̄d' q̄d. cum q̄d. & cubis æqualia numero
13 q̄d' q̄d. cum q̄d. & numero æqualia cubis
14 q̄d' quad. cum quad. & numero æqualia rebus
15 q̄d' quad. cum numero æqualia cubis & quad.
16 q̄d' quad. cum numero æqualia cubis
17 q̄d' quad. cum numero æqualia rebus & quad.
18 q̄d' quad. cum numero æqualia rebus
19 q̄d' quad. cum cubis & numero æqualia quad.
20 q̄d' quad. cum rebus & numero æqualia quad.

In his igitur omnibus capitulis, quæ quidem sunt generalissima, ut reliqua omnia sexaginta septem superiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut septimum ad quartum, & secundum ad primum, deinde quæremus demonstrationem hoc modo.

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum a f, diuisum in duo quadrata a d & d f, & duo supplementa d c & d e, & uelim addere gnomonem k f g circuncirca, ut remaneat quadratum totum a h, dico quod talis gnomo constabit ex duplo g c additæ lineæ, in c a, cum quadrato g c, nam f g constat ex g c in c f, ex diffinitione data in initio secundi Elementorum, & c f est æqualis c a, ex diffinitione quadrati, & quia per 44 primi Elementorum, k f est æqualis f g, igitur duæ superficies g f & f k, constant ex g c, in duplum c a, & quadratum g c est f h, per cor^m 4 secundi Elementorum, igitur patet propositum, si igitur a d sit 1 q̄d' quadratum & c d ac d e, 3 quadrata, & d f 9, erunt b a 1 quadratum, & b c 3 necessario. cum igitur uoluerimus addere quadrata aliqua, ad d c & d e, & fuerint c l & k m erit ad conplendum quadratum totum necessaria superficies l n m, quæ ut demonstratum est, constat ex quadrato g c numeri quadratorum

torum dimidiati, nam c l est superficies ex g c in a b, ut ostensum est, & a b est 1 quadratum, quia ponimus, a d 1 q̄d quadratum, sl uerò & m n, fiunt ex g c in c b, ex 42ª primi Elementorum, quare superficies l n m, & est numerus addendus, fit ex g c in duplum c b, id est in numerum quadratorum, qui fuit 6, & g c in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

4 Hoc peracto, semper reduces partem q̄d quadrati ad ℞, id est addendo tantum utrique parti, ut 1 q̄d quadratum cum quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ sint plus, in ambabus æquationibus, nam secus, trinomium seu Binomium redactum ad trinomium, necessariò careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciat trinomium habens ℞ quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utrique parti, quo habito, ab utroque extrahes ℞ quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p: numero, uel m: numero, ex alia, 1 positio uel plures p: numero, uel m: numero, uel numerus m: positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propositum.

QVAESTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes in continua ꝓportione, ex quarum ductu primæ in secundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solui non posse, ego uerò dicebam, eam posse solui, modū tn̄ ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 positionem, prima erit $\frac{6}{1\ pos.}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, q̄re hæc æq̄ntur 10, ducendo omnia in 6 positiones, habebimus 60 positiones, ęq̄les 1 q̄d q̄drato p: 6 quadratis p: 36, adde ex quinta regula, 6 quadrata utrique parti, habebis 1 q̄d q̄dratum p: 12 q̄dratis p: 36, ęqualia 6 q̄dratis p: 90 positionibus, nam si æqualibus æq̄lia addātur, tota fient æqualia, habent autem 1 q̄d quadratum p: 12 q̄dratis p: 36, radicem & est, 1 quadratū p: 6, quam si haberent 6 quadrata p: 60 positionibꝰ iam haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati & numerus idem ex utraque parte, ut in priore relinq̄tur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, sit igitur numerus q̄dratorum

1 q̄d quad. p: 6 quad. p: 36	æqualia 60 pos.
6 quad.	6 quad.
1 q̄d q̄d. p: 12 q̄d. p: 36	æq̄lia 6 q̄d. p: 60 pos.
2 pos.	1 q̄d. p: 12 pos.

torum 1 positio, & quia ut uides in figura tertiæ regulæ, c l & m k, fiunt ex duplo g c in a b, & g c est 1 positio, ponam numerum quadratorum addendorũ semper 2 positiones, id est duplũ g c, & quia numerus addendus ad 36, est l n m, & ideo quadratum g c cum eo quod fit ex g c duplicato in c b, seu ex g c in duplum c b, & est 12, numerus quadratorum priorum, ducam igitur 1 positionem, dimidium numeri quadratorum additorum, semper in numerũ quadratorum priorum, & in se, & fient 1 quadratum p: 12 positionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 positiones pro numero quadratorũ, habemus igitur iterum ex communi animi sententia, quantitates infrà scriptas, inuicem æquales, & utraque habent radicem, prima ex regula tertia, sed secunda quantitas ex supposito, igitur ducta prima partε trinomij in tertiam, fit quadratũ dimidiæ partis secundæ trinomij, quia igitur ex dimidio secundæ in se, fiunt 900, quadrata, & ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 positionibus quadratorum, similiter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuisa, producunt æqualia, ut 2 cu. p: 30 quadratis p: 72 positionibus æquantur 900, quare 1 cubus p: 15 quadratis p: 36 positionibus æquantur 450.

1 q̃d quad. po 2 pos. p, 12. q̃d ℞ p: q̃d. p: 12 pos. additi numeri p: 36 æqualia
2 pos. p: 6 quadrato. p: 60 pos p: 1 q̃d. p: 12 pos. numeri additi.

Sufficit igitur deducendo ad regulam, habere semper 1 cubum p: numero priorum quadratorum, addita ei quarta parte p: numero positionũ tali, qualis est numerus ęquationis primus, ut si haberimus 1 q̃d q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p, 60 positionibus, habebimus 1 cubum p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, dimidio quadrati dimidij numeri positionum, & si haberemus 1 q̃d q̃dratum p: 16 quadratis p: 64 æqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 20 quadratis p: 94 positionibus æqualia 800, & si haberemus 1 q̃d q̃dratum p: 20 quadratis p: 100, ęqualia 80 positionibus, haberemus 1 cubum p: 25 quadratis p: 100 positionibus æqualia 800, igitur hoc habito, in priore exemplo habuimus, 1 cub. p: 15 quadratis p: 36 positionibus æqualia 450, igitur rei ęstimatio, per 17^m capitulũ, est ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$, m, ℞ $80449\frac{1}{4}$ m: 5, hic igitur est numerus quadratorum, qui duplicatus, est addendus ex utraque parte, quia supponuntur 2 res addendæ, & numerus adendus ex utraque parte, ex demonstratione, est quadratum huius, cum eo quod fit ex hoc in 12, numerum quadratorum, manifestum est autem, quod ℞ quadrata primi aggregati, semper est 1 quadratum p: dimidio numeri quadra-

 torum,

torum, absq; alio, seu p:1 pos.p: dimidio prioris numeri quadratorũ uelut 1 q̃d q̃d. p:6 quad. p:9 est 144 & 1 q̃d q̃d.p:2 pos, p:6 q̃drato rum p:1 q̃d.p:6 pos.numeri assumpti p:9 est ęq̃le 225 ℞ est 1 q̃d.p: 1 pos.numeri assumpti p:3. Est aũt 1 pos.p:3 dimidium 2 pos.p:6 numeri quadratorum & ideo cum positio sit alterius generis à quadrato, oportet inuenire prius æstimationẽ eius & est numerus simplex addendus ut in præsenti exemplo erit ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p:1, & hoc quia dimidiũ prioris numeri quadratorum fuit 6, & in addito trinomio fuit m:5, igitur totum fuit, ut dixi, uerum reliqua pars, fuit quadrata 6 p: duplo huius numeri, igitur fuit numerus q̃dratorum ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148752 m:4, & numerus rerum ex supposito fuit 60, & numerus est (ut ostensum est) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipsius quantitatis, uerum quia ex supposito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiso 900 quadrato dimidij numeri rerum, per numerum quadratorum, exibit numerus, quantitates igitur sunt hæ, ut uides, & quia latus a g est compositũ ex lateribus duorum quadratorũ a d & d h dimissis supple-

quadrata ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m, ℞ 5148752 m: 4
res 60

900
numerus ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148452 m:4

mentis, erunt ℞ primæ & tertię harũ quantitatum iunctæ inuicem, ℞ v: totius aggregati, quare ℞ primæ & tertiæ quãtitatis, æquantur 1 q̃drato p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p:1, sed ℞ pimæ q̃ntitatis, est numerus rerum, quia est ℞ totidem quadratorum, & ℞ tertiæ quantitatis est numerus, quia tertia quantitas est numerus, habemus igitur 1 quadratum p: numero, æqualia rebus & num ero, minue minorem numerũ de maiore, accipiendo ℞, id est accipiendo ℞ denominatoris & numeratoris, habebis 1 q̃dratum p: hoc numero toto m: numero infra scripto æq̃lia numero rerũ, huic scilicet, ℞ uniuersalissima ℞ v: cubicę 2300 p: ℞ v: cu. $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v cu. $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p:4

30

℞ v: ma ℞ v: c. 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cu. 2300 m: ℞ 5148752 m:4 ℞ 5148452 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148552 m: 4, necrefert, quod numerus ille sit compootus ex p: & m: nam tanum refert dicere, 1 qua-

quadratum p,8, æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum p: 10 m: 2, equatur 6 rebus, sequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in se, & auferendo numerum æquationis inde residui sumendo ℞ generalem, quam addes dimidio numeri rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum anologarum quæsitarum.

QVÆSTIO VI.

Inuenias numerum, qui sit æqualis radici suæ quadratæ, & duabus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur si talis numerus fuerit cu' quadratum, radix sua quadrata necessariò est 1 cubus, & duæ radices cubicę sunt 2 quad. igitur 1 cu' quadratum, ęquabitur 1 cubo p: 2 quadratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit 1 q̄d' quadratum ęquale 1 positioni p: 2, posui autem 2 radicibus cubicis, quia cum regula sit generalis, hoc tamen modo dupliciter solui potest, ut patebit. Namq; si 1 q̄d' quadratum æquatur 1 positioni p: 2, igitur 1 q̄d' quadratum m: 1 æquabitur 1 positioni p: 1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 positionem p: 1, communem diuisorem, habebis 1 cubum m: 1 quadrato p: 1 positione m: 1, ęqualia 1, igitur 1 cubus p: 1 positione, æquatur 1 quadrato p: 2, igitur ex 18° capitulo, rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: ℞ v: cub. ℞ $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cu' quadratum huius est numerus quæsitus, cuius ℞ quadrata, & 2 radices cubicę sunt illi ęquales, & tales radices sunt duplum quadrati huis quantitatis cum suo cubo.

1 q̄d' quad. m:	1
1 pos. p:	1
1 pos. p:	1
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 pos. m: 1	
	1

At regula generali sic faciemus quia enim 1 q̄d' quadratum æquatur 1 positioni p: 2, addemus ad utramq; partē 2 positiones q̄dratorum, cui subscripsimus q̄d. ut intelligas nō esse ex genere priorū denominationū, sed esse positiones q̄dratorum, igitur numerus addendus, est 1 quadratum numeri q̄dratorum, & hoc est, ut in tertia regula huius capituli, quadratum d f, nā hic additio supplementorū est ut d c, a c, d e, ad quadratū simplex a d, igitur sufficit addere quadratū d f, absque additione superficierum f l & m n, quæ erant necessariæ in exemplo quintæ quæstionis, quia

1 q̄d' q̄d. p: 2 pos. p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
2 pos. p: 1 pos. p: 2 p: 1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.

$\frac{1}{4}$ quad. 4 pos. p: 2 cub.
numeri quad.

[illegible] æquatur 2 cu. p: 4 pos.
[illegible] æquatur 1 cu. p: 2 pos.

igitur additis 2 positionibus p:1 q̃drato numeri quadratorum, ad 1 positionem p:2, fit totum 2 positiones numeri q̃dratorum p:1 pos. p:2, p:1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, oportet ut quadratum dimidij mediæ quãtitatis, quæ est 1 positio, ęquetur ductui extremorum, igitur $\frac{1}{4}$ quadrati, ęquabitur quadrato, 2 cuborum p:4 positionibus numeri prioris, quare abiectis quadratis utrinque, fiet $\frac{1}{4}$ æqualis 2 cubis p:4 positionibus, & $\frac{1}{8}$ æqualis 1 cubo p:2 positionibus, quare rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, hic igitur est numerus quadratorũ addendus utrique parti, & duplicatur, & quadratum huius erit numerus addendus ad utramque partem, & gratia clarioris intelligentię apposui hic.

Prima 1 q̃d q̃d. p: q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: 1 $\frac{1}{3}$.

Secunda q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: 1 pos. p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$.

Manifestum est igitur, quod ℞ primi, est 1 quad. p: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m $\frac{1}{16}$, & radix secundi, est res ℞ G. i. generalis ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞ v^{ma} ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ & hoc, ut dixi, quia latus a d q̃drati, cõponitur ex a b & b c, lateribus q̃dratorum extremorum, absque commemoratione supplemendorum. Manifestum est etiam, quod numerus, qui est cum 1 q̃d. est minor numero qui est cum rebus, igitur habebimus 1 q̃dratum æquale rebus ℞ G ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{32}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero, hoc ℞ G ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$. Quare ducemus dimidium numeri rerum in se, & est, ut ducamus totum in se, & fit idem, dempta ℞ v^{ma}, deinde accipiemus quartam partem producti, & est dimidium ultimæ ℞ v: quæ est m: supra positæ, ideo addita, relinquetur numerus totus compositus ℞ v^{ma} ℞ cub. v: $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cub. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, & radix huius totius G, addita dimidio numeri rerum, id est huic numero ℞ v^{ma} ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, constituit rem.

Et si dixisset, quod numerus propositus æquaretur radici quadratæ & cubicæ pariter acceptis, non potuisset solui, nisi hoc secundo modo, per regulam generalem. Deducere autem æstimationes æquales ad idem, ut primam æstimationem ad secundam, iam te docui in libro quantitatum alogarum, quamuis sit difficillima operatio, & ideo complementum in his operationibus, est quasi extremum, ad quod peruenit perfectio humani intellectus, uel potius imaginationis, in hoc enim cognosces illorum differentiam.

QVAE-

QVÆSTIO VII.

Si quis igitur dicat, inuenias numerum qui ductus in ℞ cubicam suam p:6, faciat 64, dices igitur, posito eo numero 1 cubo, habebimus 1 q̄d quadratum p: 6 cubis æqualia 64, quare per septimam transmutandi regulam septimi capituli huius habebimus 1 q̄d q̄d. æquale 6 rebus p:4, unde habita æstimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiusdem capituli, habebimus intentum. Et quibusdam adeò uidebuntur difficiles hę operationes, ut uix eas ueras esse credant, nos autem ostendimus modum, q̄ quantitates istę alogæ æquiualentes numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonstrationem utramque, & Geometricam à causa, & Arithmeticam ab effectu.

QVÆSTIO VIII.

Fac ex 6 tres partes in continua proportione, quarum quadrata primę & secundę iuncta simul faciant 4, ponemus primam 1 positionem, quadratum eius est 1 quadratum, residuum igitur ad 4, est quadratum secundæ quantitatis, id est 4 m:1 quadrato, huius radicem, & 1 positionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta prima in tertiam, habebis 6 positiones m:1 quadrato m:℞ v: 4 quadratorū m:1 q̄d quadrato ęqualia 4 m:1 q̄d

1 pos. | v:℞ 4 m:1 q̄d. | 6 m:1 pos.m: ℞ v:4 m:1 q̄d.
6 pos.m:1 quad.m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d quad.

4 | 6 pos.m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d quad.
6 pos m:4 æqual. ℞ v:4 quad.m:1 q̄d quad.
36 quad.p:16 m:48 pos. æquantur
4 quad.m:1 q̄d quad.

32 quad. p:16 p:1 q̄d quad. æqualia 48 pos.

1 q̄d quad.p:32 quad.p:256 æqualia 48
pos.p:240

quadrato secundæ, abijce 1 quadratum m: ex partibus, habebis 4 ęqualia 6 positionibus m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d quadrato, quare 6 positiones m:4 æquantur ℞ v:4 quadratorū m:1 q̄d quadrato quare quadrata horū etiam æqualia sunt, à quibus abijce 4 quadrata cōmunia, ex utraq; parte, habebis tandē 32 quadrata p:16 p:1 q̄d quadrato, æqualia 48 positionibus, quare addendo 240 utriq; parti, id est residuum quadrati dimidij numeri quadratorum, habebis 1 q̄d quadratum p:32 quadratis p:156, æqualia 48 positionibus p:240, addas igitur 2 positiones quadratorum p:1 quadrato p:32 positionibus numeri quadratorum utrique parti, prima igitur pars habet radicem necessariò, & quia uolumus secundam etiam habere, quæ est 2 positiones quadratorum p:48 positionibus, ex priori-

bus

bus p:1 quadrato p:32 positionibus numeri quadratorum p:240, ducemus primam partem trinomij in tertiam ut uides, et dimidium secundæ in se, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p:64 quadratis p:480 pos. quadratorum igitur 288 æquantur 1 cubo p:32 quadratis, p: pos. 240, quare per 17 capitulũ huius, habebimus

576 | quad.
2 pos. p:48 pos. p:1 quad. p:32 pos. p:240
quad. numeri quad.
2 cub. p:64 quad. p:480 pos. | q̃d.

1 cubum æqualem 101 $\frac{1}{3}$ rerum p:420 $\frac{10}{27}$, inde habita huius æstimatione per suum capitulum, minue 10 $\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, per 17 cap. & consurgit rei fictæ æstimatio, habebis igitur 1 quadratum p:16 p: dicta æstimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ sunt ℞ dupli æstimationis inuentæ p:℞ aggregati ex quadrato dictæ æstimationis, & eadem æstimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc autem ut liquet, est minus priore numero, quia si loco 240 adderentur 256, essent æquales, igitur 1 quadratum p: æstimatione inuenta p:16 m:℞ V: illa trium quantitatum, id est quadrati æstimationis cum eadem ducta per 32, & cum 240 tanquam uno numero, æquantur rebus quæ sunt secundum radicem dupli æstimationis inuentæ, quod est propositum.

QVAESTIO IX.

Inuenias numerum, cuius q̃d quadratum, cum quadruplo sui, & 8 æquetur decuplo sui quadrati, dicemus igitur 1 q̃d quadratum p: 4 pos. p:8, æquatur 10 quadratis. Quare semper positiones dabimus quadratis, & auferemus à q̃d quadrato, & habebimus 1 q̃d quadratum p: 8, æquale 20 quadratis m:4 positionibus, & quia uidemus numerum quadratorum esse magnum, & rerum paruum, ideo conabimur minuere numerum quadratorum potius, quàm augere, & faciemus ut diminutio sit ex utraque parte 2 quad. nam à minori imò à 2 quadratis semper fermè est incipiendum, quia non oportet ut uenias ad m: q̃d. ex parte rerum, quia sic non haberent radicẽ, subductis igitur 2 quadratis ex utraque parte,

1 q̃d quad. p:4 pos. p:8
10 quad.

1 q̃d q̃d. p:8 | 10 q̃d. m:4 pos.

1 quad quad. m:2 quad. p:8
8 quad. m:4 pos.

1 quad quad. m:2 quad. p:1
8 quad. m:4 pos. m:7

2 pos. | quad. p:2 pos.

1 quad quad. m:2 pos. m:2
quad. p:1 quad. p:2 pos. p:1
8 quad. m:2 pos. quad. m:4
pos. p:1 quad. p:2 pos. m:7

habebis

habebis 1 quad quadratum m: 2 quadratis p: 8, æqualia 8 quadratis m: 4 positionibus, clarum est autem quòd si 1 quad quadratum m: 2 quadratis debet habere radicem, oportet ut numerus sit p: 1, sed erat p: 8, igitur oportebit auferre 7 ex utraque parte, habebimus igitur 1 quad quadratum m: 2 quadratis p: 1 æquale 8 quadratis m: 4 positionibus m: 7, addemus igitur per m: ut dictum est, 2 positiones quadratorum ad reliqua 2 quadratam: ex regula, & addemus per p: ut in eadem, ad numerum 1 quadratum p: 2 positionibus ex utraque parte, quare habebimus partes æquales, quæ enim adduntur & minuuntur sunt æqualia, igitur 8 m: 2 positionibus quadratorum m: 4 positionibus, p: 1 quadrato p: 2 positionibus m: 7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam partem, quæ est 8 m: 2 positionibus quadratorum, in tertiam, quæ est 1 quadratum p: 2 positionibus m: 7, sit illud quod uides à latere, pro numero quadratorum, & hoc æquale esse debet 4 quadratis, qui est numerus ꝑductus, ex dimidio mediæ partis in se, quare abijciendo quad. utrinque, fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem reductis partibus ad suas cõsimiles erunt 2 cubi p: 60, æquales 4 quadratis p: 30 positionibus, & 1 cubus p: 30, æqualia 2 quadratis p: 15 positionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam solo sensu experiendo.

8 m: 2 pos. q̃d. / 4 pos.	1 q̃d. p: 2 pos. m: 7
4 quad.	8 m: 2 pos.
8 quad. p: 16 pos. m: 56 m: 2 cu. m: 4 q̃d. p: 14 pos. quad.	
4 quad. p: 30 pos.	60 p: 2 cub.
1 cub. p: 30 æquatur 2 quad. p: 15 pos.	
pos. 2	

Circa quod notanda sunt tria. Primum, quod reduxi rem ad experimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, stultum est enim semper difficultatem addere difficultati, secundum, quod 1 cubus p: 30 æqualis 2 quad. p: 15 rebus, habet aliam rei æstimationem quàm 2, quæ cognita est ex suo capitulo, sed pro nunc ne operatio longior euadat, eam relinquimus. Tertium notandum est, quod tu uides, demonstrationem sic tenere in m: sicut in p: & quod numerus semper est addendus necessariò, quia consurgit ex quadrato numeri quadratorum cum numero quadratorum priorum, seu quadrata sint addenda seu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuen- *Notandum.*

Vu dorum

dorum. Hoc stante, diximus quod rei æstimatio est 2, & addendæ sunt 2 res per m: quadratorum, igitur minuemus 4 quadrata ex utraque parte, habebimus igitur 1 quad' quadratum m: 6 quadratis p: 1, æqualia 4 quadratis m: 4 positionibus m: 7, pro numero autem addendus est quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium est 2, quadratum cuius est 4, & similiter productum ex numero priorum quadratorum in rei æstimationem, quod productum est 4, igitur addemus 8 utrique parti, & fient tandem ut uides, 1 quad' quadratū m: 6 quadratis p: 9, æqualia 4 quadratis m: 4 positionibus p: 1, manifestum est autē quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, sed facta reductione ueniunt necessariò ad duo capitula, uel 1 quadratum æquale 2

1 q̄d' quad. m: 2 q̄d. p: 1 m: 4 quad. p: 8
1 q̄d' q̄d. m: 6 quad. p: 1
8 quad. m: 4 pos. m: 7 m: 4 quad. p: 8
4 q̄d. m: 4 pos. p: 1

1 q̄d' q̄d. m: 6 q̄d. p: 9 —	1 quad. m: 3 3 m: 1 quad.
4 quad. m: 4 quad. p: 1 —	2 pos. m: 1 1 m: 2 pos.
1 q̄d. æqual. 2 pos. p: 2 1 q̄d. p: 2 pos. æqual. 4	℞ 3 p: 1 ℞ 5 m: 1

pᵃ æstimatio	2ᵃ æstimatio
res ℞ 3 p: 1 quad. 4 p: ℞ 12 q̄d' q̄d. 28 p: ℞ 768	res ℞ 5 m: 1 quad. 6 m: ℞ 20 q̄d' q̄d. 56 m: ℞ 2880
4 res ℞ 48 p: 4 q̄d' q̄d. ℞ 768 p: 28 p: 8	4 res ℞ 80 m: 4 q̄d' quad. m: ℞ 2880 p: 56 p: 8
aggreg. ℞ 1200 p: 40 10 quad. 40 p: ℞ 1200	aggreg. 60 m: ℞ 2000 10 q̄d. 60 m: ℞ 2000

positionibus p: 2, uel 1 quadratum p: 2 positionibus æqualia 4, horum capitulorum æstimationes sunt ℞ 3 p: 1, & ℞ 5 m: 1, dico igitur quòd in æstimationibus 1 quad' quadrati p: 4 positionibus p: 8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia positione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p: 30, æquabatur 2 quadratis p: 15 rebus, ad alias duas æstimationes, sed si te delectat operatio, per te ipsum potes illud inquirere.

QVAESTIO X.

Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum aggregatum sit 8, & q̃dratum tertij, sit æquale aggregato ex q̃dratis primi & secundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 pos. 1 q̃d. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 quad' quad. igitur 1 quad' quad. æquatur 1 quadrato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorum uigesimo quarto, habebimus rei æstimationem ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, est eius quadratum, scilicet ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum est $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$, p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, hoc autem non est 8, ut propositum est, dic igitur per regulam trium quantitatum, si $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ esset 8, quid esset 1 prima quantitas? duc 8 in 1, fit 8, diuide 8 per $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & exit 4 p: ℞ v: ℞ 500 p: 10 m: ℞ v: ℞ 1920 p: 18, & hæc est prima quantitas, qua habita si duxeris eam per ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, habebis tertiam quantitatem, quam si duxeris denuò in primam quantitatem ultimo inuentarum, ℞ q producti, est secunda quantitas, & ne mireris quod tertiam quantitatem præponam secundæ in operatione, quia est longe simplicior.

1	p[a]
$\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$	2[a]
℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	3[a]

$1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$

QVAESTIO XI.

Si quis dicat, inuenias numerum, qui ductus in ℞ suam cubicam m: 3, faciat 64. Pones illum 1 cubum, igitur ductus in ℞ cubicam m: 3 producit 1 quad' quadratum m: 3 cubis, æqualia 64, igitur 1 quad' quadratum m: 3 cubis, æquatur 64, dico quod possumus soluere modo septimæ quæstionis, & etiam alio modo, sine transmutatione, quo potest etiam solui septima quæstio, & facilius, sed uolui docere ambos modos, ut melius scires operari, debes igitur scire duo. Primum, quod ut res debent semper manere ab alia parte, à qua est numerus cum quadratis, & non à parte quad' quadrati, sic cubi, seu p: seu m: debent manere cum quad' quadrato. Secundum, quod ut numerus rerum nunquam debet uariari, sic nec numerus cuborum. Et possumus addere tertium his, scilicet, quod ubi sunt res, peruenimus ad 1 quad' quadratum p: quad. p: numero, æqualia quad. rebus p: uel

 m: &

m:& numero p: sic hic peruenimus ad quad' quadratum p: quad. p: numero, æqualia quad' quad. cubis p: uel m: & quad. p: Hoc intellecto, sic soluitur quæstio, addes ad numerum 2 positiones quadratorum, igitur ducto eius dimidio in se, fit 1 quadratum numeri quadratorum quadratorum, diuiso igitur eo per 64, habes $\frac{1}{64}$ quad. numerum quadratorum quadratorum, quare uides,

| $\frac{1}{64}$ q̃d'q̃d. p: 1 | m: 3 cub. | 2 pos. q̃d. | $\frac{1}{64}$ q̃d'q̃d. | 2 pos. q̃d. | 64

quod addidisti ad habendam radicem $\frac{1}{16}$ quadrat. pro numero quad' quad. & 2 positiones pro numero quad. igitur addes eadem ad 1 quad' quadratum m: 3 cubis, & habebis $\frac{1}{48}$ quadrati p: 1, pro numero quad' quad. & m: 3 cubis & 2 positionibus, pro numero quad. igitur ad hoc ut habeat radicem, oportet ut extrema inuicem ducta, producant, quantum dimidium mediæ quantitatis in se, est autem dimidium 1 $\frac{1}{2}$ cubi, quod ductum in se, producit 2 $\frac{1}{4}$ cu' quadrata, & $\frac{1}{64}$ quadrati p: 1 numeri quad' quad. in 2 positiones numeri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' quadrati, nam quad' quadratum in quadratum, producit cu' quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' q̃d. æqualia 2 $\frac{1}{4}$ cu' quadratis, igitur cu' quadratum, ad cu' quadratum in æqualitate, sic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus, æqualia 2 $\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p: 64 positionibus æqualia 72, quare rei æstimatio, p: ℞ v: cubica ℞ 11005 $\frac{1}{27}$ p: 36, m: ℞ v: cubica ℞ 11005 $\frac{1}{27}$ m: 36, & duplum huius pro quadratis addetur utrique parti, radix igitur, ex una parte est 8 p: rebus sub numero æstimationis rei, ex alia autem quadrata sub numero ℞ v: $\frac{1}{64}$ quadrati, huius æstimationis addito 1, m: positionibus sub numero ℞ dupli huius æstimationis.

QVAESTIO XII.

Si quis dicat, 1 quad' quadratum p: 3, æquatur 12 rebus, addes 2 positiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit ℞ quadratam sine numero ut clarum est, igitur addemus

1 q̃d'q̃d. p: 3 | 12 pos.
2 pos. q̃d. p: 1 q̃d. m: 3

| 1 q̃d'q̃d. p: 2 pos. p: 1 q̃d. | 2 pos. | 12 | 1 q̃d. m: 3
| 1 q̃d'q̃d. p: 6 quad. p: 9 | 6 quad. p: 12 pos. p: 6

mus

mus ex alia parte pro numero quadratorum 2 positiones, & pro numero 1 quad. m: 3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æquales 6 rebus p:36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p:18, & res ualet 3, igitur partes sunt ut uides, & erit 1 quadratum p: 3, ℞ primæ partis, æqualis rebus ℞ 6 p: numero ℞ 6, & res quæsita erit, ℞ v: ℞ 6 m: $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{2}$.

QVÆSTIO XIII.

Inuenias numerum, cuius quad quadratum cum duplo cubi, sit 1 p: ipso numero igitur dices, 1 quad quadratum p:2 cubis æquantur ad 1 positionem p:1, hic non datur locus radici subtrahendæ, nec diuisioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros in continua propotione, quorum aggregatum ad aggregatum secundi & tertij eandem habeat rationem, quam aggregatum secundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 pos. 1 quad. habebis igitur 1 quad quadratum p:2 cubis p:1 quadrato, æqualia 1 quadrato p:1 positioni p:1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 quad quadratum p:2 cubis, æqualia 1 positioni p:1, ergo iam scimus rationes quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, fit quadratum aggregati secundæ & tertiæ, igitur tale aggregatum est diuisum secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio est 1, igitur residuum (& est maior portio) est ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc æquatur (ut supponitur) 1 quadrato p:1 positione, igitur quantitates sunt ut uides.

Mediæ igitur quantitatis (quę est res) 1 quad quadratum p:2 cubis æ-	prima 1
	2 res ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
	3ª quad. ℞ $1\frac{1}{4}$ p:1 m: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$

quantur ipsi quantitati p:1, id est ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ p: $\frac{1}{2}$: & per hæc intelligis modos harum regularum, si exempla hæc diligenter cum suis operationibus animaduertas.

De modis suppositionum generalium ad artem maiorem pertinentibus, & regulis quæ extra ordinem sunt, ac æstimationibus diuersi generis ab his quæ dictæ sunt. CAP. XL.



Vm fuerit cubus æqualis quadratis & numero, si ab æstimatione illa detrahatur, numerus quadratorum, relinquetur æstimatio cubi & totidem quadratorum, æqualium numero qui sit in eadem proportione cum numero primæ æquationis in qua est ipsa secunda æquatio seu æstimatio ad primam æstimationem. Exemplum, cubus æquatur 2 quadratis p:$1\frac{17}{64}$, & æstimatio est $2\frac{1}{4}$, dico, quod si abijcias 2 numerum quadratorum relinquetur $\frac{1}{4}$, æstimario cubi & 2 quadratorum, æqualium $\frac{9}{64}$, qui numerus est in eadem proportione cum $1\frac{17}{64}$ numero prioris æquationis, in qua est $\frac{1}{4}$ æstimatio secunda, ad $2\frac{1}{4}$ primam æstimationem, cuius demonstratio sit hæc.

	æstimat.
1 cu. æqual 2 quad. p:$1\frac{17}{64}$	$2\frac{1}{4}$
1 cu. p:2 quad. æqual $\frac{9}{64}$	$\frac{1}{4}$

DEMONSTRATIO.

Ponatur a b æstimatio prima, & a c numerus quadratorum, & erit b c æstimatio alicuius cubi & quadratorum, secundum a c numerum æqualium alicui numero, qui sit e, ponatur uerò d numerus, qui cum quadratis a b secundum numerum a c æquetur cubo a b, quia igitur cubus a b æquatur producto ex a c & c b in quadratum a b, itemq; producto ex a c in quadratum a b cum numero d, erit d æqualis producto c b in a b quadratum, & similiter cubus c b cum producto a c in quadratum c b, æquatur e numero, & æquatur etiam producto ex a b in quadratum b c, igitur propuctum a b in quadratum b c, æquatur e, uerùm producti b c in quadratum a b, ad productum a b in quadratum b c, ut a b ad b c per 143 libri de propor. colligitur, & in lib Alizæ. Proportio igitur d ad e, ut a b ad b c, quod erat probandum. Similiter sequitur, permutando proportiones æquationum numerorum ad suas æstimationes easdem esse, cum æstimationum differentia fuerit numerus quadratorum.

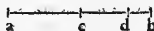


Cum

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, item cubus æqualis totidem quadratis eidemque numero, erit proportio aggregati ex prima æstimatione & numero quadratorum, ad residuum, quod fit detracto à secunda æstimatione numero quadratorum, ut secundæ æstimationis ad primam duplicata, uelut si dicam, cubus & 3 quadrata, æquantur 20, & cubus æquatur 3 quadratis p:20, in prima æstimatio rei est 2, in secunda est R: v: cubi a 11 p: R: 120 p: R: v: cubica 11 m: R: 120 p: 1, dico quod si addas 3 numerum quadratorum, ad 2 primam æstimationem (& fiet 5) & minuas idem 3, ex secunda æstimatione (& fiet R: v: cu. 11 p: R: 120 p: R: v: cu. 11 m: R: 120 m: 2) quod proportio 5 ad hanc radicem, est uelut R: v: cubicæ 11 p: R: 120 p: R: v: cubica 11 m: R: 120 p: 1, æstimationis secundæ, ad 2 æstimationem primam, duplicata, cuius rei est demonstratio hæc. 22

DEMONSTRATIO.

Sit æstimatio prima b c, secunda a b, numerus quadratorum communis, a d, quia igitur cubus a b, æqualis est productis a d & d b in quadratum a b, & a b est numerus quadratorum, erit productum ex d b in quadratum a b, æquale numero æquationis, quare & cubo b c cum producto a d in quadratum b c, igitur quod ex b d in quadratum a b, æquale est ei, quod ex aggregato a d & c b in quadratum c b, igitur per 7. sexti & 34 11 Elementorum, a d & c b, iunctorum, ad b d, uelut a b ad b c, ratio seu proportio duplicata.



Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, conuertetur 23 capitulum in capitulum rerum æqualium cubo & numero, & æstimatio secunda semper est addenda uel detrahenda tertiæ parti numeri quadratorum, ut habeatur prima, & est ex his quæ ad septimum capitulum pertinet, & modus est. Sume differentiam numeri æquationis propositi, & dupli cubi ᵀpq̃d. & eam pone pro numero, qui cum cubo æquatur rebus totidem, quotus est numerus, qui est tertia pars quadrati numeri quadratorum, ergo inuenta secunda æstimatione, pro habenda prima, addes eam ᵀpq̃d. si numerus fuit maior duplo cubi ᵀpq̃d. uel minues, si numerus fuit minor duplo cubi ᵀpq̃d. & conflatum uel residuum, est æstimatio prima.

Vu 4 Exemplum

Exemplum, Cubus & 80, æquantur 9 quadratis, dupla cubũ 3, qui est ℞p q̃d. fit 54, differentia cuius ab 80 est 26, igitur cubus p:26, æquabitur 27 rebus, est autem 27 tertia pars quadrati 9, igitur æstimatio secunda est 1, quæ addita ad 3 ℞p q̃d: constituit 4, æstimationem primam quia numerus, qui est 80, est maior duplo cubi ℞p q̃d. quod est 54.

Aliud exemplum, Cubus p:5, æquatur 6 quadratis, duc 6 in se fit 36, huius tertia pars est 12, numerus rerum, inde detrahe 5, numerum æquationis, ex 16 duplo cubi 2 ℞p q̃d. & relinquitur 11, igitur 1 cub. p:11, æquatur 12 rebus, æstimatio autem est 1, detrahe igitur 1 ex 2 ℞p q̃d. quia numerus est minor duplo cubi ℞p q̃d. relinquitur æstimatio cubi p:5 æqualis 6 quad.

DEMONSTRATIO.

Demonstratio autem huius est. ponatur a b numerus quadratorum 9, a c æstimatio rei, cuius cubus p: 80 æquatur a b ductæ in a f quadratum a c, & sit a d tertia pars a b, & similiter d e & e b & a g superficies æquidistantium laterum, & tertia pars quadrati a b per primã 6 Elemen. quia igitur ex b a in a c, fit cubus a f p: 80, erit quod ex b c in a f 80, quod igitur ex b d in a f, 80 p: eo quod ex c d in a f, detracto igitur quod ex b d in a h, & est duplum cubi a d, fiet quod ex b d in gnomonem, 26 p: eo quod ex c d in a f, at quod ex b d in gnomonem, æquale est quadruplo c d in quadratum a h, & duplo a d in quadratum h f, eo quod lineæ b e, e d, d a, d h, & reliquę supplementorum sunt æquales inuicem, quadruplum igitur c d in quadratum a h cum duplo a d in quadratum h f, æquatur 26 p: eo quod ex c d in f a, at ex c d in f a, fit cubus c d, & duplum a d in quadratum f h, & c d in quadratum a h semel, igitur ablato eo quod ex c d in quadratum a h semel, & ex a d in quadratum h f bis, utrinque, erit triplum c d in a h, æquale cubo c d p:26, at quod ex c d in a h ter, æquale est ei, quod ex c d in a g semel, cum d h sit tertia pars d g, igitur quod ex c d in a g tertiam partem quadrati a b: æquale est cubo ipsius c d p:26.

Cum quæstionis solutio ad multitudinem denominationum peruenerit, solutio plerunque sperari potest, nam ex mala tractatione sæpius hoc euenit, unde ad pauciores & notas denominationes

nominationes deducta soluitur, & generaliter. At cum ad capitulum paucarum sed inæqualium denominationum peruenerit, quæstionis solutio, nunquam generaliter ad cognitionem peruenict, cum semper in id incidat capitulum, quod generalem æstimationis inueniendæ regulam non habet: uelut si ad capitulum r p',quadratorum, rerum ac numeri deuenerit.

Cum uerò hoc in omnibus, tum maxime in Geometricis quæstionibus, quæ graues sunt, plurimum conferre solet, ut præuias alias, ac minus difficiles quæstiones soluas, huius libri auxilio, demum in regulas de modo solutiones has contrahes, inde illarum auxilio pedetentim procedens per positionis præcepta & regulas, ad aliquod tandem horum capitulorum notorum peruenies, ex quo dilucida solutio apparebit. 5

Præter has autem æstimationes, aliæ quædam emergunt, quarum numerus est infinitus, nec ullius earum generalis est usus, uerùm quæ maximè sunt frequentes, tribus modis fiunt. Aut enim regula peculiari, ut in sexto libro ostensum est. tum magis in capitulis omnibus quantitatū continue proportionalium, ut facile est experiri. Aliæ autem ex iterata regularum uel capitulorum operatione, uel mixtione: ut cum ad quæsiti solutionem pluribus capitulis, uel regulis indigemus. Exemplum habes, superius, capite 35, Quæstion. 4: & capite 31, Quæstion. 2 huius, sed oportet perficere. Tertio modo habebis uarias æstimationes, cum capitula uel regulas non in numeris, sed iam uariatis æstimationibus exercueris, ut si dicam, fac ex ℞ ultimi 8 m: ℞ 2, duas partes, ex quarum ductu in radices alterius mutuo fiant numeri, qui iuncti inuicem faciant 4, operatio perueniet ad absonam quantitatem. 6

Natura producti ex partibus numeri in ℞ quadratam uel cubam uel alterius generis partis reliquæ, est de genere cubi, uel quad' quadrati, excepto quod quantitas sumenda est proximior maximè, non minori. Exemplum, si quis dicat, fac ex 10 duas partes, quarum productum unius in quadratum alterius faciat 9, & postmodum uelis dicere, fac ex aliquo numero duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat 18, tunc uides quòd talis productio est ex genere cubi, quia igitur, si proportio esset eadem, fieret hoc ex 20, quod est duplum 10, ut 18 est duplum 9, at quia est ex genere cubi, inueniemus duos terminos proportione continua medios inter 10 & 20, & sunt ℞ cubica 2000 7

ca 2000 & ℞ cubica 4000, igitur numerus quęsitus est ℞ cubica 2000, nam una pars est ℞ cubica 2 alia ℞ 1458, ducta ℞ cubica 1458 in quadratum ℞ cub. 2 fit ℞ cubica 5832, quæ est 18. Dico igitur quod si dixisset, ut facias de 10 duas partes, ex quarum mutua multiplicatione in ℞ alterius fiat 12, quod hæc habet rationem cubicam, unde si diceremus, inuenias numerum ex cuius ductu uicissim partium in mutuas radices fiat 24, & uelis ex primis partibus inuenire alias, tunc inter 10 & 20 eadem ratione, qui se habent ut 9 & 18, accipies in ratione cubica duos terminos medios proportionales, & maior illorum qui est ℞ cubica 4000, est terminus quæsitus, nam una pars est ℞ cubica 4, alia ℞ cubica 2916, duc uicissim in ℞ quadratam alterius fiunt ℞ cubica 5832, & ℞ cub. 216, quæ sunt 18 & 6, & hæ iunctæ faciunt 24.

9	18
10	20
℞ cu. 2000	℞ cu. 4000

31 Quælibet æquatio cubi æqualis rebus & numero, conuertitur in consimilem, cuius numerus rerum constat ex diuisione prioris numeri rerum per numerum æquationis, & numerus æquationis est ℞ eius quod prouenit diuisa monade per numerum æquationis, ut in exemplo, cubus æquetur 6 positionibus p:2, diuide 6 numerum positionum per 2 numerum æquationis, exibit 3 numerus positionum secundæ æquationis, diuide etiam unitatem per 2 numerum æquationis, exit $\frac{1}{2}$, cuius ℞ est numerus æquationis, & ita in duobus reliquis exemplis. Inuentio autem æstimationis unius per aliam, est ualde difficilis, ueruntamen dico, quòd habita secunda ęstimatione, ipsa erit ℞ numeri rerum multiplicandarum cum monade seu uno per 1 cub. & per positiones, & numerum priorē ex alia parte, inde addes tot quadrata utriq; parti, quotus est numerus, qui prouenit diuiso uno per quadruplum quadrati eiusdem secundæ æstimationis, & habebis quad quadratum p: cubo p: quadrato ex una parte, habentia ℞, quæ erit quad. p: pos. & ex alia quad. p: pos. p: numero, habentia similiter radicem, quæ erit positio p: numero, quare per capitulum, habebis æstimationem, ut in tertio exemplo, habes secundam rei æstimationem 1, pro habenda prima duc 1 positionem

1 cub. æqualis 6 pos. p: 2
1 cub. ęqualis 3 pos. p: ℞ $\frac{1}{2}$
1 cub. æqualis 4 pos. p: 4
1 cub. æqualis 1 pos. p: $\frac{1}{2}$
1 cub. æqualis 6 pos. p: 9
1 cub. æqualis $\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{1}{2}$

nem p: 1 (pro regula sumitur 1) sed 1 pos. est propter quadratum æstimationis rei, quod fuit etiam 1 in 1 cubum, & 6

1 cub.	6 pos. p: 9
1 pos. p: 1	1 pos. p: 1
1 qd qd. p: 1 cub.	6 qd. p: 15 pos. p: 9
1 qd qd. p: 1 cu. p: $\frac{1}{4}$ qd.	$6\frac{1}{4}$ qd. p: 15 pos. p: 9
1 qd. p: $\frac{1}{2}$ pos.	$2\frac{1}{2}$ pos. p: 3

positiones p: 9, habebis 1 quad quadratum p: 1 cubo, æqualia 6 quadratis p: 9 p: 15 positionibus, deinde adde utrique parti $\frac{1}{4}$ quadrati, & est quod prouenit semper diuisa unitate per quadruplum quadrati numeri positionum additarum, & habebis partes habentes R quadratas, quare res est 3.

ARTIS MAGNAE HIERONYMI CARDANI DE REGVLIS ALGEBRI, FINIS.

HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS, CIVISQUE BONONIENSIS, MEDICI AC MATHEmatici præclarissimi, de Aliza regula, Libellus,

HOC EST,

OPERIS PERFECTI SVI SIVE ALGEBRAICÆ LOGISTICAE, NVMEROS RECONDITA NVMErandi subtilitate, secundum Geometricas quantitates inquirentis, necessaria coronis, nunc demum in lucem editæ.



INDEX EORVM
QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

LVI.

HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS CIVIS'QVE BONONIENSIS, de Regula Aliza, libellus.

De suppositis ac modis, CAP. PRIMVM.



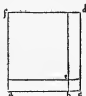
VM iam in arte magna demonstrauerimus omnia capitula conuerti, modò duo principalia, nec iam ex conuersione, inuenta generalia fuerint, manifestum est inuento alio capitulo generali, præter capitula cubi, & rerũ æqualium numero, & cubi æqualis quadratis, & numero, quòd ex priore per conuersionem deducitur, & si generale sit, omnia capita seu ex tribus seu ex quatuor nominibus, generaliter non solum cognita esse, sed & demonstrata, modo hoc ipsum demonstratione inuentum sit. At uero faciliora inuentu sunt, quæ ex tribus nominibus constant, quam quæ ex quatuor, non solum quia hæc pluribus partibus constent, sed quoniam hæc per illa habeantur. Horum autem quæ tribus nominibus constant facillimum est capitulum cubi ęqualis rebus & numero, cuius pars iam maxima ex prima regula habetur, & quòd secundum rationem capituli iam inuenti se habet: & etiam quòd ex illo in alia non contra conuersionem ostenderimus. Horum omnium causa de illo agemus.

In capitulo igitur Cubi æqualis rebus & numero, duo proponuntur speciatim, numerus æquationis, numerus etiam rerum: generaliter autem, quod cubus nunc alicuius lineæ seu quantitatis, propositis numeris simplici & rerum ęqualis est. Oportet autem ut generaliter hoc inueniamus & demonstratiuè & facillimè. Cum ergo cubus æqualis sit duabus quantitatibus diuersi generis (aliter non esset hoc generale, si ad solos numeros & eorum partes extenderetur) necesse est ut & ipse in duas tantum partes resoluatur, quarum una numerus sit, & assignato ęqualis: alia totidem partes contineat natura uarias, quot in rebus continentur de eis æquales. Quo circa necesse est cubum saltem ex duabus partibus constare natura diuersis, igitur & latus eius seu res, neque enim ab unius generis natura plures per multiplicationem quotiescunque repetitam plures quantitates diuersorum generum fieri possunt, ut ab Euclide in decimo libro demonstratum est. Verùm si in re contineantur duæ quantitates à numero alienæ, necesse est ut inter se sint incommensæ, aliter æquiualerent uni: at ex eiusmodi necesse est cubum fieri, Propos. 10.

AA qui

qui tres partes contineat, numerum & duas rhete, ut rebus ac numero possit coęquari. Cum ergo diuiserimus rem in duas partes, oportet cubum tres eiusmodi progignere, & si in tres ut progignat quatuor atq; ita deinceps, & (ut dictum est) ut in illis sit numerus numero proposito æqualis: reliquę partes uerò ut sint ex natura partium lateris, & illarum aggregatis coęquales.

Rursus ut repetamus quæ dicta sunt, sit cubus a d ex linea a c diuisa trib. & constat quod in eo erunt quatuor partes diuersæ principales cubus a b, cubus b c, triplũ a b in quadratum b c, & triplum b c in quadratum a b. Oportet igitur accommodare numerum, & potest fieri septem modis, facilioribus, ut diximus, si non possumus inuenire æstimationem in faciliori, quomodo in difficiliori inueniemus? Primus ergo modus est, ut numerus tribuatur cubis:



atq; hic modus est inuentus, & est pars illa capituli quæ habetur in qua accipimus ℞ cubicas partium numeri pro rei partibus, & ita cubi illarum sunt numeri qui iuncti æquantur aggregato cuborum c c & e f & res ipsæ æquantur parallelipedis sex, quæ ex cubo a d
Per 9. secundi El. & regula Dialec. residua sunt. Sed quoniam cubi a b & b c nunq; possunt esse minores quarta parte totius cubi a d, & hoc etiã non contingit nisi cùm fuerit a c diuisa per æqualia in b. Cùm igitur numerus fuerit minor quadrante cubi totius a d, non poterit ęquari cubis a b, b c: & ideò capitulum hac in parte non fuit generale.

Sequitur ergo secundus modus, & est ut parallelipeda omnia dentur numero & cubi rebus: & quia parallelipeda non possunt esse maiora dodrante totius cubi, quia cubi non possunt pariter accepti esse minores quadrante, ideò nec hoc capitulum potest esse generale, quoniam cùm numerus fuerit maior dodrante totius cubi, non poterit tribui parallelipedis. Cùm ergo neutrũ istorum capitulorum possit esse generale per se, ambo tamen iuncta constituit capitulum generale: etiam primum seruit quando numerus non fuerit minor quadrante totius cubi, seu triente rerum, quod idem est: secundus cum numerus non fuerit maior dodrante totius cubi, seu maior triplo quantitatis rerũ, quod ad idem pertinet. Ex quo liquet quod cum numerus fuerit à quadrante ad dodrantem totius cubi, & est magna latitudo scilicet semissis, tunc ęstimatio potest haberi

beri per utranque regulam, quia numerus potest tradi cubis & parallelipeda rebus, & conuerso modo numerus parallelipedis & res ipsis cubis. Aestimatio ergo erit eadē, & duobus modis inuenta. Licet aūt uidere ex demōstratis in lib. de Proport. quòd proportio aggregati cuborū ad aggregatum sex parallelipedū est, ueluti aggregati quadratorum a b & b c partiū detracto producto a b in b c ad triplum producti seu superficiei a b in b c, seu triplum superficiei a c. Propos. 146

Tertius, quartus, quintusque modus non sunt adeo elegantes tametsi priores duo quippiam habeant precipui. Tertius siquidem est cum quatuor parallelipeda numero dantur, reliqua duo cum cubis rebus. Est autem hoc inter corpora illa præcipuum, quòd proportio ipsorum corporum est, ut quadratorum partium simul iunctorum ad ambo producta: uelut, capio rem 7, diuisam in 5 & 2. quatuor parallelipeda sunt 140 cubi partium cum duobus parallelipedis sunt 203, proportio 203 ad 140 est uelut 29 aggregati quadratorum 5 & 2 ad 20 duplum producti 5 in 2. Et similiter, in quarto modo numerus datur duobus tantum parallelipedis mutuis. Hoc tamen habet præcipui, quòd extenditur ad quadrantem ad unguem numeri, unde uidetur ad unguem perficere capitulum cum prima regula. Manifestum est ergo, quòd in secundo modo oportet producere tertiam partem numeri ex mutuis parallelipedis, in tertio medietatem, in hoc autem totum numerum. Et semper aggregatum ex duobus mutuis parallelipedis æquale est ductui productiū partium inuicem in aggregatum earum: seu in rem. Sed in quinto modo damus numerū uni cubo, reliqua septem corpora rebus, ideò est ualde difficilis, & redit ad capitulum quatuor nominū inde ex eo ad primum, ideò est deterius omnibus; si tamen posset inueniri, esset generale ut duo sequentia.

Sextus modus est, ut demus numerum uni cubo & tribus parallelipedis quæ fiunt ex latere cubi illius in quadrata lateris alterius cubi, & reliqua quatuor corpora, scilicet, cubum cum tribus parallelipedis rebus. Est ideò est difforme, quoniam quod æquatur est simile scilicet cubi cum parallelipedis tribus aduersis, cui æquatur dissimile, nam unum aggregatum æquatur numero aliud rebus. Præcipuum tamen est his corporibus, ut differentia aggregatorum sit æqualis cubo differentiæ laterum, uelut in exemplo posito primum aggregatum est 185, secundum 158, differentia est 27, cubus 3 differentis 5 & 2. Et hoc capitulum si inueniretur, esset generale.

Septimus modus est, cum numerum damus aggregato ex cubo & duobus coherentibus parallelipedis cum uno aduerso & res reliquis quatuor corporibus, uelut in exemplo ad 125 cubum 5 addo

 100 du-

100 duplũ parallelipedi 2 in 25, q̃dratum 5 & 20, parallelipedũ 5 in 4, q̃dratum 2, & totum fit 245, & similiter reliquum erit 8 p̄ cubo, & 40 p̄ duplo 5 in 4, q̃dratum 2 & 50, parallelipedum 2 in q̃dratũ, ut omnia sint 98. Pręcipuũ in hoc est, quod utraq; pars habet rationẽ q̃drati, & R q̃drata fit ex 75 in R unius partis, uelut R 245 fit ex 7 in R 5, & 98 ex 7 in R 2. Et proportio talium corporum est uelut partium rei, id est uelut 5 ad 2. Patitur tamen & hoc difficultatem eandem cum priore, scilicet quod corpora similia generatione comparant naturis diuersis per se in genere, ut numero & rebus. Reliquæ aũt compositiones, aut sunt anomalę, uelut si daremus numerũ uni parallelipedo, uel trib. uel quinq; uel duobus, nõ mutuis aut q̃tuor, ex q̃bus duo mutua nõ essent, aut uni cubo et uni parallelipedo, uel duobus uel tribus nõ eiusdẽ generis. Aliæ sunt inutiles, uelut si daremus numerũ aggregato ex ambob. cubis, et duob. parallelipedis aut quatuor quomodocũq;, nã si numerus cũ paruus sit, nõ sufficit aggregato cuborũ, quomodo sufficit eidẽ si addant parallelipeda.

De Regulis specialibus cap. XXV. Artis magnæ cubi æqualis rebus & numero. CAP. II.

PRima hic sit a d numerus rerũ ea ratione cõstructa sup̃ficie rectangula, ut altitudo eius c d ducta in residuũ, deducto q̃drato b d, q̃d sit a e, p̄ducat f numerum, liquet ergo q̃d cubus c d seu c b cũ numero f equat numero rerũ, id est parallelipedo ex b c in a d, sumat ergo b l quarta pars b d, & totius a l latus a m, cui adijciat m n dimidiũ b c, quæ in b l, erit ergo posita a n re corpus ex a n in a d rursus res ipsę dico q̃d cubus a n equat totidẽ reb. a n, id est

Per 4. secundũ numerũ a d & numero f. nã q̃dratũ a n est æq̃le q̃drato a m

2. Element. & m n, quare sup̃ficieb. a l & b l ex supposito & duplo a m in m n, q̃d est ęq̃le duplo q̃drati m n (posita m o æq̃li m n) p̄ducti ex m n, in m o, & duplo p̄ducti m n in a o, duplũ aũt p̄ducti m n in m o, seu q̃drati m n est ex supposito ęq̃le duplo b l. q̃dratũ igit̃ a n est ęq̃le superficiei a l, & triplo b l, & duplo a o in m n, a l aũt cũ triplo b l est tota superficies a d: q̃dratũ igit̃ a n est ęq̃le a d superficiei a d, et duplo m n in a o, est aũt c d dupla m n igit̃ superficiei ex c d in a o, cubus ergo a n qui fit ex a n in q̃dratũ a n ęq̃lis est parallelipedo ex a n in a d & in c d in a o, sed ex a n, c d, a o, fit idem q̃d ex c d in superficiẽ ex a n in a o

Per 4. quę est ęq̃lis superficiei a e, nã ex a n in a o fit cũ q̃drato m n, q̃d est b

2. Element. l q̃dratũ a m, eo q̃ m n & m o sunt ęq̃les igit̃ detracta cõmuni superficiei b l ex a n in a o fit a e, & ex c d in a o ex supposito fit f numerus, igit̃ cubus a n æq̃lis est parallelipedis ex a n in a d, & ex c d in superficiẽ a e, q̃d est ęq̃le f, numero igit̃ cubus a n est ęq̃lis parallelipedo ex a n in a d cũ numero f, at ex a n in a d est numerus rerũ positarũ supponendo a n rẽ, quia adfuit numerus rerũ, igit̃ cubus est ęq̃lis rebus

& nume-

& numero ꝓpositis. Hæc demonstratio ostendit q̃d hoc capitulum non orit̃ ex illis septem modis sed alia ratione. Ex hoc etiā sequitur q̃d capitulū cubi & numeri ęq̃liū rebus est simplicius, et ex se magis obuiū cognitioni capitulo cubi ęq̃liū rebus et numero. nā in eo sufficit ut inuenias partē in numero rerū, cuius radix ducta in reliquā partē ꝓducat numerū propositum. Hęc etiā regula non est generalis per se toti capitulo cubi ęq̃liū rebus & numero, q̃a ubi numerus esset maior nō satisfaceret, sed est generalis capitulo cubi & numeri ęq̃liū rebus. Secūda quoq; regula nec ex his demonstrat̃, sed accepta quacunq; parte cubi ꝓ numero reliqua est ęq̃lis rebus ex supposito, igit̃ superficies est æq̃lis numero rerū. Si ergo ea superficies cū eo quod ꝓuenit diuiso numero per eandē quantitatē fuerit q̃dratum illius quantitatis, igit̃ quantitas illa est res. Sed neq; hoc ad hoc ꝓpositū pertinet, cū ex illa diuisione rei nō pendeat. & licet ad quadrati diuisionē quod cubi basis est, res diuisa intelligat̃, attamen illa diuisio magis pertinet ad capita cubi & numeri cōparatorum q̃dratis quā rebus. Tertia regula orit̃ ex tertio modo ꝑcedentis diuisionis. Quarta regula similiter ex quarto modo demonstrat̃, nam duo cubi cū quatuor parallelipedis ad duo reliqua parallelipeda eā obtinent ꝓportionē quam q̃drata partiū rei diuisę cū superficie unius partis in alterā ad alterā superficiem quæ quadratū cōplet. Cū ergo duo q̃drata et superficies ex una parte in aliā sint tres quantitates cōtinuę ꝓpositionis & radices extremarū, seu latera q̃dratorū ex supposito ducta in ipsā q̃drata mutuo ꝓducant numerū ęq̃tionis & parallelipeda etiā, igit̃ parallelipeda sunt æqualia numero, reliqua aūt corpora rebus. ergo cū cub. sit æq̃lis illis octo corporibus, erit etiā ęq̃lis rebus & numero. Quòd uero sex illa corpora sint ęq̃lia rebus, cōstat ex cōstitutione cubi, et demōstratis in lib. de Proport. Quinta regula ex secundo modo originē ducit, uerùm cū ibi demōstrata sit, nō est ut eam repetā. Sexta regula huic ꝓposito non cōgruit, nā specialis est. Septima oritur ex quinta, sed uidet̃ ab ea diuersa, quia in illa supponit̃ ℞ tota scilicet ℞ v: 28 m: 3 quad. in hac dimidiū ℞ 7 m: $\frac{1}{2}$ quad. Et quia in una ducūtur partes mutuo in q̃drata in alia aggregatū in ꝓductū partiū: sunt tamē idē ut demōstratū est in lib. de Proport. Pendet aūt per regulam de modo cum 1 cu. ęq̃lis sit 7 reb. p: 90 ex 7 m: q̃drato differentię q̃d est 1 quad. posita differētia 1 pos. (tanq; ꝓducto partiū, & est semper ęq̃le differentiæ aggregati q̃dratorū a ꝓducto unius partis in alterā) in ℞ v: 28 m: 3 q̃drata, inuentū per regulā de modo fit 30 tertia pars numeri ęquationis. Sic octaua pēdet ex tertia codē ꝓcessu: sed q̃a positę sunt solū ad inuentionē generis quantitatum q̃ multiplicatę in q̃drata uel radices ꝓducant numerum ideo omitto.

De modo inueniendi quantitates quæ seruiant capitulis per producta unius partis in aliam, & quadratum differentiæ partium. CAP. III.



Vm dixerit quis 1 cu. p̄ 8 æqualia 7 quadratis, tunc diuides 7 in duas partes, ex quarum una in alterius quadratum fit numerus, & semper oportet ut reliqua pars quæ nō in se ducitur sit binomium uel recisum primum, quia quadratum alterius necessariò est binomiū uel recisum primum. Ex Euclide igitur si debet numerum efficere ductum in reliquam partem, oportet ut sit illa secunda pars binomium uel recisum primum. Prima ergo pars potest esse binomium uel recisum primum, secundum & tertium, & potest etiam esse binomium quartum, quintum & sextum, non tamen recisum, quia cum prima sit ℞ & secunda pars necessariò sit binomium, quia prima est recisum, igitur in utraque esse ℞ p: igitur non potest esse numerus ille qui ab initio diuisus est. Dico ergo quod diuiso numero quadratorū in duas partes, quas uocabimus principales, & eam quæ in se ducitur, uocabimus principalem, & pro alijs duabus partibus inueniendis, duc primam in duplum secundę, & à producto deducito quadratum primę, & ℞ residui est pars addenda principalibus, aut detrahenda cum conditionibus condictis. Et similiter p numero producēdo duc differentiā principalium in se, & productum in duplum primæ principalis, & quod producitur, est quęsitus numerus. Exemplum ergo in proposito, diuido 7 in 4 & 3, duco 4 in duplū 3, fit 24, deduco cb quadratum 4, relinquitur 8, cuius ℞ addita 4 uel detracta et ita addita uel detracta à 3 cōuerso modo cōstituit partes 4 p: ℞ 8 et 3 m: ℞ 8 uel 4 m: ℞ 8 et 3 p: ℞ 8. Et ideo notandū est quod sub æquatione eadem prima pars principalis, et secūda idem faciunt per binomium et recisum. Vtraque enim harum æstimationum scilicet 4 p: ℞ 8 et 4 m: ℞ 8 est æstimatio 1 cu. p: 8 æqualium 7 quadratis. Pro numero ergo habendo æstimationis, seu qui producitur, cape 1 differentiam 4 et 3 partium principalium: et duc in se, fit 1, duc in 8 duplum primę principalis fit 8 numerus quęsitus. Exemplum ergo aliud, diuido 7 in 3 et 4, et sit 3 pars prima, duco in duplum 8 fit 24, aufero 9 quadratū primæ fit 15. Et erit pars ℞ 15 detrahenda à 4 et addenda 3 propter ea quæ dicta sunt. Pro numero sume differentiam quæ est 1, duc in se fit 1, duc in duplum 3 primę principalis, fit 6 numerus quęsitus. habebo igitur 1 cu. p: 6 æqualia 7 quadrata. Et similiter diuido 7 in $1\frac{1}{2}$ et $5\frac{1}{2}$ et duco u duplum $5\frac{1}{2}$ in $1\frac{1}{2}$ fit $16\frac{1}{2}$ detraho $1\frac{1}{4}$ quadratum $1\frac{1}{2}$ relinquitur $14\frac{1}{4}$, huius igitur radici adde $1\frac{1}{2}$, et detrahe à $5\frac{1}{2}$ et ficrent partes ℞ $14\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$ et $5\frac{1}{2}$ m: ℞ $14\frac{1}{4}$. At productum fit ex differentia

$5\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ in se & fit 16, & ducto 16 in 3 duplum $1\frac{1}{2}$ fit 48, simili modo ferè ex 8 duas partes, ex quarum ductu unius in quadratũ alterius fiat 9 posita una $4\frac{1}{2}$ alia $3\frac{1}{2}$, per secũdam regulam patet propositum, scilicet quód producemus 9 uel 7. nam quadratum differentię est 1, & ductum in duplum $4\frac{1}{2}$ constituit 9, & in duplum $3\frac{1}{2}$ constituit 7, & ita si diuidatur in 5 & 3, producetur 40 uel 24. In prima ergo diuisione erunt partes $4\frac{1}{2}$ p: uel m: ℞ $11\frac{1}{4}$ & $3\frac{1}{2}$ p: uel m: eadem ℞ $11\frac{1}{4}$, & ita si diuiseris in $2\frac{1}{2}$ & $5\frac{1}{2}$ habebis 45, & erunt partes ℞ $21\frac{1}{4}$ p: $2\frac{1}{2}$ & $5\frac{1}{2}$ m: ℞ $21\frac{1}{4}$. nam aliter esse non potest, ut ab initio diximus. Et si diuiseris in $1\frac{1}{2}$ & $6\frac{1}{2}$ habebimus 75. Et ex hac operatione patet, quód præter integra dimidia non potest ulla diuisio esse utilis. Sic enim duc diuisum in a & b, & sit c differentia, & quia si diuidatur per $4\frac{1}{4}$ & $5\frac{1}{2}$ uel $6\frac{1}{2}$ & $3\frac{1}{2}$, & sic de singulis differentia est numerus integer, ergo cum a & b non sunt, neq; integra neq; media, erunt maiora uel minora, ergo c est maius uel minus integro. Et quia numerus qui debet produci, necessarió fit ex quadrato c in duplum a, ubi a sit prima pars, & iam a non est nec integer numerus nec dimidium, igitur duplum a non est numerus, sed aliquis ex eadem denominatione cum c. At quia ducitur in se, & est ultra integrũ, aliquid erit productum, factum genere denominationis quadratæ, ut si sit $2\frac{1}{3}$ erit $5\frac{4}{9}$ at ductum 5 in $\frac{4}{9}$ in $7\frac{2}{3}$ duplum minoris, quia denominatió composita est ad $5\frac{4}{9}$ producit numerum ex genere fractorum; quorum denominator est 27 ut pote $41\frac{20}{27}$ ut demonstratum est suo loco, igitur productum non potest esse numerus aliquis integer, sed 10 non potest diuidi per integra & media nisi decem modis, ergo numerus æquationum non potest esse nisi decem. At 10 quadrata æqualia cubo & numero possunt æquari, ut demonstratum est in libro de Proportionibus usq; ad 148 numeris integris & singulis, ergo diuisio binomiorum & recisorum, & per integra nõ satisfacit, sed desunt 138 numeri integri: præter illos, in quibus sunt adiectæ partes ipsę numerorum quibus eadem ratione hæ quantitates satisfacere non possunt. Sed pro nunc, sufficiat ostendisse de integris, & quia capitula omnia conuertũtur, liquet quod idem defectus est in illis.

Considerandum præterea quod ex hac regula habetur proportio numeri cum additione producti ad numerum sine additione, uelut, si 8 diuisum in 3 & 5, producit 45; & additis partibus quæ sunt ex regula producitur 24, ut superius dixi ℞ ex regula secunda dico, quod proportio 45 ad 24, ut demonstratione patet se habet, ut 15 productum 5 in 3 ad 8 duplũ quadrati differentiæ. Et ita diuidẽdo 8 in 6 & 2, fit 24 primo modo, et per secundũ regulam fit 64, & proportio 24 ad 64, & uelut 12 ꝓducti ex 6 in 2 ad 32 duplũ quadrati 4 differentiæ.

De

De modo redigendi quantitates omnes, quæ dicuntur latera prima ex decimo Euclidis in compendium. CAP. IIII.



EVclides constituit uiginti quatuor lineas alogas, id est, irrationales, & unam rhete seu rationalem uicem habentem numeri.

Rationalis seu rhete, ut sex uel septem: aloga simpliciter quæ numero & rheti potentia tantum est commensa, ut ℞ sex uel septem, id est latus tetragonicum superficiei rhete, sed non quadratæ. Media & est latus tetragonicum superficiei alogæ simpliciter, ut ℞ ℞ 6 & ℞ ℞ 7. Ex comparatione autem alogarum inter se, uel cum rhetis consurgant sex genera binomiorum, de quibus dicemus.

Proprium primi binomij & similiter recisi est, quòd prima pars sit numerus, & secunda aloga, & quadrata harum differant numero quadrato, ut 3 p: ℞ 5, quorum quadrata sunt 9 & 5, differentia est 4, latera autem 9 & 4, sunt 3 & 2, & ita 3 m: ℞ 5 erit residuum primum. Et ita 4 p: ℞ 12. conueniunt autem, ut dictum est in tertio libro, tam binomij quam recisa, quòd primi & quarti prima pars est numerus 2 ℞: 2 & 5, secunda pars est numerus 2 ℞ 3 & 6, ambæ partes sunt ℞, sed primus ordo, id est 1 2 & 3, differunt à 2 ordine, id est 4 5 & 6, quòd in prima ordine pars maior, seu prima semper est potentior minore parte, seu secundo quadrato quantitate commensæ primæ parti, in secundo ordine incommensæ. Modus autem generalis omnibus binomijs & recisis habendi radicem est, ut ducas secundam partem in se, ut ℞ 12 per se fit 12, cuius sume quartam partem semper, & est 3, fac ex prima parte 4, duas partes producentes 3, et erunt 3 et 1. horum radices iunctę faciunt 4 p: ℞ 12, et in producendo quadrata, efficiũt semper rhete, et aloga fit ex duplo unius partis in alteram: & est regula quam posuimus in tertio libro operis perfe-
p. 19. Re cti. Cum uerò Euclides non poneret latus linearum hoc inuenit, ut
12. acciperet superficiem ex rheti et binomio primo, cuius latus tetra-
Pro gonicum dixit esse aliquod binomium. Constat autem talem su-
4. perficiem etiam esse binomium primum, et est tertia regula quæ ut
antedicta excipitur ab Euclide. Omnis enim quantitas commen-
pos. 66. sa binomio primo, est binomium primum. Sunt autem com-
mensæ cum fuerit proportio earum, et numeri ad numerum ex di-
pos. 6. ctis ab illo in decimo libro. Sed non sunt omnia binomia eiusdem
speciei inter se commensa, et est quarta regula: nam ut uisum est 3 p:
℞ 5, et 4 p: ℞ 7 sunt binomia prima, et tamen inter se non sunt com-
17. mensa ex eodem Euclide. Idem in omni genere cõtingit alogarum,
scilicet ut commensæ sint eiusdem speciei, non tamen quę sunt eius-

dem

dem speciei inuicem cōmensæ sint. Inueni postmodum quod idem est ducere ℞ 5 in 3, & fit ℞ 45, quæ si ducatur in ℞ 5, fit ℞ 225, & est 15: si duxerimus ℞ 5, in se fit 25, & 5 in 3, fit 15, uide quanto facilius sit, & hæc est quinta regula. Sexta autem continet quatuor propositiones quæ inuicem conuertuntur, & est quod cum fuerint duæ quantitates a d maior & c minor, & diuisa fuerit a b in d, ita ut inter b d & d a cadat media, pars dimidia c, tunc si a b est potentior c quadrato commensæ b d est commensa d a etsi non, non. Et si b d est commensa d a tota a b, est potentior c commensa ipsi a b etsi non, non. Hoc autem pendet ex hoc quod abscisa de æquali d a quadratum ab superat quadratum c, quod est æquale quadruplo b d in d a per octauam secundi Elementorum in quadrato b e. Vsus autem harum linearum est, ut manifestum est a d binomia & recisa inuenienda, & ambas dictas bimedias. Septima regula sumitur ab Euclide, & est quod si superficies æqualis quadrato binomij ad rheten adiungatur, latus secundum est binomium primum. Et est eadem tertiæ regulæ licet uideatur conuersa. Cum enim ut in illa diximus, latus binōmij primi sit aliquod binomium, igitur quadrata binomiorum omnium sunt binomia prima, at latus illud rhete est tanquam proportio, & non uariat speciem, igitur latus illud alterum necio est binomium primum. Et omnia quæ hic dicuntur de binomijs, intelliguntur de suis residuis, & sunt generalia in omnibus quantitatibus comparando aggregatum ad recisum seu residuum, ideò per hanc octauam regulam tractabimus solum de sex generibus binomiorum, et quinque alijs, et ponemus nomina singillatim hic à latere. Modus quoque iungendi ℞ has, ut apparet in eodem tertio libro commodior est, ut diuidas maiorem radicē per minorē, & exeuntis accipe radicem

Rhete	Aloga	Media	
Binom 1	Binom	Res. 1	Resid
Binom 2	Bimed 1	Res. 2	Res.med 1
Binom 3	Bimed 2	Res. 3	Res.med 2
Binom 4	linea ma.	Res. 4	linea mi.
Binom 5	Pot. in Rat & Med	Res. 5	cū Rat & Med
Binom 6	Pot. in duo Med	Res. 6	cū Med & Med

cui adde, id est, & duc in se: & productum in quadratum minoris radicis ℞ productum est quæsiti. Decima regula est, quod huiusmodi diuisiones sunt magis conspicuæ in figura quàm in numeris, ueluti posita ℞ maximi aloga constat per 44. primi Elementorum posse super datam rhetem fieri superficiem æqualem illi. Eius ergo latus secundum erit, ut dixi in septima regula naturæ eiusdem, cuius est superficies, & cum eo latere potero diuidere superficiem rationalem seu rheten, & confestim ex prima diffinitione secundi Elemen-

torum habebo latus secūdum quod uix in numeris haberi potest, & cum habetur fit magno labore, ibi uerò statim est conspicuum, sed ars generalis nondum est inuenta in numeris. Est autem iuxta undecimam regulam, ut inuenias recisum usq; ad quatuor quantitates, uelut: uolo diuidere 10 per ℞ 6 p: ℞ 15 p: ℞ 5 p: ℞ 2, pones recisum ex æquis partibus contrarijs, & habebis diuidendum & diuisorem: qui est 6 p: ℞ 120 m: ℞ 24. cui appone trinomium quod ductū in recisum producit 132 p: ℞ 17280. duc etiam trinomium illud in quadrinomium, & habebis diuidendum, quem tædij & breuitatis causa omitto. Rursus appono recisum & duco in binomium, & fit 144 pro diuisione, ducto autem reciso in quantitatem quæ constat ex duodecim nominibus fiet diuidendum uigintiquatuor nominum. Forsan poterunt reduci ad pauciora, quia radices illæ sint commensæ. Et si transeant quatuor quantitates non commensas in duobus casibus adhuc poterit esse diuisus. Vel quando habuerit radicem, ut 6 p: ℞ 24 p: ℞ 12 p: ℞ 8, uel cum habuerit diuisorem: uelut si quis dicat, diuide 10 per ℞ 24 p: ℞ 15 p: ℞ 15 p: ℞ 12 p: ℞ 10 p: ℞ 5 p: ℞ 2 p: ℞ 2. Hic quia producitur ex ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 2 in ℞ 3 p: ℞ 2 p: 1, diuidemus per regulam datam per alterum horum inde quod exit per reliquum. Et ideò possumus reducere ad unum casum quando diuisor diuidi potest per multinomium, ut ita dicam, ita ut minuatur numerus nominum. Nam inuentio lateris est quædam diuisio. Consyderanda est ultima ratio proportionis superficiei ad lineam. Et dico quod superficies a ad lineam b c est, ut super b c fiat superficies rectangula æqualis a dico quod c d latus secundum est proportio, uel id quod adæquatur proportioni a ad b c, quia n ex proportione ducta in terminum fit, alter terminus ut in numeris uidemus: & est ex diffinitione proportionis, & ex latere c d in b c fit a, quia fit b d æqualis a, igitur c d dicetur proportio uera superficiei a ad lineam b c. Et est magis conspicua quàm superficiei ad superficiem, & lineæ ad lineam. Euclides tamen (ut dixi) prætermisit, quoniam uidebat lineas in latitudine esse indiuiduas: nos tamen dicimus quod componitur ex lineis, sicut ex fluxu puncti fit linea, & instantis tempus, & alia eodem modo, & hæc est duodecima regula.

10 | ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2
℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 3 m: ℞ 2

6 p: ℞ 120 m: ℞ 24
℞ 600 p: ℞ 500 m: ℞ 300 m: ℞ 200

6 p: ℞ 120 p: ℞ 24
133 p: ℞ 17280

132 m: ℞ 17280

Binomij secundi latus est bimedia prima, ut docet Euclides suo modo, poterit igitur uel sub nomine ℞ v: ostendi uel recta ratione.

Capiamus

Capiamus ergo ℞ 72 p:8, & per secundam regulam ducamus 8 in se fit 64, cuius pars quarta est 16, fac ex ℞ 72 duas partes, ex quarum ductu inuicem fiet 16. accipio per quintam secundi Elementorum dimidium ℞ 72, quod est ℞ 18, & duco in se fit 18, abijcio 16, remanet 2, cuius ℞ addita & detracta à ℞ 18, & facit ℞ 32 & ℞ 8 per nonam regulam: igitur ℞ harũ partium. i. ℞ ℞ 32 p: ℞ ℞ 8, constituunt bimediam primam, & subtractæ una ab altera residuum bimedij primi. Sunt. n. commensę tantum potentia, nam quadratum ℞ ℞ 8, est dimidium quadrati ℞ ℞ 32, nam ℞ 8 est dimidium ℞ 32: & continent superficiem rheten, & maior est potentior breuiore in quadrato ℞ 8 cuius latus est ℞ ℞ 8 incõmensa in longitudine ℞ ℞ 32, quod est propositum. Et iste modus est omnibus alijs longe facilior, & à nobis pro exemplo explicatur.

Binomij tertij sumatur radix ut ℞ 32 p: ℞ 24, & erit ℞ ℞ 18 p: ℞ ℞ 2, quæ potestate tantum commensæ sunt, & continent superficiem mediam 1 ℞ ℞ 36, seu ℞ 6, & in hoc differt à priore, & maior est potentior minore in quadrato ℞ ℞ 8, quæ est ℞ ℞ 18 incommensa in longitudine, sicut ℞ dimidij ad radicem totius: aut radix 3 ad ℞ 2, & hæc uocatur bimedia secundam.

Binomij quarti ut 3 p: ℞ 6, inuenio radicem: capioq; ad uitandas fractiones 6 p: ℞ 24, cuius accipio ℞, quæ est ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v: 3 m: ℞ 3, ducito primum ℞ v: 3 p: ℞ 3, in se fit 3 p: ℞ 3, duc ℞ 3 m: ℞ 3 fit 3 m: ℞ 3 iunge, fiunt 6 duc ℞ v: 3 p: ℞ 3 in ℞ v: 3 m: ℞ 3, fit quadratum ducendo unamquamq; seorsum in se, & fiunt 3 p: ℞ 3, & 3 m: ℞ 3, inde inuicem, & fiunt 6 inde accipiendo ℞ quæ erit ℞ 6, & hoc erit productum ℞ v: 3 p: ℞ 3, in ℞ v: 3 m: ℞ 3. Sed quia oportet bis multiplicare fient, duc ℞ 6 quę sunt ℞ 24. Sed quia per quartam secundi Elementorum quadratum ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v: 3 m: ℞ 3, æquale est quadratis partium cum duplo unius in alteram. igitur quadratum ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v: 3 m: ℞ 3, est 6 p: ℞ 24, est quadratum ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v: m: ℞ 3. In figura autem capiemus a b, cui triplam faciemus b c in directum coniunctam, & sumemus medium a c quod sit h, delineabimus super id circulum a e c, & ducemus ex a b ad perpendiculum b e, quæ erit latus seu ℞ 3 hanc adiungemus a c in directum, & abscindemus ab a c, & fient b f 3 p: ℞ 3, & b g 3 m: ℞ 3 super c a, igitur & a f diuisis per æqualia in k & m ducemus circulos a d f & a l, & ex parte e producemus b e d latus b f, & ex aduerso b l latus b g. Itaque id erit æqualis ℞ v: 3 p: ℞ 3, & ℞ v: 3 m: ℞ 3. Ex hoc patet quod Geometrica ostensio est clarior arithmetica: &

ut ita dicam euidẽtior, ea uero q̃ fit per numeros est fidelior, certior
& securior, quia experimento ꝓbatur, ut supra feci. Et est tertiadeci-
ma regula, sequit͂ etiam alia pulchra quartadecima, scilicet in ordine
(licet nõ ad artem multũ) & est quod sicut unũ est principiũ in reb.
naturalibus, ita etiã in transitu arithmeticorũ ad Geometricas figu-
ras monas, quã quidam appellant unitatẽ, est principiũ necessarium
39ª decimi. inuentionis, super qua fundat͂ tota ars. Dico modo q̃d ℞ v:3 p: ℞ 3
p: ℞ v:3 m: ℞ 3, cõueniunt oẽs ꝓprietates lineę maioris. Nã sunt duę
Per 16 prop. quãtitates potentia incõmensę, omne eñ binomiũ est incõmensum
suo reciso, etiã est uera in omnib. alogis, & facilè demonstrat͂, & est
regula quintadecima, & ambo q̃drata pariter accepta sunt rhete, &
ꝓductum unius in alterã mediam, nam quadrata iuncta faciũt 6, &
Propos. 33. productũ unius in alterã est ℞ 6. Notandũ q̃d apud Euclidẽ addit͂
una operatio, scilicet q̃d partes in se ducunt͂, & additur quadratum
medię partis minoris inde sumit͂ ℞ v: 1. Et hæc operatio in numeris
est superflua, quia possumus accipere radicẽ cuiuslibet quantitatis.
Binomij quinti, & est ut ℞ 24 p: 4, ducemus dimidiũ minoris in se p
secundam regulã fiet 4, fac ex ℞ 24 duas partes ꝓducentes 4, & erũt
medietates ℞ 6, quę ductę in se faciũt 6, adijce 4, relinquitur 2, cuius
℞ addita ad ℞ 6, facit ℞ 6 p: ℞ 2, & detracta ℞ 6 m: ℞ 2, & harũ quan
titatũ ℞ v: constituũt quantitatem quæ potest in rheten & mediam.
Propos. 40. Quadrata quidẽ harum sunt ℞ 24, & productum unius in alterã est
℞ 4 quod est 2, cuius duplũ est 4 numerus binomij. Et sunt potẽtia
incõmensæ, quoniam sunt ut dixi binomiũ, & recisum ℞ 6 p: ℞ 2, cũ
℞ 6 m: ℞ 2. Omnes igit͂ hæ quantitates cũ sint radices binomiorũ in
se ductę, ꝓducunt suũ binomium. Et est regula sextadecima. Eadẽ
ut dixi intelligẽda sunt de recisis & residuis, q̃ sunt radices recisorũ.
Binomij sexti, & est ut ℞ 24 p: ℞ 12 ducemus ℞ 12, in se fit 12, cuius
quarta pars est 3, faciemus ex ℞ 24 duas partes quę ꝓducant 3, et du
cemus ℞ 6 dimidiũ ℞ 24, in se fit 6, aufer 3, relinquit͂ 3, cuius ℞ addita
& detracta ex ℞ 6, facit ℞ 6 p: ℞ 3, & ℞ 6 m: ℞ 3, quarũ quantitatũ ra-
dices uniuersales constituunt iunctæ quantitatẽ, quæ potest in duo
media, nam sunt potentia primum incommensę, quia quadrata illa-
rum sunt binomium & recisum. Deinde quia compositum ex qua-
dratis est ℞ 24 medium, & productum unius in alterum est ℞ 3, & ℞
3 est incõmensa ℞ 24, est enim ꝓportio unius ad alteram ℞ 8 cõstat
ꝓpositũ ex Euclide. Pręter hoc demonstrat quod dictę alogę quan
Propos. 41. titates, aliter diuidi non possunt ut sint ex eodẽ genere, in quo erant
ante separationẽ. Vt pote 6 p: ℞ 20 est diuisum in 6 & ℞ 20, & consti
tuit binomiũ primum, aliter ut idẽ constituat diuidi non potest. Cũ
diuisa fuerint quãtitates rhete per residuũ aliquod exibit binomiũ
eiusdem

eiusdẽ ordinis commẽsum partib. suis illi residuo: etsi per binomiũ exibit residuũ eiusdẽ ordinis, similiter cõmensum partibus, et erunt partes illę binomiorũ cum recisis, & etiam binomiorũ & recisorum eadẽ proportione, & ex ductu residui in binomiũ semper ꝓducitur rhete. Et hęc demõstrant ab Euclide in fine 10 li. Ex his cõstat ꝗd binomio cõmenso binomio residui aut residuo commenso residuo binomij rhete semper ꝓducit. Itẽ si latus secundũ supficiei ęqlis q̃drato lineę potẽtia tantũ rationalis diuidat binomio uel residuo, exibit binomiũ uel recisum cũ eadẽ ꝓportione partiũ, quandoq; eiusdẽ ordinis quandoq; diuersi. Velut diuidendo ℞ 24 p: ℞ 3 p: ℞ 2, exit ℞ 72 m: ℞ 48. At ꝓportio ℞ 72 ad ℞ 48, est ut ℞ 3 ad ℞ 2, & sunt eiusdẽ ordinis. At si diuidas eandem ℞ 24 p 2 p: ℞ 2, exibit ℞ 24 m. ℞ 12, q̃ licet habeant partes in eadẽ ꝓportione, eadem tñ sunt binomium cũ reciso eiusdẽ ordinis, sed binomiũ est ordinis quarti & recisum sexti. Ex q̃ patet unũ mirum quod licet non possint esse quatuor quantitates in eadẽ ꝓportione, quarũ tres sint numeri, & quarta sit potentia tantum rationalis, possunt tamẽ esse quatuor quantitates, quarum tres erunt potentia tantũ rationales, & una erit numerus, & poterit esse quãtitatis alogę ad numerũ ꝓportio, uelut alterius alogę ad alogã, seu ut duarũ alogarum. Sequit etiam quod duæ quantitates incommensæ habebũt ambas partes cõmensas, ut 2 p: ℞ 3, & 5 p: ℞ 12, nam cum sint binomia primi & quarti ordinis sunt incõmensa, & tamẽ 2 & 5 sunt cõmensa, & similiter ℞ 12 & ℞ 3, cum una sit dupla ad aliam. Prop. 112. 113. & 114.

De consyderatione binomiorum & recisorum continentium figuram rheten, ubi de æstimatione capitulorum. CAP. V.

CVm omne binomiũ & recisum possit esse latus superficiei numeratę, ideò nõ distinguã nisi ratione partiũ, in quibusdã enĩ maior pars est numerus, in quibusdã minor, in quibusdã neutra. Proponã aũt exemplum in oĩbus. Dico quod æstimatio in binomio uel reciso, in quo nõ est numerus, nõ est idonea in hoc casu: quia detracta à numero relinqt tres quantitates incõpositas numerũ et duas radices, et ex radicibus illis in se ductis non fit nisi numerus, & una radix numeri, ergo in ꝓducto non poterũt se delere. Examinemus ergo rem per singula capita, & dicamus quod si cubus est 24, ęquetur 32 rebus rei æstimatio cum sit duplex est 3 p: ℞ 5, & 3 m: ℞ 5, & ipse conficiunt iunctæ 6 æstimationem cubi æqualis 32 rebus p: 24, & quia ex 32 oportet facere duas partes, ex quarum unã in radicem, alterius fiat 24, duco ergo 3 p: ℞ 5, in se fit 14 p: ℞ 180,

4 p: ℞ 2 4 m: ℞ 2	14	2 p: ℞ 3 4 m: ℞ 12	2
℞ 6 p: 2 ℞ 6 m: 2	2	℞ 6 p: 2 ℞ 216 m: 2	12
℞ 6 p: ℞ 2 ℞ 6 m: ℞ 2	4	℞ 6 p: ℞ 12 ℞ 216 m: ℞ 79	24

 detraho

detraho ex 32, relinquuntur 18 m: ℞ 180. Et hic ductus in 3 p: ℞ 5 debet producere 24 numerum æstimationis. Apparet ergo in hoc primo exemplo quod oportet diuisionem fieri in binomio primo, nam 18 m: ℞ 180 & 14 p: ℞ 180 sunt binomia prima, quia habēt radicē, & illa etiā oportet ut sit binomiū primum, quia ducta in binomiū primum, ꝓducit numerū. Et si residuū non fuisset binomiū primum, sed quartū, etiā radix binomij primi fuisset binomium quartū, aliter nō potuisset ꝓducere numerum. Secundum exemplū igitur sit 1. cu. p: 12 æqualia 34, rebus rei æstimationes sunt 3 p: ℞ 7, & 3 m: ℞ 7, quæ componunt 6 æstimationem 1 cu æqualis 34 rebus p: 12, duco ergo 3 p: ℞ 7 gratia exempli in se fit 16 p: ℞ 252 detraho ex 24, relinquuntur 18 m: ℞ 252, ex quo & 3 p: ℞ 7, producitur 12 ad unguem. Ista sunt plana. Tertium est 1 cu. p: 8, æquatur 18 rebus, & æstimatio est ℞ 6 m: 2 (omitto nūc integram) quadratum ℞ 6 m: 2 est 10 m: ℞ 96, residuum ℞ 96 p: 8. Causa est ergo, quod binomium primum relinquitur residuum quin & econuersò. Quia ergo fuit radix residuum quintum

18 m: ℞ 180
2 p: ℞ 5
24
14 p: ℞ 180
3 p: ℞ 5
18 m: ℞ 180

res bene se habet. Idem dico de binomio & residuo secundis. Et in hoc genere habet fermè plura exempla quam in primo uelut uides. Et ℞ 12 m: 3 est recisum secundum, & ℞ 6 m: 2 est recisum quintum, & 3 m: ℞ 5 recisum primum, & 3 m: ℞ 7 recisum quartum. habes igitur omnia exempla.

Primum igitur consyderandum est, quod in primo & quarto potest esse rei æstimatio binomium & recisum, ut uides in duobus ultimis exēplis, sed in secundo & quinto nō potest esse nisi recisum. Probatur, nam si sit binomiū primum, igitur residuum erit, uel residuum primi uel quarti modi, ergo per præcedentem ductum in recisum secundi uel quinti generis nō producit numerum. Sunt igitur sex æstimationum genera binomium, primum, quartum, & recisum primi quarti, itemq; secundi & quinti modi. Secundum est, quod cum sint

℞ 96 p: 8
℞ 6 m: 2
8

1 cu. p: 8 æqual. 18 pos.
æstim. ℞ 6 m: 2

1 cu. p: 48 æqual 25 rebus
æstim. ℞ $3\frac{3}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1 cu. p: 21 æqual. 16 rebus
æstim. ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1. cu. p: 18 æqual. 19 rebus
æstim. ℞ $17\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$

1 cu. p: 18 æqual. 15 rebus
æstim. ℞ $8\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1 cu. p: 18 æqual. 39 rebus
℞ 12 m: 3

1 cu. p: 12 æqual. 34 rebus
æstim. 3 p: ℞ 7, uel 3 m: ℞ 7

1 cu. p: 24 æqual 34 rebus
æstim. 3 p: ℞ 5, uel 3 m: ℞ 5

sint duæ æstimationes in hoc capitulo cubi & numeri æqualium rebus, uel æquales uel inæquales, & in reciso secundo, & quinto non posit esse suum binomium, & secunda æstimatio habeatur per primam (ducto illius dimidio in se, & triplicato producto & detracto à numero rerum) ℞ residui deducto dimidio, æstimationis primæ est æstimatio secunda: uelut 1 cu. p: 18 æquatur 39 rebus & rei æstimatio est ℞ 12 m: 3, duco ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, in se fit $5\frac{1}{4}$ m: ℞ 27, triplica fit 15 3 m: ℞ 243, detrahe ex 39 numero rerum, relinquitur $33\frac{3}{4}$ p: ℞ 243, à cuius radice uniuersali detrahe ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, dimidium primæ æstimationis erit secunda æstimatio ℞ v: $23\frac{1}{4}$ p: ℞ 243, ablata ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, & hoc totum constat esse æquale 69, necesse est ut secunda æstimatio sit numerus, uel aliquid quod se habeat ad priorem æstimationem, ut ℞ v: $23\frac{1}{4}$ p: ℞ 243 p: l $1\frac{1}{2}$ m: ℞ 3 ad recisum secundum. Et ita liceret per eandem regulam inuenire secundam æstimationem. Tertium est, quod cum in eodem numero puta 18 inueniantur plures æstimationes ut pote puta ℞ 17 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ & ℞ 8 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$ & ℞ 12 m: 3. Ita oporteret sub eodem numero rerum idem facere. Et hoc magis conueniret ad rei intelligentiam.

Quartum, quod uidemus numerum rerum in numeros non solum integros sed etiam fractos uelut in quarto exẽplo 19 diuiditur in 17 $\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ in Quinto autem 15 in $10\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{2}$ & in secundo 25 in $3\frac{1}{2}$ & $21\frac{1}{2}$ & in tertio 16 in $11\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{2}$ Consyderare igitur oportet num in alias.

Quintum, quod uidemus numerum æquationis si sit compositus, ut 18 12 24 facile habere æstimationem & plures etiam, si autem primus difficile est inuenire unam solam.

De operationibus p: & m: secundum communem usum. CAP. VI.



IN multiplicatione & diuisione p: fit semper ex similibus 1
m: ex contrarijs, unde p: ductum in p: & diuisum per p: &
m: ductũ in m: et diuisum per m: producunt semper p: Et
ita p: in m: uel m: in p: uel p: diuisum per m: uel m: per p:
producit m.

In additione omnia retinent suam naturam, in detractione com- 2
mutant, ut p: additum fit p: m: m: detractum p: uicem gerit m: m: de-
tractum p. Sin autem tuncatur, relinquitur id à quo detrahitur, ut
m: 4 à m. 6 relinquitur m: 2 quia m: à quo detrahitur p: maius.

℞ p: est p: ℞ m: quadrata nulla est iuxta usum communem, sed de 3
hoc inferius agemus, de cubica dubium non est, nam ℞ 1 cu. m: 8
est m: 2.

Si quis dicat diuide 8 p: 2 p. ℞ 6 uel ℞ 6 p: 2 tum inuenies ambo 4
recisa

recisa ℞ 6 m: 2, & 2 m: ℞ 6, quod est ucre m: ducas ergo recisa in 8 pro quantitate diuidenda, fiunt ℞ 384 m: 16 & 16 m: ℞ 384, quod est m: hoc igitur cum primum sit diuidendum per p: 2, exit manifestè ℞ 96 m: 8. Secundum diuiditur per m: 2, exit ex prima regula, idem scilicet ℞ 96 m: 8.

		℞ 6 p: 2
	8 —	℞ 6 m: 2
℞ 384 m: 16		p: 2
	8 —	2 m: ℞ 6
16 m: ℞ 384		2 p: ℞ 6
		m: 2
℞ 96 m: 8		
℞ 96 m: 8		

Recisum autem quod componitur ex p: & m: potest habere radicem, & illa constat ex p: & m: ut 5 m: ℞ 24 eius ℞ est ℞ 3 m: ℞ 2.

De examine æstimationum, sumptarum ex regula secunda & tertia, secundi capituli. CAP. VII.



PRoponamus quod cubus æqualis sit 18 rebus p: 30, unde rei æstimatio iuxta partem capituli inuentam, fit ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12. & supra augendo numerum extenditur in infinitum. Et si dederimus parallelipeda omnia numero, oportebit ex hac æstimatione facere duas partes, ex quarum ductu in quadrata mutuo fiat 10 tertia pars numeri. Quare etiam ex ductu aggregati, seu æstimationis in productum fiet idem. Diuidam ergo 10 per ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12, exit ℞ cu. 12 m: 2 p: ℞ cu. $5\frac{1}{3}$ productum, diuidam ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12 in duas partes, quæ ductæ inuicem producant ℞ cu. 12 m: 2 p: ℞ cu. $5\frac{1}{3}$ & erunt partes. Dico ergo quod cum duo parallelipeda cum simili æstimatione possint æquari etiam 30, sex parallelipeda poterunt æquari 90, & multo amplius ueluti cubus æquatur 18 rebus p: 58, rei æstimatio est ℞ cu. 54 p: ℞ cu. 4. Et si cubus æquetur 18 rebus p: 75 rei æstimatio erit ℞ cu. 72 p: ℞ cu. 3. Et si quis dicat 1 cu. æquatur 18 rebus p: 33 rei æstimatio, per eandem regulam erit ℞ cu. 24 p: ℞ cu. 9. Diuidam ergo 11 per ℞ cu. 24 p: ℞ cu. 9, exit ℞ cu. $21\frac{1}{3}$ m: 2 p: ℞ cu 3. Partes igitur erunt

Per quintam 2.ᵢ Elem.

℞ cu $2\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. $1\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{16}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{12}$.
Et ℞ cu. $2\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. $1\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{16}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{12}$.

similiter si cu. æqualis sit 18 rebus p: 42 erit æstimatio ℞ cu. 36 p: ℞ cu. 6. Et parallelipeda 14, diuide 14 ergo per ℞ cu. 36 p: ℞ cu. 6, exit ℞ cu. 48 m: 2 p: ℞ cu. $1\frac{1}{3}$, duc ℞ cu. $4\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$, in se fit ℞ cu $20\frac{1}{4}$ p: 3 p: ℞ cu. $\frac{9}{16}$, detrahe ex hoc quod produci uis, id est aggregatum relinquitur 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$ p: ℞ partes erunt.

℞ cu. 3 p: ℞ cu. $1\frac{1}{3}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{1}{3}$ m: ℞ cu. $\frac{3}{64}$.
p: ℞ c. 3 p: ℞ cu. $1\frac{1}{3}$ m: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{1}{3}$ m ℞ cu. $\frac{3}{64}$.

℞ cu. $4\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $6\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$ p:
℞ cu. $4\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ m ℞ v: 5 m: ℞ cu. $6\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$.

De natura laterum parallelipedorum. CAP. VIII.



It parallelipedum ex a b in c d quadratum æquale numero: & dico primo quòd si a b fuerit latus cubi, & cubus b c numerus, erunt a b & b c commensæ. Nam proportio a b ad b c est ut numeri, ad numerum igitur sunt commensę, quod si a b sit latus cubi, & non commensum b c clarũ est, quòd cubus b c non potest esse numerus per præcedentem, neq; b c ipsa. Tertiò dico quòd si cubus b a non sit numerus, & parallelipedum sit numerus, nec b c est latus cubicum numeri: aliter essent parallelipedi ad cubum, ut a b ad b c, & ideò ut numeri ad numerum, & ab commensa b c, quod est contra Euclidem. Omnis enim commensa lateri cubi est latus cubi. Dico demum quod in hoc casu a b non est commensa b c. nam cum cubus b c non sit numerus, & parallelipedum sit numerus, ergo parallelipedum est incommensum cubo b c, sed a b ad b c, ut parallelipedi ad cubum igitur a b est incommensa b c, quod est quartum.

Per sextam diff. 10 El.

Per 33 sexti 11 & 10am, & 6am propos. 10 Elem.

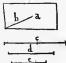
Per 10am 10 Elem.



Quomodo ex quacunq; linea constituantur duo parallelipeda, non maiora quarta parte cubi lineæ propositæ. CAP. IX.



It parallelipedum a, cuius altitudo b, proposita linea cuius duplum cubi medietatis non sit minus parallelipedo proposito, uolo datam lineam sic diuidere, ut contentum sub c altitudine in superficiem partiũ, sit æquale a parallelipedo. Inter c & b statuatur media proportione d, & fiat ut c ad d ita lateris tetragoni a ad e lineam, erit ergo superficiei a ad quadratum c, uelut c ad d duplicata, quare ut c ad b, quæ etiam est dupla ꝓportioni c ad d, parallelipeda, ergo ex c in quadratum e, & ex b in a erunt æqualia, quia ergò parallelipedum ex b in a non est maius parallelipedo ex c in quadratum medietatis eius, neque ergo parallelipedum ex c in quadratum e maius erit parallelipedo ex c in quadratum medietatis ipsius, c ergo e, nõ est maius medietate c. Ex c igitur facio duas partes, quarum rectangulum sit æquale quadrato c per ea quæ demonstrauimus in Geometria & habebimus partes lineæ propositas. Cum igitur parallelipedum ex c in superficiem, ex suis partibus sit æquale parallelipedo ex b in a sequitur per demonstrata in libro de Proportionibus, quod duo mu



Per 24 sexti 11 Elem.

Per 143 propos.

CC tua

tua parallelipeda partium c lineæ propositæ sunt æqualiã parallelipedo ex b in a, quod est propositum.

Quomodo conueniant partes cum linea proposita in parallelipedo. CAP. X.

1 It proposita primùm a c linea diuisa in b, ut parallelipedum ex tota a c in superficiem a d ex a b in b c sit æquale numero, & sit primò a c numerus, constat quod oportet a d esse numerum & partes a b, b c numeros aut binomium cum reciso, & potest demonstrari quia differentia partium necessariò est numeri radix, aut numerus ipse ad hoc, ut quadratũ medietatis quod est numerus, quia a c tota est numerus, excedat rectangulum a d qui est numerus, quoniam ex illo in a c numerum sit numerus e. Exempli causa, sit a c tota, b & e numerus 36. possum ex secundo modo tribuere numerum sex parallelipedis, & tũc duo erunt 12, diuide 12 per a c, exit 2 superficies a d, igitur partes erũt 3 p: ℞ 7 & 3 m: ℞ 7. Et duo cubi erũt 90 p: ℞ 8092. Et 90 m: ℞ 8092, quod totum est 180, unde parallelipedis relinquuntur 36. Possum dare dimidium e iuxta tertium modum uni parallelipedo, & erunt partes 3 p: ℞ 6 & 3 m: ℞ 6, possum iuxta quartum modum tribuere totum 36 duobus parallelipedis, & partes erunt 3 p: ℞ 3, & 3 m: ℞ 3. Et in primo casu cubus æquabitur 30 rebus p: 36. In secundo cubus ęquabitur 30 rebus etiam p: 36. Et in tertio rursus eodem modo, sed discrimen est, quoniam in primo casu 30 res æquatur cubis solum, in secundo cubis & duobus parallelipedis: in tertio duobus cubis & quatuor parallelipedis.

Ex quinta secundi El.

2 Ponantur rursus e 12 a c ℞ 24 diuidam e totum, sed melius est reducere ad tertium modum diuidẽdo dimidium, scilicet 6 per ℞ 24, exit ℞ $1\frac{1}{2}$, duc ℞ 6 dimidium ℞ 24, in se fit 6, abijce ℞ $1\frac{1}{2}$, & fit 6 m: ℞ $1\frac{1}{2}$, huius ℞ v: addita & detracta a ℞ 6 ostendit partes, proponam autẽ iuxta singulos modos.

Sec. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$
Ter. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ $1\frac{1}{2}$	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$
Quar. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ 6	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ 6.

Constat hanc ęstimationem inutilem esse, nam habemus cubum per parallelipeda duo uel quatuor, uel sex ęqualia numero. At reliquum ergo est ℞ aliqua ut pote ℞ 13824 m: 12 aut m: 6, uel m: 4, sed hoc diuiso per ℞ 24, quæ est res, nullus potest prodire numerus, igitur cubus non potest æquari rebus sub aliquo numero integro uel fracto.

3 Simili ratione sed alia tamen causa ostendo, quod si a c sit ℞ cu. numeri simplex quòd non potest satisfacere. Proponamus ergo

quod

quod a c sit ℞ cu. 40, & e sit 2, & accipio quartum modum in hoc ca
su, ut faciliorem seu simpliciorē diuido 2 per ℞ cu. 40, exit ℞ cu. $\frac{1}{5}$ su-
perficies a d, diuido a c per æqualia, fit ℞ cu. 5, duco in se fit ℞ cu. 25,
detraho ℞ cu. $\frac{1}{5}$ relinquitur ℞ cu. $12\frac{4}{5}$, huius ℞ addo & detraho a d
℞ cu. 5, partes erūt ℞ cu. 5 p: ℞ cu. ℞ $12\frac{4}{5}$, & ℞ cu. 5 m: ℞ cu. ℞ $12\frac{4}{5}$, Ista-
rum igitur partium duo tantum parallelipeda faciunt 2, reliquum
igitur à cubo ℞ cu. 40, manifestum est quòd necesse sit esse numerū,
& est 38. 38 igitur diuisum per rem quæ p: ℞ cu. 40 necessariò pro-
duci ℞ cu. igitur numerus rerum non potest esse numerus uerus,
sed ℞ cu. ut si quis dicat cubus æquatur rebus, ℞ cu. 100 p: 10, hoc
autem non uenit in usum. Querimus enim nos cubum ęqualem nu
mero rerum, & numero seu integro seu fracto. Et dato quòd inci-
deremus in talem casum hoc esset rarò, nec habemus regulam gene
ralem, sed posset inueniri, uelut in binomijs uel recisis prout nunc
subiungemus.

Proponatur nunc (postquàm priores tres modi parū utiles sunt, 4
nam primus est notus etiam sine capitulis, & est cuiq; obuiam, nec
est generalis, nec ut in pluribus saltem, reliqui duo prorsus inuti-
lis, nec ulla ℞ alia simplex ut ℞ ℞, uel ℞ ℞ p, uel ℞ quadrata po-
test eadem ratione esse utilis, quia cubus eius necessariò esset è gene
re primæ ℞, & detracto e recisum, ergò diuisum per rem non posset
exire numerus ullus) quod a c sit duę ℞ quadratæ, dico quòd & hic
modus inutilis est, nam detracto numero e relinquetur cubus reci-
sum, & ita non potest diuidi per rem ut prodeat numerus, nam in
cubo binomij uel recisi ubi ambę partes sint radices, nō potest pro-
dire numerus, ut constat.

Et neq; potest a c esse ℞ ℞, uel ℞ ℞ uel ℞ cu. quadrata, quia tales 5
perueniunt ad radices eiusdē generis, unde detracto numero fiunt
recisæ, sed recisum non potest diuidi per ℞ ullam unius generis, ut
prodeat numerus, igitur non poterit esse numerus rerum uerus in
æquatione. Sed neq; ex ℞ 2 & ℞ ℞ 18, nec ex ℞ ℞ ℞ 8 & ℞ ℞ 2, nam
quamuis tria parallelipeda in prima sint 18, & in secunda 6, relin-
quuntur tamen tres naturæ diuersæ, ut in prima ℞ 8, & ℞ ℞ 5832, &
℞ ℞ 23328, cōstat autem quod ℞ ℞ non potest magis esse commen-
sa ℞ simplici quam ℞ simplex numero. Ergo ℞ ℞ 23328, nec ℞ ℞
5832 possunt esse commensæ cum ℞ 8, sed neq; inter se: quia ℞ 5832
fit ex ℞ 18 in ℞ ℞ 18, & ℞ ℞ 23328 fit ex 6 in ℞ ℞ 18, at 6 & ℞ 18 non
sunt commensæ, licet diuisæ 23328 per 5832 exeat 4, & ideo contin-
git, quia diuisa ℞ ℞ 23328 per ℞ ℞ 5832 exit ℞ ℞ 2, igitur non sunt
commensæ. Cum ergo in re non sint nisi duo genera quantitatum

in diuidendo, & est residuum cubi tria, non poterit prodire numerus rerum. Et ita in omnibus similibus.

Cor[m] 1. Ex quo patet quod hoc est generale, licet explicuerimus de paralelipedo, qualiscunque tribuatur pars cubi ipsi numero, reliquum erit plurium partium non commensurarum quam sint in re, igitur non poterunt esse res sub numero aliquo.

Cor[m] 2. Ex hoc etiam sequitur quod quo plures erunt eiusmodi partes incommensæ, eo fiet discrimen numeri partium cubi detracto numero à partibus radicis maius, ergo multo minus poteris residuum diuisum per rem reddere numerum ut proponebatur.

Nec potest esse una R v: quadrata, neque cuba neque alterius generis: nam si sit R quadrata, idem sequitur quod in secunda regula. Sin autem cubica dissoluetur, ergo nõ poterit continere rem, id est R v: cu. sub aliquo numero. Neque R v: quadrata iuncta alteri R simplici, nam ut dixi in corrolario secundo præcedentis, quo plures fuerint partes incommensæ in re, eo plures erunt in cubo in comparatione ad reliquas.

Necesse est igitur ut huiusmodi æstimatio uniuersalis sit aut sub binomio, in quo sit numerus, aut in quo non sit, aut trinomio in quo sit numerus, aut in quo non sit, aut in pluribus nominibus in quo sit, aut in quo non sit, aut in quãtitate syluestri, scilicet quæ non sit in aliquo genere radicum, nec composita ex illis, nec per detractionem relicta, uelut quantitas cuius R ducta in residuum ad 12 producat 2, ubi capitulum inuentum non esset.

Partes cubi quot & quæ, & de necessitate illarum, & quæ incommensæ. CAP. XI.

Repetamus igitur & dicamus quod latus cubi, cuius quantitas quæritur, si debet æquari cubus duobus rebus & numero, oportet ut cubus sic diuisus in duo saltem, ergo latus eius, nam ex uno non prouenit nisi unum: ergo in duo saltem, cum ergo fuerint duæ partes, dum fit cubus, necesse est ut fiat quadratum totius, & hoc constat ex tribus partibus diuersis natura, & si prima potentia a c & a b sint incommensæ omnibus inuicem incommensis, nam proportio quadrati a c ad id quod fit ex a c in c b, est uelut a c ad c b, & similiter proportio eius quod fit ex a c in c b ad quadratum b c eodem modo, ergo quod



go quod fit ex a c in c b, est incommensum utrique. Quadrata
etiam a c & c b inter se incommensa ergo per demonstrata ab Eu- 4. 2. Elem.
clide erunt tres superficies in quadrato a b, quadratum a c, c b,
duplum a c in c b omnes incommensæ, cubus autem a b constat
ex a c, & c b in tres dictas superficies, & fiunt quatuor genera cor-
porum: unum ex a c in quadratum, a c, aliud ex b c in quadratum
b c, tria ex a c in quadratum a b, & tria ex b c in quadratum a c.
(Hæc autem non recito, quia reuocare uelim constructionem cu-
bi in memoriam, sed cum alibi sint demonstrata, ut possim quæ o-
pus est ostendere) Quare primum quæ fiunt ex a c in quadrata b c
sunt incommensa cubo b c, quia se habent ut a c ad c b, & eadem
ratione quæ fiunt ex b c in quadrata a c, & simili-
ter quæ fiunt ex a c in quadrata b c ad ea quæ fi-
unt ex b c in quadrata a c, sunt enim omnia ut di-
xi in proportione a c ad c b, ut à latere uides. Sed

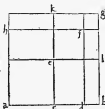
d	e	f	g
8	12	18	27

posui numeros ut clarius uideres proportionem, & ipsos ductus
mutuos semel tantum, repræsentantes parallelipeda ex a c in qua-
dratum a b, & c b in quadratum a c. Dico etiam quod perabsur-
dum esset accipere partes commensas inuicem a c & c b, quia sic
esset perinde ac si essent una & eadem quantitas. Hoc stante habes
proximas esse incommensas. At proportio f ad d est duplicata ei
quæ est a c ad c b, ubi ergo a c & c b essent potestate commensæ
d & f essent commensæ, & e & g. Si uerò secunda potestate, ut si
una esset numerus alia ℞ cu. uel ambæ ℞ cu. commensæ tunc cu-
bi inuicem essent commensæ, sed ad parallelipeda utraque incom-
mensi. Etiam ipsa parallelipeda incommensa sunt, ut liquet inter
se, quoniam sunt in proportione a c ad c b. Et similiter ℞ quad. 2.
& ℞ cu. quad 32, & ℞ quad. 3, & ℞ cu. quad. 108, sunt commen-
sæ potestate secunda. Primæ enim ductæ ad cubum, producunt ℞
quad. 8, & ℞ quad. 32, secundæ ℞ quadrata 27, & ℞ quadrata 80,
quæ sunt inuicem duplæ. Vnde notandum quòd aliud est ℞ cu.
esse secunda potestate commensas, nam omnes tales sunt, & ea-
rum cubi necessariò sunt numeri aliud ipsas esse commensas ue-
lut ℞ cub. 16 p: ℞ cu. 2, uel m: ipsæ enim solæ sunt qua-
rum parallelipeda sunt numeri, quod demonstratur: nam si
non sint commensæ a c & c b, igitur nec g & f, nec d & e, sed
d & g sunt numeri, quia cubi ℞ cu. igitur e & f non possunt
esse numeri. Non ergo potest esse a b composita ex duabus ℞
cubicis incommensis, quia parallelipeda non essent numeri: ne-
que commensis, quia esset una ℞ cubum, & cubus totus nume-
rus. Nullæ ergo duæ quantitates aliquo modo si non adsit nu-

merus possunt satisfacere parallelipedis pro numero, ut reliquum cubi satisfaciat rebus, nam si omnino sint incommensę longitudine prima & secunda potentia, erunt quatuor producta incommensæ: ergo dato quòd unũ esset numerus, tria illa reliqua nõ possent continere duas quæ sunt in rebus numero, ergo non datur numerus rerum. Si autem essent commensæ longitudine, essent una quantitas,
Ex cap. 10. igitur non satisfaceret. Si uerò commensæ potentia secunda, & essent ℞ cu. cubi essent numeri non parallelipeda, sin autem nõ essent ℞ cu. erit e ad f, ut a c ad c b, sed a c non est commensum c b, ergo nec e cum f, igitur duo incommoda sequentur primum, quòd si unum parallelipedum est numerus, alterum non erit, quare non poterit fieri regula generalis. Secundum quod aggregatum cuborum, quod erit eiusdem naturæ, non poterit uni parti conuenire secundum numerum, quia est in proportione commensa ad quamcunque partem cum quadrato unius earum, cum ergo sit quadratum non numerus nisi quantitas sit ℞, & si sit, tunc est contra dicta, cõstet quod non potest fieri æquatio. Exemplum dictum est ℞ cu. quad. 32 p: ℞ 2 cubus secũdum simplicia parallelipeda ad laborem fugiendum est ℞ quad. 72 p: ℞ cu. quad. 2048 p: ℞ cu. quad. 8192. Hic constat nullum fieri numerum, ideò conuenire non potest. Dico modo quòd nullum parallelipedum potest in his suppositis esse numerus: aliter sint a & b non ℞ cubice in secunda potentia commensæ, & producant parallelipedum c numerũ si fieri potest, & quia sunt potentia secunda commensæ, capio duas ℞ cu. in eadem proportione d & e, quæ producant f, parallelipedum, erit ergo ex dictis f ℞ cu. numeri, at c numerus est, ergo proportio c ad f, ut numeri ad ℞ cu. talis est triplicata ex Euclide ei quæ est a ad d, at d ℞ cu. est alicuius numeri, igitur a est numerus, uel ℞ cu. numeri, quod est contra suppositum. Sed neque possunt esse potentia prima commensæ partes, quia sic esset f ad d, & g ad c, ut numeri ad numerum. Essent ergo hæ duæ quantitates, si igitur una est numerus reliqua non potest continere a c & c b, quæ sunt longitudine incommensæ: si nulla ergo cubus non æquatur numero. Neque poterunt hæ duæ partes esse ℞ v: cu. Quoniam si commensę erunt una: hoc autem demonstratum est esse non posse, si incommensæ fient quatuor partes in cubo incommensæ, ergo una erit superflua. Relinquitur tandem ut una sit numerus alia ℞, ut uidebimus, uel ut sint plures quam duæ partes. Videamus ergo de tribus partibus primum cubicis omnibus, & incommensis, ut sunt ℞ cu. 6 ℞ cu. 5 & ℞ cu. 2, cognosces autem esse incommensas longitudine, quando (ut dixi) numeri illarum ducti in quadratum,

a—b—c
d—e—f

tum, alterius nō ,pducunt numerum cubū, neq; tunc ℞ cu. unius du
cta in alterius q̄dratum producit numerū conuertunī, ergo sic ,pdu
cere numerū, & mutuo ,pducere, & numeros ,pducere eodē modo
numerum cubū, & radices illas commensas esse. Et cōtraria horum
etiam conuertuntur. Ex quo tandem cōcluditur, partem illam capi-
tuli cubi æqualium rebus & numero non posse consistere in quan-
titate cōposita ex duabus ℞ cubicis simplicibus aut uniuersalibus,
aut numero & ℞ cubica. Nam in numero & ℞ cubica oportebit
dare cubos numero, quia erunt numeri, ergo in numero paruo non
satisfacient, præterea parallelipeda incommensa erunt & duæ ℞ cu.
& in re non est nisi una pars quæ sit ℞ cu. igitur non erit numerus
rerum. Neq; si ambæ partes sint ℞ cu. quoniam si dederis paralleli-
peda numero primum non conuenient cu. necessariò, si non sint
commensa, sint ℞ cu. ergo non numerus. Præterea cubi erunt nu-
meri, ergo non poterunt res continere per numerum, cum res con-
stet ex duabus ℞ cu. sic enim ℞ cu ductæ in numerum, producerent
numerum. Neq; possumus dare utrunq; cubum p: numero ubi nu-
merus sit minor quarta parte totius cubi, ut docuimus, ubi autem
est maior uel æqualis, damus, & sit illa pars capituli cubi ęqualis re-
bus & numero, quæ iam nota est, igitur reliqua pars in hac æqua-
tione nullum habet locum. Neq; possumus dare differentiam cubo
rum numero, ut in ℞ cu. p: & m: uelut ℞ cu. 6 m: ℞ cu. 2, quia paralle-
lipeda m: erunt maiora & p: minora, ergo cum in re ℞ cu. p: sit ma-
ior ℞ cu. m: necessariò, nullo modo res poterunt contineri per nu-
merum in parallelipedis, sed bene iungendo p: cum m: & m: cum p:
rerum cum cubo fiet ad unguem capitulum cubi, & rerū æqualium
numero. Sed neq; æstimatio potest constare ex numero, & ℞ qua-
drata, ut sit generalis, hoc enim est demonstratum suprà, neque po-
test constare ex numero & ℞ v: quadrata quia in cubo erunt duæ
partes præter numerum incommensæ (quia ℞ v: non est potentia Cap. 3. in fine.
prima commensa numero) & in re una tantum ergo non constabit
numerus rerum. Neque ex numero & ℞ v: cu. quoniam oportebit
dare cubos numero, & parallelipeda erunt duo incommensa, ergo
ut prius cum sit tantum una ℞ v: cu. non poterunt res numero ali-
quo contineri in cubo. Iam ergo uentum est necessariò ad triarios,
sit ergo a b diuisa in tres partes, quæ omnes sint ℞ cū. incommensæ,
nec in eadem proportione, & constat quod fient octo genera cor-
porum, unum quod erit numerus qui constabit ex cubo singula-
rum partium. Cum enim a c, c d, d b, sint ℞ cu. numerorum, erunt cu
bi earum numeri: quare & aggregatum eorum numerus. Secun-
dum corpus cōstabit ex sexcuplo corporis, cuius latera sunt omnes
partes



partes scilicet a c, c d, d b, iam ergo habes nouem corpora, reliqua decemocto cum sint tria, & tria æqualia, erunt ergo sex, primum constabit ex c d in triplum quadrati a c, secundum ex b d in triplum quadrati a c, tertium ex a c in triplum quadrati c d, quartum ex b d in triplum quadrati c d, quintum ex a c in triplum quadrati b d, sextum ex c d in triplum quadrati b d, cum ergo sint septem partes incommensę in cubo, & tres tantum in re, cubus non poterit æquari rebus sub aliquo numero. Ostendo modo quod ita sit: nam in superficie a g sunt tria quadrata a e, e f, f g: & sex superficies quarum binæ, & binæ sunt æquales d e c h, & d i h k, & l f, f k. At ex a c, c d, d b, in sua quadrata fiunt tres cubi, ex a c uero in f l, f k, idem sit quod ex c d in d l h k, & ex b d in d e, e h igitur constat de nouem iam corporibus in duo redactis. Dico modo quod ex una parte in quadratum alterius fiunt tria corpora, ut pote ex a c in e d, e h, & ex c d in, fiunt tria parallelipeda ex c d in quadratum a c, igitur cum binæ quantitates residuę multiplicentur, in quadratum tertiæ fient sex aggregata ex tribus parallelipedis, omnia igitur uiginti septem reducta ad octo.

Per 43. 1 El.

De modo demonstrandi Geometricè æstimationem cubi & numeri æqualium quadratis. CAP. XII.

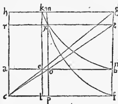
Prop. 27.

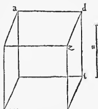


Sint quadrata duodecim æqualia cubo, & centum nonaginta duobus numero, gratia exempli, & constat ex supradictis, quod si numerus esset maior ducentis quinquaginta sex, quod propositum esset falsum, & si esset ipse numerus ducens quinquaginta sex, quod latus cubi esset octo seu bes eiusdem numeri quadratorum, & ideò proposuimus numerum illo minorem. Et ex eisdem constat quod si numerus esset dimidium maximi numeri, scilicet centum uiginti octo, quod res esset tertia pars numeri quadratorum propositorum, quia proportio quadrati besis ad quadratum trientis est uelut besis ad id quod prouenit diuiso centum uiginti octo solido proposito per quadratum besis, quod est sexaginta quatuor, exit enim duo qui est quarta pars octo, ut sexdecim quadratum quatuor, trientis est quarta pars sexaginta quatuor quadrati octo besis numeri quadratorum propositi. Nos ergo sumpsimus alium numerum ab his ut dixi. Proponatur ergo

corpus

corpus solidum d q t z rectilineum & æquidistantium laterum ac superficierum, cuius ima superficies sit d q t quadrata, & sit totum solidum centum nonaginta duo, scilicet numerus propositus, & eius altitudo sit linea d z, & sit a b data duodecim æqualis, scilicet numero quadratorum proposito, & diuisa ita ut b e sit dupla ad e a. Et duabus c b & d q subtendatur linea quædam u, & sit d z a d c, ut e b ad u, erit ergo quadrati e b ad quadratum q t, ut e b ad u, quare ut d z ad a c: igitur solidum quod sub a c & quadrato e b æquale solido d q t z, propositum igitur est sic diuidere a b, ut solidum ex una parte in quadratum alterius sit æquale solido ex a c in quadratum e b. Et hoc nos docet facere Eutocius Ascalonita in secundum de Sphæra, & cylindro bifariam, sed sufficiat adduxisse primam illius demonstrationem. Non adducam autem propositiones ex Euclide tanquam notissimas, ergo ergo a c ad perpendiculum super a b, & compleo superficiem a b e f, & duco c e usque occurrat f b in g, & compleo similiter superficiem æquidistantium laterum h g e f, & duco ex e æquidistantem c h, quæ sit l e k, & resecetur g m, æqualis d q, & duabus lineis a b & e b subtendatur in continua proportione f n. Ducatur ergo super g f axe paraboles quæ transibit per m, ut ostendam, & similiter ex b, ducatur circa coincidentes h c & c f hyperboles quæ transibit per k, per ea rursus quæ demõstrata sunt ab Apollonio in secundo cronicorũ Elementorum. Vbi ergo se diuident k b & m f in x, ducãr x s æquidistantem a b & x p æquidistantem r c, quæ secabit a b in o, quem punctum dico esse quæsitum. Ducam ergo e o quam ostendam pertingere ad f, quia ergo ut e a ad a c, ita quadratum b e ad quadratum g m, & ideo rectanguli e x f in f n ad idem, at ut e a ad a c, ita e f ad f g,





& ut c f ad f g dic quadratum c f ad id quod sub c f, f g, quare ut id quod sub c f, f n ad quadratum g m, ita quadratũ c f ad id quod sub c f, f g. Igitur quadratum c f ad id quod sub c f, f n, ut id quod sub c f, f g ad quadratum g m. At ut quadratum c f ad contentum sub c f f n, ita c f ad f n, & ut c f ad f n, ita contenti sub c f, f g ad contentum sub f g & f n, igitur ut c f: f g ad quadratum g m, ita contenti sub c f, f g ad contentum sub g f, f n igitur quadratum g m æquale ei quod fit ex

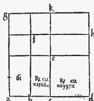
Per nonam octaui Elem. g f in f n. Igitur g m est media proportione inter g f & f n. Ducta ergo parabolę ex primo Conicorũ Apollonij per f, ita ut ductæ possint ad f n axe g f cadet in m punctum, quod est primum. Et quia h e est æqualis e f, sunt enim supplementa, erunt h l & a f æqualia, & coincidentes h c, c f. Ergo hyperbole ducta ex b resecabit proportione respondentem f b ipsi g f ex g h; igitur cadet in k, quod est secundum. Cum ergo h c & c f sint coincidentes, & rectangula r x p, & a b f tangant hyperbolem, igitur inuicem sunt æqualia, detracta igitur communi a o p c, erunt duæ superficies a r x o, & a b p f æquales. Et cum sint supplementa erunt circa eandem diametrum. Igitur c o cadat in f, quod est tertium. Quoniam ergo c f ad f f, ut c p ad p o, & ideo ut a o ad a c, & ut c f ad f f ita contenti sub c f, f n, quod est quadratum e b ad cõtentum sub f f, f n, erit quadrati e b ad contentum sub f f, f n,

Per 34am undecimi El. uelut o a ad a c, & cõtentum sub n f, f f æquale quadrato f x, propter parabolam assumptam, super n f igitur quadrati e b ad quadratum o b, quod est æquale quadrato x f, uelut o a ad a c, igitur solidum ex a o in quadratum o b est æquale solido ex a c in quadratũ c b, quod fuit demonstrandum. Et fuit quartum, liquet autem quod ratio constructionis huius problematis pẽdet ex his duobus, primum quod assumpto puncto n æqualiter distante a uertice paraboles, qui est f, ita ut paraboles resecet æqualem ex perpendiculari ducta ex n ad parabolem ipsi n f semper ducta ad perpendiculum ex illo axe g f, quantuscunq; sit ad parabolem, media illa est inter n f, & lineam à uertice ad punctum, ex quo perpendicularẽ eduxisti. Alterum pendet ex cõstructione hyperbolis, nam cum ducta ad perpendiculum super axe, & axis inciderint in duas rectas ad perpendiculum illæ in quas incidunt, uocantur coincidentes, & semper faciunt superficies æquales extra contentas. Vt in exemplo sumpto puncto k cum uertice k c est æqualis c b, & sumpto puncto x cum uertice sit x c æqualis eidẽ c b. Ex quo sequitur manifestè quod x c est æqualis k c, ideò hoc euenit, quia semper k est æqualis x l, ubicunq; punctus x statuatur. Apparet ergo quod, pposita a b 12 semper f n erit eadem quia in proportione a d, a b & e b, & ideò $5\frac{1}{3}$. Et si d q t z ponatur 192, erit a c 3, & si 128, erit a c 2, & si 64, erit 1. Et in primo casu x c semper

per erit 36, in secundo 24, in tertio erit 12. Posita ergo f ſ quad. c, ent x ſ in omni caſu res numero ℞ 5 $\frac{1}{3}$, igiť r x erit 12 m: rebus ℞ 5 $\frac{4}{3}$, quia ergo x p eſt æqualis ſ f, erit ſuperficies r p, atq; ideò a f 12 quad. m: cu. ℞ 5 $\frac{1}{3}$, & hoc poteſt eſſe æquale 36 & 24 & 12, uel cuicunq; numero. Cum ergo reduxerimus ad unum cubum, fient in omni caſu 8 quadrata, ſcilicet ducta quantitate a b, quæ eſt 12 per f n, quæ eſt 5 $\frac{1}{3}$, fit 64 tum eſt 8. Igitur ſuppoſita a b ſolum 12, quantumcunque ſit ſolidum d q t z, erunt ſemper 8 quadrata æqualia cubo & numero, qui producitur ducta a c & a b, & producto in ℞ 5 $\frac{1}{3}$, ſi ergo b c ſit 36, erit numerus 6912, & ſi fuerit 24, erit ℞ 3172, & ſi fuerit 12, erit ℞ 168. Et æſtimatio in ſe ducta producet ſ f, quæ ducta in n f, & eius ſumpta radice proueniet ſ x pars quæſita, nam ipſa eſt æqualis o b. Ergo ducta in ſe, & detracta ab a b, & uno in alterum ducto proueniet ſolidum d q t z. Et ideò facilis operatio Geometrica difficillima eſt arithmeticè, nec etiam ſatisfacit.

De inuentione partium trinomij cubici, quod cubum producit cum duabus partibus tantum cubicis. CAP. XIII.

ET dico modo quod ſi aſſumatur trinomium cubicum, ex cuius ductu partium producatur numerus, quod producentur duæ partes tãtum, quæ ſint ℞ cubicæ, ſed in re ſunt tres partes cubicæ incõmenſæ, ut dictum eſt, igitur partes cubi non poſſunt cõtinere partes rerum ſecundum numerum. Ex quo ſequitur quod cum res fuerit ex tribus radicibus cubicis in cõtinua proportione, quod idem ſequetur, nam ℞ cu. 12 p: ℞ cu. 6 p: ℞ cu. 3 producunt quantum media ducta a d cubum, igitur inuicem ductæ producunt ℞ cu. 216, quæ eſt 6. Hoc igitur generaliter ſic demonſtratur. Supponatur trinomium cubicum a b c d, ſolũ cum hac conditione, quod corpus ex a b, b c, c d ſit numerus, cõſtat ergo quod ſunt nouem corpora, quæ ſunt æqualia numero. Reliqua decem octo, fiunt tria, ut dictum eſt, ex a b in quadratũ b c, & ex c d in quadratum a b, quæ dico eſſe commenſa, uelut & ex b c in quadratũ c d. Nam quod



Per 17am ſexti Elem.

℞ cu. 3 ℞ cu. 4 ℞ cu. 18.

1296.	216	972.	729
162.	27	288.	216
48	8	36	27

fit ex a b in quadratum b c, ad id quod fit ex c d in quadratum a b se habet, ut quadratum b c ad id quod fit ex a b in c d, at quadratum b c se habet ad id quod fit ex a b in c d, ut numerus ad numerum, nam ex b c in quadratum suum fit cubus, qui est numerus, & ex b c in rectangulum a b, in c d fit parallelipedum ęquale numero, igitur proportio b c quadrati ad superficiem a b in c d, est uelut numeri ad numerum. ea igitur ratione etiam quod ex b c in quadratum c d, igitur fient duo tantum ℞ cu. incommensæ, at in radice sunt tres, igitur nõ possunt res æquari cubis assumptæ per numerum. At si proposueris partem numerum uelut ℞ cu. 32 p: ℞ cu. 16 p: 2, proueniunt 152 p: ℞ cu. 131072 p: ℞ cu. 128000. Ideò cum sit longe minor proportio quàm partium rei, non poterit cubus æquari certo numero rerum. uide etiam infrà.

Per 32 2^m^ undecimi Elem.

Cap. 51.

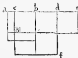
De inuentione generis æstimationis. CAP. XIIII.

Cap. 13. Artis magnæ.



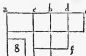
Vm sit constitutum quod æstimatio cubi & numeri sit duplex, aut binomium & suum recisum primum, aut recisum quintum, & ex utraq; fiat æstimatio cubi æqualis rebus & numero necesse est, ut cum ex binomio & suo reciso fiat numerus, & ex reciso quinto, & numero binomium quintum, ut capituli cubi æqualis rebus & numero sit tantũ inuenta ęstimatio binomij quinti ultra numerum. Ideò primum quæramus habita æstimatione cubi & numeri, sed non dati æqualium rebus numerum rerum & æquationis. Proposito ergo binomio primo uel quarto, aut residuo eorum, seu residuo secundo aut quinto, ducatur pars quæ est numerus in se & triplicetur, & ei addatur quadratum partis, quę est radix, & conflabitur numerus rerum. Deinde pro numero ęquationis duplica partem, quæ est numerus, & duc in se, & residuum à numero rerum ducatur in idem duplum numeri, & fiet numerus æquationis. Exemplum ℞ 7 m: 2. Primum duc 2, in se fit 4, triplica fit 12, adde quadratum ℞ 7 fit 7, & totum 19 numerus rerum. Inde pro numero æquationis dupla 2 fit 4, duc in se fit 16, differentia à 19 numero rerum est 3, duc in 4 duplum 2, fit 12 numerus æquationis. Igitur 1 cu. p: 12 æquatur 19 rebus. Huius causa est quòd posita a b re diuisa, quomodocunque in c, ita quod b c sit numerus, & a c alia quantitas, et iuxta quadratum b c addantur duo alia quadrata ei æqualia, & eadem sumantur cum quadrato a c pro numero rerũ illæ res erunt æquales cubo assum-

Vide cap. 5 supra.



ptæ li-

pt æ lineæ a b cum eo quod fit ex duplo b c in differentiam numeri rerũ à duplo quadrati b c, quod sit b d, nam si tria quadrata b c cum quadrato a c sunt numerus rerum, ergo res sunt æquales tribus cubis b c, & triplo a c in quadratum b c, & cubo a c, & parallelipedo ex b c in quadratum a c, detraho igitur cubum a b ex illis corporibus, relinquetur differentia dupli cubi b c, duplo b c, in quadratum a c, at uerò numerus ex supposito fit ex duplo b c in differentiam e f, à numero rerum quæ est quadratum b c, minus quadrato a c, nam quadratum c f continet quater quadratum b c, & numerus rerum continet quadratum b c, ter & insuper quadratum a c, igitur facto g æquali quadrato a c, duplum quadrati b c excedit numerum rerum in gnomone g, at demonstratum est quod res excedunt cubum a b, in differentia dupli cubi a b, ab eo quod fit ex b c in quadratum a c, quod est g, ideo q; in duplo b c in gnomonem, igitur numerus hic additus cubo æquatur rebus. Idem dices si numerus esset minor radice, sed a b residuum, eodem enim modo procedit demonstratio, sed oportet mutare figuras. Idem uerò cõtingit ubi cubus sit æqualis rebus & numero, & sit binomium secundum aut quintum, ut sit numerus rerum triplum quadrati b c, cum quadrato a c erit q; numerus, id quod fit ex duplo c b in differentiam quadrati c f, à quadrato dupli b c, quod sit e f. Erunt enim tres triplum cubo b c, triplum parallelipedi a c in quadratum b c, cubus a c, & parallelipedum ex b c in quadratum a c, detrahãtur hæc octo corpora ex cubo a b, relinquetur differentia cubi a b, ab octo corporibus duplum b c in quadratum a c, à duplo cubi b c, at numerus fit ex supposito ex duplo b c in differentiam c f quadrati à tribus superficiebus quadratis b c, cum quadrato a c, hæc autem est quantum differentia quadrati a c, à quadrato b c, cum triplum quadrati b c sit commune utrisque quantitatibus, fiat igitur g quadratum b c in quadrato a c, cum sit minus ergo numerus æquatur duplo b c in gnomonem g, cubus autem a b excedit res, ut demonstratum est in differentia dupli b c in quadratum a c, à duplo cubi b c, sed duplum b c in gnomonem g est æquale duplo excessus b c in quadratũ a c à duplo cubi b c, quoniam sunt eædem altitudines & superficies, ergo cubus æquatur rebus & numero assumptis.



Ex hoc patet quod hæc æquatio est inæqualis, ideò neq; generaliter potest tradi regula, nam numerus datur duplo parallelipedi corm.

minoris partis in gnomonem, qui est differentia quadratorum partium, liquet etiam quod talis gnomo in omni casu est æqualis rebus solis, ubi partes suppositæ sint dimidium numeri plus una re, & minus una re.

De inuentione partium rei per partes cubi. CAP. XV.


Bi propositę sint partes cubi a c notæ, ex quibus uelis scire quantitatem lineæ a c. Quinque suppositis id ages cognitis. Primum ut scias proportionem partium singularum aut excessum, quæ continetur his regulis. Prima proportio cubi ad cubum est triplicata lateris ad latus. Secũda proportio cubi ad parallelipedum, quod fit ex quadrato lateris sui est ut partium lineæ. Tertia proportio cubi ad parallelipedum alternum est, ut partiũ lineæ duplicata. Quarta proportio parallelipedorum inuicem, est ut partium lineæ. Quinta proportio aggregati cuborum ad aggregatum duorum mutuorum parallelipedum est uelut aggregati quadratorum partium lineæ, detracto parallelogramo ipsarum ad illud parallelogramum. Sexta proportio cubi cum parallelipedo proximo ad parallelipedum alternum, cum alio cubo est ut partium linęę duplicata. Septima proportio aggregati ex cubo & parallelipedo alterno, ad aggregatum ex parallelipedo proximo, & alio cubo est uelut partium lineæ. Octaua differentia aggregati ex cubo, & triplo parallelipedorum alternorum, ab aggregato parallelipedorum trium proximorum, & alterius cubi est cubus differentiæ partium lineæ. Secundum suppositum debet reducere parallelipeda, & cubos semper ad unum præterquam in hac octaua regula, ut unum uni comparetur. Tertium suppositum proportiones partium reducũtur ad proportionem 1 cu. 1 quad. 1 pos. & 1 ipsius proportionis, ita ut 1 pos. sit ipsa proportio. Vnde si quis dicat, fuit parallelipedum 4, & residuum cubi 104, dico tu scis constitutionem cubi, & pones 1 cub. p: 1 pro re p: 1, & habebis 1 cu. p: 3 cu. quad. p: 3 cu. p: 1, & hoc est in proportione ad 1 cu. ut 108, quod fit restituto 4 ad 104, ad 4 ut 27 ad 1. ℞ autem cubica 1 cu. cu. p: 3 cu. quad. p: 3 cu. p: 1, est 1 cu. p: 1, radix cu. 1 cu. est 1 pos. ℞ cu. 27 est 3, igitur 1 cu. p: 1 æquatur 3 pos. Et in hoc supposito ingreditur scientia compositionis cubi ex cubis partium, & sex parallelipedis, quorum tria sunt similia & æqualia, & tria similiter inter se, & quod fiunt ex una parte in alterius quadratum & cognitio extrahendi ℞ cu. & quadratum, & diuidendi per communem diuisorem, cum fuerint plures denominationes. Quartum suppositum

a	b	c

D	E	F	G
27	18	12	8

tum est, ut scias quod cum uolueris iungere aliquas ℞ eiusdem generis aut detrahere, diuides unum per aliud, & accipe ℞ illius generis prouentus, & pro additione adde 1. & pro detractione aufer 1, & quod fit, ducito ad quadratum, si fuit ℞ quadrata, uel ad cubum si cuba, & productum multiplicabis per diuisorem, & quod prouenit est quæsitum. Quintum suppositum est, ut adiuues te cum regulis generalibus Algebraticis, & de modo.

Si quis ergo dicat cubus & duo parallelipeda altrinsecus sunt 24, & cubus alter cum duobus parallelipedis 18, igitur per tertium suppositum 1 cub. p: 2 pos. est sexquitertium 2 quad. p: 1, & æquale $2\frac{2}{3}$ quad p: $1\frac{1}{3}$, & habebis $\frac{10}{27}$, rerum p: $\frac{700}{729}$, æqualia cubo & rei æstimatio cum $\frac{8}{9}$ TPNQ est rei æstimatio.

Et generaliter posito uno cubo, putà a b cum quartis parte nota erit reliquum notum. Quia ab nota: ergo si cubus b c, igitur b c, igitur parallelipeda, uel si parallelipedum, diuiso eo per a b, uel quadratum a b prodibit b c. igitur tota a c.

Ex difficilioribus autem modis primus est cum cubi & tria parallelipeda proxima cognita sunt: habebis tamen rei æstimationem ℞ cubica totius, uelut unum aggregatum sit 48, aliud 16 erit res 4 latus cubicum 64 totius. Secundum adhuc difficilius, cum cubi, & duo parallelipeda, proxima nota fuerint, nam nec licebit æquirem, ut in priore, subiacet tamen inuentioni, & habet æqualitatem. Vltimum est, cum est anomalum, ut aggregatum ex duobus parallelipedis unius generis, & uno uel tribus ex alio genere, uel duo cubi cum uno parallelipedo, uel duobus ex uno genere, alio ex alio genere, uel cubus & tria parallelipeda unius generis cum parallelipedo alterius generis. Et ita de alijs modis inæqualitatis.

Demum est compositio notior cubi cum duobus parallelipedis proximo, & uno remotiore, nam primum talia aggregata sunt in proportione partium lineæ. Et singula eorum habent radicem quadratum, uelut unum sit 20, aliud 80, erit proportio partium lateris totius cubici quadrupla, igitur ponemus unam 1 pos. aliam 4, inde producemus 64 cu. p: 48 cu. p: 12 cu. p: 1 cu. & hęc sunt æqualia 100, res igitur est ℞ cu. $\frac{4}{5}$. Aliter ponemus proportionem 1 quad. erunt partes ut a latere: dissolue in duo aggregata proposita, habebis partes, ut uides. igitur cum sit proportio illarum quadrupla, multiplicabis aggregatum minus per 4, & assumes ℞ quadratum partium quam semper

1 cu. q̄n. p: 3 q̄d' q̄d. p: 3 q̄d. p: 1.
1 cu q̄d. p: 2 q̄d' q̄d. p: 1 q̄d. — 1 cu. p: 1 pos.
1 q̄d' q̄d. p: 2 q̄d. p: 1.
4 q̄d' q̄d. p: 8 q̄d. p: 4 — 2 q̄d. p: 2.
$\frac{1}{2}$ pos.

per habent, quia ab initio habuerunt, & pòst duxisti per numerum, habes igitur 1 cu p:1 pos. æqualia 2 quad p:2, & ideò semper poteris diuidere unum per aliud, habebit ergo $\frac{1}{2}$ pos. æqualia duplæ. Circa quod nota quòd cum 1 cu. p:1 pos. sit æquale 2 quad. p:2 pos. igitur diuidendo unum per aliud, prouenit unum, & iam prouenit $\frac{1}{2}$ pos. igitur $\frac{1}{2}$ pos. est 1, & 1 pos. est 2, & egò posui 1. quad. pro proportione, res ergo redit ad idem. Sed hoc uolui ostendere ob reliqua.

Quòd quadrinomij ex radicibus cub. cubus ad tres partes, quarum duæ sint tantum ℞ cubæ, reducitur aut longè plures. CAP. XVI.

ET sit primò quadrinomium ex ℞ cubicis in continua proportione, in quibus non sit numerus, ut ℞ cu. 3 p: ℞ cu. 6 p: ℞ cu. 12 p: ℞ cub. 24 est: ergo ℞ cub. 24 ad ℞ cu. 3 triplicata proportio, at 6 ad 3, ut ℞ cu. 6 ad ℞ cu. 3 triplicata, igitur ℞ cu. 3 est dimidium ℞ cu. 24, igitur faciũt ℞ cu. quæ est ℞ au. 81, sed ℞ cu. 81 ducta in ℞ cu. 72, productum ex ℞ cu. 6 in ℞ cu. 12, producit ℞ cu. 729, scilicet 9 duplicatam, igitur per supradicta quadrinomium illud reductum ad cubum non habet nisi duas ℞ cub. ideò res non possunt æquari cubo. Ostendo modo quòd ex producto ex cu. 72 in ℞ cu. 81 fiat numerus, quia per dicta productum ex ℞ cu. 3 in ℞ cu. 6, inde in ℞ cu. 12, cum sint in continua proportione. Pariter ex ℞ cu. 6 in ℞ cu. 12, & exinde in ℞ cu. 24 fit numerus: igitur ex producto ℞ cu. 6 in ℞ cu. 12 in ℞ cu. 3, & in ℞ cu. 24 fiunt numeri, ergo in aggregatum fit numerus, quod erat demonstrandum.

Si uerò inter illas ℞ cub. sit numerus, uelut ℞ cub. 2 p: ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 8 p: ℞ cu. 16. Idem contingetut palam est, producuntur enim ℞ cu. 128 & 4, & reliquæ omnes illis commensæ sunt, ut facilè demonstrari potest, idem fiet in trinomio solo ex ℞ cu. 16 p: ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 2. Et eo magis ut de hoc nõ sit dubitatio, quia sumus in casu priore.

Si uerò sint tales, ut duæ in quadratum alterius producant numerum iam cõmensæ sunt. Et ideò non sunt amplius quatuor, sed tres: si una ℞ alterius nihil refert in hoc casu, capiamus ergo ℞ cu. 2 ℞ cu. 3 ℞ cu. 4 ℞ cu. 5. Et manifestum est quod fiunt plures ℞ cu. non commensæ quam quatuor reducendo ad cubum. Ergo nullum quadrinomium ex ℞ cubicis non est idoneum.

Quot modis numerus pòsit produci ex non numero. CAP. XVII.

PRimum numerus quilibet producitur ex his numeris, à quib. diuidi potuit. Et ita si uolo diuidere 10, potest diuidi per numerum alogon qui cõstet ex quatuor radicibus incommensis,

commensis,

commensis non tamen ultra etiamsi sit una pars numerus. Et si sint ℞ cub. non ultra tres. Et fit hoc per recisa, ut in tertio lib. operis perfecti, uelut si diuidens sit ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2, inuenies suum recisum, ut uides. Et ita si uolo diuidere per ℞ cu 4 p: ℞ cu. 3 p: ℞ cu. 2, ut docuit Scipio Terrus Bononiensis. Et manifestum est quod

Exemplum primum
℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2
℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 3 m: ℞ 2
6 p: ℞ 120 m: ℞ 24

Exemplum secundum
℞ cu 4 p: ℞ cu. 3 p: ℞ cu. 2
℞ cu. 16 p: ℞ cu. 9 p: ℞ cu. 4 m: ℞ cu. 12 m: 2 m: ℞ cu. 6
Productum 9 m: ℞ cu. 648
81 p: ℞ cu. 4199645 ℞ cu 472392
Diuisor 81.

assumuntur quadrata illarum p: & producta inuicem pro m. Productum autem est aggregatum cuborum partium. 1. 4 & 3 & 2, quod est 9 m: ℞ cubica tripla ei quę fit ex prima in extremam, scilicet ℞ cu. 24, quæ triplicata producit ℞ cu. 648. Et eadem ratione inuenies suum trinomium eodem modo, ut uides ducendo partes in seipsas & inter se. Et ita conficies numerum diuisorem. Sed hæc ut dixi alio pertinent.

Hoc ipsum est quod uolebam docere, scilicet quod ubi non possis diuidere numerum propter multitudinem partium, sufficiet supponere, uelut uolo diuidere 10 per ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2 p: sufficiet supponere diuisorē diuidendo, & habebis
10
℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2 p: 1

Et cum hoc potes operari multiplicando, diuidendo, addendo & detrahendo ad unguem, sicut in fractis numeris fieri solet. Velut uolo diuidere 20 per hunc numerum exibit ℞ 24 p: ℞ 20 p: ℞ 12 p: ℞ 8 p: 2. Et ita habes quod 10 producitur ex quibusuis numeris diuidentibus cum suo alterno.

At propriè fit primo ex quibusuis binomijs & recisis, quorum differentia partium est in se ductarum, est ille idem numerus, uelut ex ℞ 11 p: 1 & ℞ 11 m: 1, & ℞ 12 m: ℞ 2 & ℞ ℞ 12 p: ℞ 2, & ita de alijs, & ita potest produci ut 4 p: ℞ 6 & 4 m: ℞ 6 & 5 p. ℞ 15 & 5 m: ℞ 15.

Secundo potest produci ex binomio, & reciso proportionem habentibus, ut 4 p: ℞ 12, & 2 m: ℞ 3, producunt enim 2, proposito ergo, quouis binomio uel reciso inuenias suum alternū, & duc inuicem, & producto diuide numerum propositum, & id quod exit, duc per secundò inuentum, & habebis quæsitum, uelut uolo inuenire numerum qui ductus per 3 p: ℞ 7, producat 10 inuento 3 m: ℞ 7, & ductis inuicem fit 2, diuide 10 per 2, exit 5, duc 5 in 3 m: ℞ 7, fit 15 m: ℞

175, duc

175, duc 15 m: ℞ 175 in 3 p: ℞ 7, fit 45 m: ℞ 1225, cuius ℞ est 35, detrahe à 45, relinquitur 10.

Tertio, fit ex fractis eodem modo, quo in primo ℞ $17\frac{1}{5}$ p: ℞ $3\frac{1}{5}$ in ℞ $17\frac{1}{3}$ m: ℞ $7\frac{1}{3}$, producunt 10, & ita in numeris, uelut $3\frac{1}{6}$ p: ℞ $\frac{1}{360}$ & $3\frac{1}{6}$ m: ℞ $\frac{1}{360}$, & ita in alogis, uelut $3\frac{1}{3}$ p: ℞ $\frac{6}{25}$, & $3\frac{1}{5}$ m: ℞ $\frac{6}{25}$.

Quarto, si uelis duos numeros quorum quadrata differant in 10 facilè hoc est cum quouis numero, exemplum capio 2 & 10, duc 2 in se fit 4, detrahe à 10, remanent 6, diuide per 2 exit 3, huius dimidium per se sumptum & additum ad 2, producit quadrata quorum differentia est 10, nam quadrata $3\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ differunt in 10. Similiter capio $2\frac{1}{5}$ duco in se, fit $4\frac{21}{25}$, detraho ex 10 relinquuntur $5\frac{4}{25}$, diuide per $2\frac{1}{5}$, & est ac si diuidas $\frac{129}{25}$ per $\frac{11}{5}$, quod est ac si diuideres 1295 per 55, exeunt ergo $2\frac{19}{55}$, cuius dimidiũ est $1\frac{19}{110}$, adde ad $2\frac{1}{5}$, fiet $3\frac{41}{110}$ & $1\frac{19}{110}$, producunt quadrata quorum differentia est 10.

Producitur insuper à numeris simplicibus quibuslibet, qui sunt in ordine eodem, & producunt numerum iuxta naturã eius, ut à ℞ 10 in se, & à ℞ ℞ quauis, quæ ducta in aliam ℞ ℞, producat ℞ 100, & ab analogis ut ℞ 20 in ℞ 5, producunt 10, quia proportio ℞ 20 ad ℞ 10 est ut ℞ 10 ad ℞ 5. Et proportio ℞ 50 ad ℞ 10, ut ℞ 10 ad ℞ 2. Et quæuis ℞ cubicę inuicem ductę producentes 1000, cubum 10, ut ℞ cu. 1000 in ℞ cu. 10, ℞ cu. 200 in ℞ cu. 5, & ℞ cu. 50 in ℞ cu. 20. Et ita 10 ꝓducitũ ab omnibus ℞ relatis ꝓducentibus 100000 ℞ primũ 10.

Quod ultima diuisio cubi non satisfacit capitulo proposito. CAP. XVIII.

Porrò, ultima diuisio cubi superius data, licet sit speciosa
Cap. 15. ualde non satisfacit capitulo proposito, uti neq; æstimatio binomiorum uel recisorũ primi uel quarti ordinis, nec recisorum secundi uel quinti. Sed nec ęstimatio differentię ℞ cub. nec ℞ quadrata aut cuba differt à numero per ℞ quadratam aut cubam aliter recisum esset æquale radici simplici, quod esse non potest, sed est differentia recisum. Sed ueniamus ad aggregata, quorum unum parti sit æquale numero, si capitulum debet esse generale & diuisio utilis, igitur hoc modo triplex est radix quadrata cubica & corporea. Quadrata est per rationem compositionis ex duabus partibus, atq; duabus uelut diuiso cubo 125 in 100, & 25 radix quadrata 100, est composita ex 8 & 2, & tota est 10, & quadratum 8 est 64, & quadratum 2 est 4, & duplum 8 in 2 est 32, qui omnes iuncti faciunt 100. Et ita est compositum ex quatuor corporibus 64, 16. 16 & 4. Et ita reliquę partis quæ est 25 radix, est 4 & 1, & corpora 16, 4. 4 & 1, quæ sunt 25. Proportio igitur partium est ut partium cubi, nam 8 ad 2, & 4 ad 1,

4 ad 1, ut 100 ad 25. Et ita si 1 cu. æquetur 6 rebus p:6. Rei æstimatio est ℞ cu 4 p:℞ cu.2, & si uelimus dare corpus unum ipsi numero, id est ipsi 6 reliquum rebus erit illud ęquale necessariò ℞ 864 p:℞ cu. 432. Igitur qualis proportio ℞ cu.864 p:℞ cu. 432, ad 6 talis partiũ ℞ quadratæ 6 inuicem. Quare ut ℞ cu.864 p:℞ cu.432 p:6 ad 6, ita ℞ 6 ad partem radicis minorem per compositum proportionem igitur ducto 6 in ℞ 6, & producto quod p:℞ 216, diuiso per ℞ cub. 864 p:℞ cub.432 p:6, exibit pars illa. Diuido ergo ℞ 216 per ℞ cub. 864 p:℞ cu.432 p:6, & assumam suum recisum, quod est ℞ cub.432 m:6, & ducam cum priore, & fit 36 diuisor, ergo diuidendum esset ℞ 216, ductum in ℞ cub.432 m:6, quare diuidam ℞ 216 per 36, exit ℞ $\frac{1}{6}$, id duco per ℞ cu,432 m:6, & producitur ℞ cu.6, quad.864 m:℞ 6 pars minor, quare maior est ℞ 24 m:℞ cu. quad.864. Hæc nolui addere tanquam milia ad institutum, sed ob operationem.

SCHOLIVM.

Ex hoc habetur quòd cùm duæ radices cubicæ, fuerint in continua proportione cum numero, radices illæ inuicem ductæ, producunt numerum, sint a b c in continua proportione, & sit a numerus, & b c ℞ cub. dico productum b in c esse numerum subiungatur d in continua proportione, eritq; d ad a, triplicata ei quę est b ad a, at b ad a est uelut ℞ cu. ad numerum, igitur d ad a est ut numeri ad numerum, sed a est numerus, ergo d est numerus: igitur productum d in a est numerus, sed id est æquale producto ex b in c, quia quantitates sunt in continua proportione, igitur productum b in c est numerus. Hoc dixi, ut ostenderẽ ℞ cu.864, ductum in ℞ cu. 432, producere numerum scilicet quantum producitur ex 6 in 12 quartam quantitatem, quæ est in continua proportione scilicet 72, à quo detracto 36 m: relinquebatur 30, ut fuit assumptum in supposito.

a	num.
b	℞ cub.
c	℞ cub.
d	

Secundum genus ℞ est cubicum, de quo toties actum est. Sed hic non est in proposito.

Tertium autem genus uocatur corporeæ radicis, & est uelut diuidendo 125 cub.5 in 75 pro 15 rebus, & 50 pro numero, & radix est eadem utriq; parti, & etiam toti scilicet 3 & 2, & fiunt quatuor corpora utrinque cubus, & productum alterius partis in quadratum propriũ 615, & productum eiusdem in quadratum alterius semel: cum ergo una pars supponatur numerus, erit diuisio illa ad hoc, ut cubus eius sit cubus partis eius radicis, aliter diuisio esset inutilis: quare pars illa est numerus necessariò, aut ℞ cu. numeri, cum ergo reliquæ partes ponantur quadrata

3/	27	.	8	/2
	18	.	12	
2/	18	.	12	/3
	12	.	18	
	75	.	50	

drata eius ℞ cu. ducta in aliam, erũt numerus rerum, & quadratum æqualia numero, igitur erit secunda pars, aut numerus, aut recisum, ergo æstimatio rei non potest esse generalis: quia (ut dixi) æstimatio est capituli, & totius & partis, ergo nihil profecimus. Si uerò prima pars sit ℞ cub. uelut 1 cu. æqualis est 6 rebus p: 6, & ponatur prima pars ℞ cu. 3. Ponemus secundam 1 pos. igitur partes erunt 3, scilicet cubus ℞ cu. 3, & reliquum quad. ℞ cu. 3 p: pos. ℞ cu. 72, nam ducendo 1 pos. secundam partem in quadratum primæ partis, quod est ℞ cu. 9, nam prima pars fuit ℞ cub. 3, fiunt res, ℞ cub. 9, & quia assumimus duplum illius quadrati, erunt res numero ℞ cub. 72, & hoc est æquale 3, residuo 6 detracto cubo primæ partis scilicet 3, igitur reducendo ad 1 quadrata, id est diuidendo per ℞ cu. 3, fiet igitur 1 quad. p: rebus ℞ cu. 24, æqualia ℞ cu. cuius, sequere capitulum, & erit rei æstimatio ℞ ℞ cub. 72 m: ℞ cu. 3. Esset igitur una pars, scilicet maior ℞ cu. 3, minor ℞ ℞ cu. 72. m: ℞ cu. 3. Et res ipsa ℞ ℞ cu. 72. At constat quòd cubus huius non potest esse æqualis 6, rebus p: 6, sed neque ulli numero rerum, cum numerus non possit æquari ex ℞ cu. quare hæc diuisio licet speciosa non potest generaliter satisfacere, ita simpliciter sumpta. Quod autem necesse sit ad hoc genus quantitatis simplicis ℞ ℞ cub. deuenire demonstro. Nam posita a prima parte, & b secunda, assumitur numerus rerum in creatio corporis in duplo quadrati a, quod sit c, & numerus quadratorum est a, igitur ut numerus quadratorum deducatur ad unũ oportet diuidere per a, ergo etiam oportet diuidere per a, quia ergo c est duplum quadrati a, diuisum c per a, exibit duplum a, quod sit d, igitur numerus rerum, quæ cum quadrato æquantur numero cuius qui sit e, erit d duplum a, at in capitulo inueniendæ æstimationis quadrati, & rerum æqualium numero oportet ducere dimidium numeri rerum in se, numerus autem rerum fuit d duplum a, igitur oportebit ducere a dimidium d in se, & addere ipsi numero e, & totius excipere ℞ a, qua detrahemus dimidium numeri rerum i. ipsum a ℞ erit æstimatio secundæ partis semper ℞ quad. ℞ cub. aggregati ex quadrato a & e diuiso, per a detracto a, sed prima pars est a, igitur tota æstimatio est ℞ quadrata aggregati duarum ℞ cu. scilicet a in se ducti, & e diuisi per a. Ita ergo posito numero e. 8. ut dixi, & a ℞ cu. 2 sufficiet, ducere ℞ cu. 2 in se, fit ℞ cu. 4, & detrahere 2 cub. ℞ cu. 2, ex 8 relinquitur 6, hoc diuide per ℞ cu. 2, exit ℞ cu. 108, hoc autem est commensum ℞ cu. 4, ideò iunctæ faciunt ℞ cub. 256, igitur secunda quantitas b p: ℞ cu. 256 m: ℞ cu. 2, sed a fuit ℞ cu.
Per Cap. 10. 2, igitur tota res est ℞ ℞ cu 256. Non est igitur idonea hæc diuisio.

a	c	d
b		

a	c	d
b	e	

SCHOLIVM II.

Dico igitur quod duę illę ℞ cubicæ, scilicet quadratum a,& residuum e,quod est numerus (quia e est numerus,& cubus a est numerus) diuisum per a facit commensum. Quia enim diuiso cubo a, qui est numerus, exit quadratum a,quod sit b,& diuiso c numero qualicunque per a exit d,sit autem cubus a e, erit e,ad c ut b ad d, quare cum c & e sint numeri ex supposito,erit b commensum d,quod est propositum.

| e |
| a c |
| b d |

Constat etiam ex hoc quod diuiso cubo æquali 10 rebus p: 8 in duas partes,ut in ultimo modo & supposita una parte rei 1 pos. erit reliqua pars ℞ $\frac{8}{pos}$ m: 1 pos.hac igitur ducta ad cubum & in quadratum alterius semel,& quadrati duplo etiam in eandem fiet totum æquale 10 rebus primis, at 10 res primæ sunt decuplum utriusque partis rei 1 ℞ $\frac{800}{pos}$.Et ideo hoc erit æquale illi parti cubi compositę ex illis quatuor partibus dictis.Et quia proportio rerũ ad numerum est sicut proportio partium rei inuicem,& proportio rerum ad numerũ est manifestè $1\frac{1}{4}$ ipsius rei.Ideo oporteret facere ex 8 duas partes eo modo,ita ut ducta minore in totum cum quarta parte produceret maiorem.dico de radicibus cubicis.

De æstimatione autem binomij primi aut quarti, uel recisorum ratio est,quia tria quadrata numeri & unum radicis necessariò sunt maiora tribus quadratis radicis & uno numeri, quia in his numerus semper est maior radice, ergo cum uolueris æquare radices, ut cadant,numerus in rebus superabit numeeum in cubo,& ita cubus non poterit æquari rebus & numero,sed res potius cubo & numero. Et ita in reciso secundo & quinto , apparet ratio dum deduces, & formabis cubum ex partibus.

De cubi radice posita 3 & ℞ cu.2, differentia partium est 3 m: ℞ cu.2, detracta enim b c ex a b,relinquitur a c. Ergo differentia a b, quæ est 3, & a c quæ est 3 m: ℞ cub.2,cum sit b c,manifestè erit ℞ cu.2. Tanta uerò est 3 p: ℞ cu.2 a 3.Ergo nulla ℞ differt à numero in radice.



Ex his tandem patet quòd non datur æstimatio generalis pro capitulo cubi æqualis rebus & numero in parte ea quæ nondum est inuenta, sed dantur multæ æstimationes, quæ simul iunctæ satisfaciunt,ut si sciri posſit, nondum cognita sit generaliter.

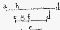
Quod ubi æſtimatio ſatisfacit, quouis modo diuidatur cubus ſatisfacit: ſi non, non. CAP. XIX.

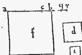
PRopono ergo iſtud, quòd ſi ℞ cu. nõ ſatisfacit gratia exempli aut ℞ q̃d q̃d. cum ℞ cub a, quomodo uis diuidatur cubus, nunquã ſatisfaciet. Item dico, quòd ſi 1 cub. æqualis ſit 6 rebus p:6, & rei æſtimatio dando numeros cubis ſit ℞ cub. 4 p: ℞ cu. 2. Eadem æſtimatio ſatisfaciet diuiſo cubo in duas partes, quomodo uis. Non tamen ſequitur quò d ſi hæc quantitas ut pote ℞ cu. 4 p: ℞ cub. 2, ſic diuiſa non ſatisfaciat cubo diuiſo in corpora ſimilia non ob id ſit ęſtimatio, ſatisfacit tamen alio modo, ut à latere uides. Ergo ſi cubus æquatur 9 rebus p:9, cum ſit alia æſtimatio, poterit ſatisfacere iuxta quamcunque diuiſionem, ſed non ut ipſa diuiſa eſt, & iuxta quamcunque diuiſionem, ſed non ut cubus erit diuiſus.

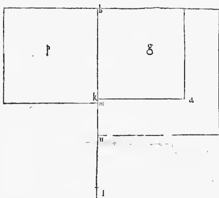
℞ cu 64	℞ cu. 8
℞ cu. 256	℞ cu. 128
℞ cu 16	℞ cu. 32

Data linea quomodo quadrifariam diuidatur in duas partes, ut ſit proportio unius ad productum totius in alteram data. CAP. XX.

SIt data a b quam uolo diuidere ita in puncto h, ut ſit proportio a b & a h ad b h, ut c d ad e, abſcindo d f æqualem e, & diuido e f per æqualia in g, & facio ut g d ad d f, ita a b ad b h, cum ergo ſit ita, erit g d ad g f, ut a b ad a h, quare coniungendo a b a h ad a h, ut g d g f, quare ut c d ad g f, at rurſus a b ad b h, ut g d ad d f. igitur diſiungendo a h ad h b, ut g f ad f d, quare per eam quam uocant proportionem æquam c d ad d f, ut a b a h ad h b. Secundo uolo diuidere a b in c, ut ſit quadrati a c ratio, ad id quod fit ex a b in b c, ut d ad e, facio g quadratum ad f, ut d ad e. Et rurſus facio per eandem h l ad h k, ut h k ad a b, critq; h l ad a b, ut d ad e, & ſit h m dimidium h l, & eius quadratũ p, cui æqualem gnomonem circumpono quadrato g, ita ut totum quadratum quod uocetur o, ſit æquale quadratis g & p, facio igitur a c æqualem m n, dico a b rectè eſſe diuiſam in c. Quadratum enim h n, cum ſit æquale quadratis h k & h m, & quadratis h m, m n, & duplo h m in m n detracto communi quadrato h m relinquetur quadratum g æquale quadrato m n, & duplo m n in m h, quare quadrato m n, & ei quod fit ex m n in h l, ſiquidem h m eſt dimidium h l. cum igitur ſuppoſuerimus





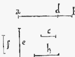


rimus a c æqualem m n, erit quadratum a c cum eo quod fit ex a c in h l æquale quadrato g, igitur quadratum a c cum eo quod fit ex a c in h l, habet proportionem ad quadratum f, quam habet d ad e, nam talem habuit quadratum g ad ipsum quadratum f. Addo ad a b, 69 ei æqualem, & 92 ad quam sit proportio, ut a c ad 69. Cum ergo quadratum a b sit æquale quadratis a c, c b & duplo a c in c b, at duplum a c in c b est æquale ei quod fit ex a c in c q, quia c q est duplα b c, & quadratum b c est ęquale ei quod fit ex a c in 92, erit quod fit ex a c in a r æquale quadrato f, igitur quod fit ex a c in se & in h l se habet ad id quod fit ex a c in a r, ut d ad e. Quare h l & a c ad a r, ut d ad e. At quia a c c b, & 92 sunt in continua proportione ex supposito erit coniungendo a b ad 62, ut a c ad c b. Igitur quod fit ex b r in a c, est æquale ei quod fit ex a b in c b. At proportio quadrati a c ad id quod fit ex a c in b r est ueluti a c ad b r, ergo proportio a c ad b r est ueluti quadrati a c ad id quod fit ex a b in b c. At proportio h l & a c ad a r est ueluti a c ad b r, quia h l ad a b fuit, ut d ad e, & h b cum a c ad b r, ut d ad e, igitur h l cum a c ad a r, ut h l ad a b, quare permutando h l cum a c ad h l, ut a r ad ab, igitur disiungendo h l ad a c, ut a b ad b r, quare rursus permutando h l ad a b, ut a c ad b r, sed h l ad a b,

ut d

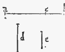
ut d ad e, & a c ad b r, ut a c quadrati ad id quod fit ex a b in b c, igitur a c quadrati ad id quod fit ex a b in b c, ut d ad e.

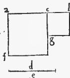
Tertiò, proponatur eadem a b, & data ratio ad monadem c, uolo diuidere a b in d, ut sit ratio rectanguli a b in b d, ad lineam a d, qualis c ad f. Potest & generalius proferri: ut quod fit ex a b in b d, ad id quod fit ex a d in c habeat proportionem e ad f. Quod est ut rectangulum a b in b d æquale sit rectangulo ex a d in h, quæ h se habeat ad c, ut c ad f: adeò ut reducatur ad hoc, & est generale, diuisa a b in d, ut sit proportio a b ad h, ut a d ad d b. Hoc autem est quasi per se manifestum, nam coniunctis h & a b, ut fiat a b h ad h, ita a b ad b d erit disiungendo ad d b, ut a b ad h.



Quartum est, ut diuidamus a b, datam in c, ut sit ratio cubi a c, ad id quod fit ex a b in quadratum b c, aut b c in quadratum a b, ut d ad e. Et dico quòd oportet, ut in primo casu proportio a c ad c b, habeat rationem duplicatam a b ad a c. Et in secundo, ut ratio a b ad a c sit duplicata ei quæ est a c ad c b. Et quia in prima quæstione reducitur res ad cubũ, cum rebus ęqualia numero, & istud est cognitum, ideò declarabo solum secundam, ut proponatur quòd cubus a c sit nona plus producto a b in b c, & describam quadrata a c & b c, & quia si essent æqualia, essent basis a f c & b e g in proportione a b ad a c, quare a b ad a e duplicata ei quæ est a c ad c b, cum igitur sit d ad e nonupla, erit a f c ad b c g nonupla eius quæ est a b ad a c. Nam si 216 eit nonuplum ad 24, & 24 cõstat ex 24, & 216 ex 36, & 6 proportio 36 ad 1, est nonupla eius, quæ est 24 ad 6, si ergo posuerimus a c unũ q̃dratũ, & b c 4 m: quadrato uno, erit cub. a e cub. q̃d. & b c q̃d. 16 p: 1 quad. quad. m: 8, quad. Si igitur proportio d ad e sit nonupla, erit 1 cu. quad. æqualis 576 p: 36 quad. quad m: 288 quad. & si proportio d ad e sit sexdecupla, erit 1 cub. q̃d. æqualis 5024 p: 64 q̃d. quad. m: 52 q̃d. Igitur in primo casu accipiendo radices quadratas partium habebimus 1 cu. æqualem 24 m: 6 quad. Et in secundo 1 cu. æqualem 32 m: 8 quad. & si essent æquales, esset 1 cub. æqualis 4 m: 1 quad. habes igitur æstimationes, ut uides quatuor æqualis quadruplæ

Per 34 undecimi El.





druplæ nonuplæ sexdecuplæ. Cum ergo prima tria exempla solui possint ex capitulo, ultimum non possit, & demonstratio Geometrica sit uniuersalis, patet eam non esse generalem rationem capituli ad inueniendam æstimationem, sed esse longè meliorem.

1 cu. p: 2 qd. æql. 8
1 cu. p: 4 qd. æql. 16
1 cu. p: 6 qd. æql. 24
1 cu. p: 8 qd. æql. 32.

Demonstratio ostendens æquationis necessitatem.

CAP. XXI.

Et proponatur a b diuisa in c, & per præcedentem est una demonstratio proportionis cubi a c, ad solidum ex a b in quadratum b c in parte cognita & incognita, ubi proportio est maior sed parum, aut minor semper nota, at hæc proportio composita est ex duabus quarum una est nota altera data: nota quidem est ex præcedenti proportio cubi a c ad solidum ex c b in quadratum a b, cum sit cubi & rerum æqualium numero generalis, alia est data solidi b c in quadratum a b ad solidum, ex a b in quadratum b c, semper uelut c b ad b a, fiunt enim illa ex rectangulo eodem a b in b c, alterum iuxta altitudinem a b, alterum iuxta altitudinem b c, cum ergo interposito solido ex b c in quadratum a b, inter cubum a c & solidum a b in quadratum b c, componetur proportio cubi a c ad solidum a b in quadratum b c, quomodolibet constat propositum.

a d c b

Per conuersam 32 undecimi El.

Per secundam propositionē lib. de Propor.

PARADOXVM.

Ex hoc patet quòd diuisa linea inter puncta data, in proportione data cubi partis unius ad solidum ex tota in alterius quadratum, ut sit proportio horum solidorum (quæuis linea sit aut pars) data & cognita quantitate partium sub uno numero diuisæ lineæ, non erit cognita quantitas earundem partium sub eadem diuisione, sed mutato solum numero seu denominatione assumptæ lineæ. Et hoc contingit, quia ultima pars præcedentis propositionis non est perfectè nota: quia quantitates natura similes non possunt esse in proportione lineæ, uelut linea ad lineam superficies ad superficiem, & corpus ad corpus non possunt esse in proportione unius lineæ, sed lineæ ad lineam: ut uisum est in libro de Proportionibus. Dico ergo quòd si data est a b inter duo puncta data, & proportio cubi a c ad solidum a b in quadratum c b secundum totam lineam a b, uel secundum quamlibet illius partem, ueluti a d ut omnia hæc sint data & immota nihilo minus, si constituamus a b totam sub numero partio putà quatuor aut sex, perueniemus per ultimam partem præce- *Propos. 34*

FF dentis

dentis quãtacunq; ſuppoſita a d modò ſit pars a b ad cognitionem a c, quia peruenicmus ad 1 cu.p: quadratis, nõ pluribus quam quatuor æqualibus numero alicui, qui poterit conuenire æquationi iam cognitæ. Et ſuppoſita a b centum exempli gratia, licet ſit cadem linea, quæ prius nec maior, & proportione ſub eadem a d, poterit eſſe ut perueniamus ad æquationem eiuſdem capituli, & non cognitam. Et hoc eſt (quia ut dixi) proportio talium ſolidorum, non poteſt eſſe uerè linea a b, neque a d, ſed uel ut linea a b uel a d ad aliquam aliam lineam, aut ſimpliciter denominationis a b uel a d, quæ ſumitur in comparatione admonadem. Vnde ſi quis inueniat demonſtrationem, ut dixi, ueram proportionis cubi a c ad ſolidum ex a b in quadratum c b, ſecundum lineam a d, tũc inuenta æſtimatione ſub a b denominata, ut decem inueniretur ſub denominata ut centum. Et ita ſub duobus inueniretur ſub decem, & eſt mirabile pulchrum & arduum.

De contemplatione p: & m: & quòd m: in m: facit m: & de cauſis horum iuxta ueritatem.
CAP. XXII.

CVm dico 6 p:2 clarum eſt, quod eſt 8 ſecundum rem: ſed iuxta nomen eſt compoſitum ex 6 & 2, & ſimiliter cum dico 10 m:2, ſecundum rem eſt 8, iuxta nomen autem eſt 10 detracto. Et ideò in operatione quod ad finem attinet 6 p:2 debet producere 64, quia 8 in ſeductum producit 64, & ita 10 m: 2, quia eſt 8, debet producere idem 64. Sed quod ad modum operandi, quia 8 eſt diuiſum in 6 p:2, ſeu in 10 m:2, oportet operari per quartam ſecundi Euclidis. Et in 6 p:2 eſt manifeſtum, ut in figura ponatur a b 6 b c 2, ſient a d 12 d e 4, d f 12, d e 36. totum igitur 64, et de hoc non eſt dubium, ſed ſi ponatur a c 10 & b c 2 m: erit quadratum a c nihilominus 64, id eſt quadratum d e, quia a b uerè eſt 8. Eſt ergo ac, ſi quis diceret habes agrum decem pedum quadratum, cuius duo pedes ſunt alterius, & quadratum partis tuæ eſt, tuum reliquum totum eſt alterius, igitur tu habores d e ſolum, quod eſt 64, & gnomo illæ g b f eſſet alterius, & eſſet 36, ut liquet.

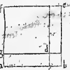


Cauſa ergo diuiſionis in p: uel m: eſt duplex, nam ſi eſſent eiuſdem naturæ, ut 6 & 2, uel 10 & 2, uel 6 & $\frac{1}{2}$ aut 10 m: $3\frac{1}{2}$, ſtultum eſſet & ſuperfluum dicere 6 p:2, aut 6 p: $\frac{1}{2}$ aut 10 m: 2, aut 10 m: $3\frac{1}{2}$, ſed deberemus dicere 8 m: 6 p:2, aut 10 m: 2 uel $6\frac{1}{2}$ in 6 p: $\frac{1}{2}$ uel 10 m: $3\frac{1}{2}$, & eſſet facilius

pro

pro multiplicatione & diuisione. Et præcipuè quod in diuisione semper oportet reducere quantitatem significatam per plura nomina, seu p: seu m: ad unam simplicem quantitatem. Sed caussa talium nominum p: seu m: est, uel quia quantitas quæ additur uel detrahitur, non est eiusdem naturæ cum prima, ut 6 p: ℞ 2, aliter binomium esset rhete aut alogum, id est numerus aut radix numeri, quod demonstratū est ab Euclide esse non posse. Et ita 6 m: ℞ cu. 7, quia sunt diuersarum naturarum, nec possunt significari uno nomine, necesse fuit iungere illas quantitates per p: uel m: nec etiam possunt significari uno nomine per uiam ℞: nam 6 p: ℞ 2, & ℞ v: 38 p: ℞ 288, & licet uideatur, simplex est tamen ℞ unius compositi numeri seu quantitatis, id est 38 & ℞ 288. Secunda causa est cum secunda quantitas, aut tertia adiuncta uel detracta est ignota, uelut si dicamus 6 p: 1 pos. licet enim poneremus quod positio esset 2, & ita totum hoc esset uerè 8, quia tamen nescimus quanta sit positio, ideò cogimur dicere 6 p: 1 pos. 10 m: 1 pos. ex quo constat quod in primo casu nunquam nisi per fortunam multiplex potest reduci ad unam naturam, neque enim ut dictum 6 p: ℞ 2 potest effici unus numerus, nec unius naturæ, sed in secundo casu aliquando potest, aliquando non. Vt si dicamus 10 m: 1 pos. & pos. sit 2, tunc æquiualeret 8. At si positio esset ℞ 2, uel ℞ cub. 3 manifestum est quod nunquam posset reduci ad unam naturam, sed æquiualeret semper binomio, uel reciso, uel aliæ quantitati alogæ, ut 6 m: ℞ 2, 6 m: ℞ cu. 3. Dixi in primo casu quod aliquando tamen quantitas multiplex æquiualet simplici, & hoc maximè accidit in ℞ v: & abstrusis, uelut declaratum est à nobis in Arte magna, quod ℞ v: cu. ℞ 10,8 p: 10 m: ℞ v: cu. ℞ 10,8 m: 10, idem est quod 2. Et hoc etiam accidit in quadratis, ut ℞ v: 6 p: ℞ 9 est 3. Ergo ut dixi ob duas illas causas necesse fuit ponere p: & m. Cap. xxi.

Hoc uiso cum operatio p: sit clara, & demonstratis ab Euclide in secundo Elementorum reliquum est, ut ostendam illud idem de m: & ponatur ab 10, ut prius & b c 2 m: liquet ergo quod a c uerè est 8, & eius quadratum d f erit 64, sed totus residuus gnomo est, ut dixi perinde, ac si b c esset alterius, ideoque totus gnomo etiam illius, ut ostendam, & constat quod ille gnomo per eandem propositionem fiet ex a c in c b bis, & sunt rectangula ad d e cum quadrato b c: iste autem gnomo totus est 36, quia a c quadratum est 100, & f d 64, igitur g c e gnomo residuus est 36, & a d & d e sunt m: & sunt 32, & gnomo est 36 m: igitur quadratum b c, quod est 4, est etiam m: Propos. 4.



4. secundi Elem.

nam si esset p: non esset gnomo m: nisi 28, & d f 72, & a c ℞ 72, et non ℞ 64, quod est 8: igitur quadratum b c est m: & fit ex m: in se ducto, igitur m: in se ductum, producit m: & similiter statuatur a b 10, & b c m: 2, erit ergo uerè a c 8, et ponatur a f 4, & a g 1 m: gratia exẽpli, erit igit̃ uerè f g 3, quare f d 24, tota autẽ a e superficies est 40, igitur gnomo g c est 16 residuũ, & fit ex a c in c d, ideoq́ superficies adest 8, & ex b c in g f, superficies d e b, & ex b e in c d, & est 2, quod totum est 16, sed hoc est m: quia est differentia productorum 10 in 4, & 10 m: 2 in 4 m: 1, igitur tam m: in m: id est b c in c d, quarum utraque est m: producit b d m: quæ est 2 quàm a c p: in c d m: & b c m: in f g p: quæ ex confesso apud illos producunt m. Et ideò patet communis error dicentium, quod m: in m: producit p: neque enim magis m: in m: producit p: quàm p: in p: producat m. Et quia nos ubiq; diximus contrarium, ideò docebo causam huius, quare in operatione m: in m: uideatur producere p: & quomodo debeat intelligi. Supponamus ergo in secunda figura quòd a b sit 20, ut prius & b c sit 1 pos. m: manifestum est quod oporteret iuxta hanc operationem ducere a c in se, & b c in se, & a c in b c bis, sed cum a c sit ignota, est 10 m: 1 pos. accipimus a b, quæ est nota: est enim 10, ut operamur cum a b & b c 9, & quia quadratum a b cum quadrato b c est æquale quadrato a c cum duplo a b in b c, ideò detrahimus duplum a b in b c ex quadratis a b & b c, & quoniam duplum a b in b c, superat gnomonem g c e in quadrato b d, ut constat ideò detrahimus, quantum est quadratum b c plusquam oporteret & ponimus m: cum solus gnomo uerè sit m: quia ergo detrahimus quantum est quadratum b c, plusquàm deberemus à quadrato a b, tãquam p: ideò ad restitutionem illius m: quod detrahimus præter rationem oporteret addere, quantum est quadratum b c p: & ideò cum b c sit m: dicemus quod 62 m: quadratum conuersum est in p: ideò quod m: in m: produxit p: Sed non est uerum: sed nos addidimus quantum est quadratum b c p: non quod quadratum b c sit p: sed alia assumpta quantitas pro arbitrio nostro æqualis b c addita est, & facta est p: Idem dico in tertia figura, quia operamur per a b & a f loco a c & f g: ideò in operando uidetur quòd m: in m: producat p: Et sit ergo, ut in secundo exemplo a b sit 10 b c 1 pos. & sic 2 uerè erit a c 8, igitur d f erit 64, & gnomo g c e 16 pos. p: 1 quad. 136, nam 16 pos. sunt 32, & 1 quadrat. 4, quod totum est 36. Et tunc debet dici a b iunctum & separatum non propriè m: si uerò operemur cum tota a b & b c, habebimus 100 p: 1 quad. m: 20 pos. ecce quòd in priore æquatione nõ habebas



bebas nisi 16 pos. m: hic uerò habes 20, & ideò cum in priore æquatione haberes 1 quad. m: & hic habeas 1 quad. p: ideò oportuit addere numero pos. 4. 1. à 16 ad 20, seu quia addidisti illas 4 pos. m: plusquam oporteret, ideò subtraxisti 1 quad. m: & etiam loco eius addidisti 1 quad. p: & ideò ad hoc deuenisti, ut diceres m: in m: producere p: quod tamen est falsum, non enim contingit ex operatione multiplicationis, sed ut peruenires ad maiorem noticiam per illam septimam propositionem secundi Euclidis, similiter dico, si multiplicas 3 m: ℞ 2 in 5 m: ℞ 3 uerè oporteret ducere a c in f g, & | 5 m: ℞ 3 haberes uerum productum: sed quia nec 3 m: ℞ 2 nota est | 5 m: ℞ 2 uerè sub uno nomine, nec 5 m: ℞ 3 est nota sub uno nomine, & omnis multiplicatio & diuisio fit singillatim per simplices quantitates, ideò in recisis necesse est operari per septimam propositionem secundi Euclidis loco quartæ: & ita quia in illa includitur additio illa quadrati m: in multiplicatione unius partis integræ, in partem detractam bis supra gnomonem, ideò oportet addere ad p: quantum est quadratum partis illius quę est m: Ideò ut in binomijs operamur per quartam propositionem, & secũdum substantiam quantitatis compositæ, ita etiam in recisis quo ad substantiam & uerè operamur cum eadem: sed ad nominum cognitionem operamur in uirtute septimæ eiusdem.

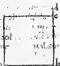
Quartum & ultimum est, quod erat considerandum, cur p: in p: solum faciat p: & m: in m: & in p: faciat m: Et dico quod (ut dixi) m: oportet supponere tanquam non sit de ipso p: est enim alienum, ideò ad cõstruendum oportet assumere plura, ad destruendum sufficit unum. Ad hoc ergo ut p: constituatur, oportet ut p: in p: ducatur, nam cum ducitur p: in m: seu in alienum fit m: quia nihil potest ultra uires suas, ergo p: potest quantum est ipsum, igitur cum ducitur extra ipsum, producit m: aliter posset plus producere quam potestate esset. Sed cum ducitur in aliud p: non potest etiam nisi quantum potest in partes illius p: Exemplum, 6 ducitur in 10, igitur in 6 & 4, sed ut in 6 ex demonstratis non potest ultra 36, ut autem 4 ducitur in 6 non potest, nisi ut in 4 & 2, & ut in 4, nisi ut in seipsum, igitur non potest nisi usque ad 16, & ut residuum 2 in 4, nisi ut in 2, & 2 igitur non potest nisi 4 & 4, sed 36, 16, 4 & 4, producunt 60, igitur 6 in 10 non potest producere nisi 60, igitur m: in m: seu alienum in alienum, & m: in p: seu p: in m: seu quod est in alienum, seu alienum in id quod est, producunt m: solum, seu alienum quod erat demonstrandum. Ex quo intelliges ueram rationem ducendi m: & diuidendi per m: & accipiendi ℞ tam quadratam quàm cubam (nam de cuba dubium non est, quod est m:) non antea cognita. Corro. 1. Supra ca. 6.

Corm.2. Ex hoc etiam patet, quod diuiso m: per p: exit m: nam ducto m: in p: fit m: ergo diuiso m: per p: exit m: Et diuiso m: per m: exit m: & p: quia ex m: in p: & m: fit m: igitur diuiso eo producto, quod est m: exit alterutrum, scilicet p: uel m: Diuiso autem p: per m: nihil exit, nam seu exiret p: seu m: ex m: in idem p: uel m: produceretur p: quod est contra demonstrata.

De examine capituli cubi & numeri æqualium rebus. CAP. XXIII.

LEMMA.


Roponatur primo a b res & quadratum eius a c, et sit b d numerus quadratorum æqualium cu. 6, & numero, dico quod b d est maior b a, nam si minor esset cubus a b maior quadratis, igitur multo maior esset cubus a b cum numero, quadratis ipsis non ergo æqualis. Contraria ratione sequitur, quod si cubus æquaretur quadratis & numero, necesse est a b, rem esse maiorem numero quadratorum. Per idem si b d sit numerus rerum æqualium cubo & numero, necesse est b d, esse maiorem a b, modo a b sit æqualis, aut maior monade: nam si a b esset maior b d: esset a c maius superficie a b in b d, quare si a b est maior monade, cubus a b erit, multo maior rebus: ergo cubus a b cum numero multo maior rebus secundum numerum b d, non ergo possunt esse æquales, sed ubi a b esset minor monade, posset esse in hoc casu cubus cum numero æquati rebus, ut 1 cu. p: $\frac{7}{64}$ æqualis $\frac{2}{3}$, rei tunc a b est $\frac{3}{4}$, quod est maius $\frac{2}{3}$. Quod si cubus æquetur rebus & numero, ut sit b d numerus rerum & quadratum eius b d a, ut etiam a b sit numerus idem rerum, & æqualis b d, tunc si quadratum b d numeri rerum additum numero æquationis sit æquale cubo numeri rerum, tunc æstimatio rei, id est b c erit numerus rerum, uelut b d sit 4 numerus rerum & numerus æquationis 48 ex 48, & 16 quadrato 4, fit 46 cubus eiusdē 4, igitur 4 est æstimatio rei. Sed si quadratum b d cum numero rerum fuerit minus cubo b d, erit b c æstimatio rei b c, minor b a, ut si cubus æquetur 4 rebus p: 47, quia 16, & 47 faciunt 63, minus 64, cubo 4, numeri rerum erit b c, minor b a: & si quadratum esset cum numero æquationis





maius

maius cubo esset æstimatio rei maior numero rerum. Velut 1 cub: æquetur 4 rebus p: 50, tunc æstimatio rei erit b c, maior b a, qui est 4 numerus rerum.

DEMONSTRATIO.

Quibus stantibus proponatur res, & b c numerus rerum & parallelogrammum a b e quãtitas ipsarum rerum collectarum, & sint res sub numero b c, putà 34, æquales 1 cub. p: 12. Et erit per lemma præcedens b c maior b a, item oportet ex demonstratis in libro de Proportionibus, ut cubus tertiæ partis b c sit æqualis, aut maior numero æquationis. Sic ergo numerus æquationis superficies d b c e, eritq́ b d necessariò numerus: superficies ergo a d e, est æqualis cubo a b, & quia cubus a b fit ex demonstratis ex cubis d b & d a, & triplo unius in quadratum alterius, & cubus b d est numerus, quia b d est numerus, ergo diuiso cu bo numero, per b c numerum prodibit numerus: sit igitur superficies e f æqualis cubo d b; erit igitur superficies f g, æqualis triplo b d, in quadratum d a & a d in quadratum d b, & cubo a d. Exemplum ergo erit (ut dixi) quod d c sit 12, & b c 34, erit b d $\frac{6}{17}$, a b autem, ut binomium est 3 p: R 7, & cubus b d $\frac{216}{4913}$, tota igitur superficies f c esset $12\frac{216}{4913}$. Propterea uides per eandem rationem, quod diuisa f c per b c, exit f d numerus maior b d. Et rursus cubus ille componetur ex cubis b f, f a, & triplo mutuo dicto, & ita semper cubus fiet minor, & numerus æquationis maior: nam diuiso $12\frac{216}{4913}$ per 34 exit $\frac{29586}{83521}$, & tanta est b f, cuius cubum oporteret rursus addere ad superficiem b c, & ita iuxta datam proportionem augetur numerus æquationis & cubus minuitur. Oportet igitur in hoc casu ita distinguere dicendo, quòd si per cubum intelligis priorem cubum, scilicet a b ille cum 12 numero, & non cum $12\frac{216}{4913}$, æquatur 34 rebus, licet enim contineat alios numeros, non sunt tamen de natura numeri æquationis, sed propria pars: Si uerò dicas quod aliquis cubus p: $12\frac{216}{4913}$, qui erit minor cubo a b æquetur 34 rebus? dico quod non, quia ille cubus erit cubus lineæ minoris a b, igitur si 34 a b æquantur cubo minoris lineæ, quàm sit a b, & $12\frac{216}{4913}$ oportebit tunc quod res tunc sit minor, quæ est latus cubi, igitur oportebit quòd sint plures res quàm 34, quæ sint æquales cubo p: $12\frac{216}{4913}$, & ita omnia uariantur uno uariato.

Per 20am seu 21 am 10 Elem.

Rursus ergo assumatur linea a h, quæ sit pars binomij, & h b numerus, tunc cubus h b poterit solus esse numerus, ut cum a h fuerit quantitas absurda, uelut gratia exempli R V: R 7 p: R 3, uel poterit

esse

esse cum cubo a h, cum a h fuerit ℞ cu. numeri, uel cum triplo h b in quadratum a h, ut in proposito posita a h ℞ 7, nam cubus h b est 27, & triplum h b in quadratum a h est 63, ut totus numerus fit 90, quibus additis 12, fit 102, qui est æqualis 34, numero rerum ducto in 3, qui est numerus æstimationis seu binomij. In omni casu ergo ex his tribus constat quòd numerus totus est superficies h c. Et quia numerus æquationis æquatur illi, dico quod non potest esse maior, nam sic pars equaretur toti, nec æqualis ex demonstratione habita, nam b h tota esset numerus, ergo cubus eius esset numerus, ergo numerus æquationis h c, cum numero cubi h b esset maior numero, qui continetur in rebus, ergo res non possent esse æquales numero & cubo. Quia quantitas aloga esset æqualis numero, relinquitur igitur, ut numerus equationis sit necessariò minor, numero qui continetur in rebus. Sit ergo numerus æquationis d c, & erit numerus cubi h c necessariò: nam hi duo numeri pariter accepti sunt necessariò equales numero contento in rebus, quem supposuimus esse h c. Dico ergo, quòd a h non potest esse ℞ simplex, quia non satisfacit
Cap. 10. per uiam binomij, ut ostensum suprà. Nec potest esse ℞ cu. nam cubus esset numerus, igitur 34 radices gratia exempli essent unum aggregatum radicum cub. quæ æquiualerent uni, & hanc oporteret æquari tripla producti unius in quadratum alterius mutuò: at hoc esse non potest, quoniam illa solida sunt incommensa, quia sunt in proportione a h ad h b, id est ℞ cub. ad numerum, quæ sunt incommensa inter se. Relinquitur ergo ut sic a h una quantitas alterius generis, quæ ducta uicissim cum h b una in quadratum alterius, addito quòd illius cubo sciat quantum ducta in 30 gratia exempli, qui est numerus rerum.

At quia in illo aggregato est etiam triplum quadrati h b in a h, oportebit ergo ut cubus a h cum triplo quadrati a h in h b sit equale residuo tripli quadrati h b, & numeri rerum ducto in a h: igitur diuisis omnibus per a h, erit ut quadratum a h, cum rebus triplo numeri h b, sit æquale numero simplici, qui est differentia numeri rerum, & tripli quadrati h b. Exemplum ponatur h b 2, & b c numerus rerum 30, igitur triplum quadrati h b, quod est 12, detractum à 30, relinquitur 18, ergo 18 est æqualis 1 quad. p: triplo h b, id est b rebus: quare res erit ℞ 27 m: 3, id est a h, & tota h b ℞ 27 m: 1, & erit 1 cu. p: 52 æqualis 30 rebus. Quantitas ergo a h oportet, ut sit generalis ad illam, & cum prædictis conditionibus. Quod si a b ponatur res, & h b numerus, ut prius, sed m: operaberis & demonstrabis per ea quæ ostendimus in capite præcedenti: nam cubus uerus erit cubus h a, scilicet residui. Et quia ei additur numerus, & iam superficies

cies h c est m: oportebit, ut h g sit maior cubo a h, quantum est numerus æquationis, quæ sit gratia exempli h k, ideo cubus a b, seu uerius a h, erit a k, reliqua ut prius erunt examinanda.

Demonstratio ostendens quòd caput nullum præter inuenta, generale sciri potest. CAP. XXIIII.

Reliquum est ut ostendamus quod ab initio propositum est, cuius causa hæc scripsimus, scilicet non esse capitulum aliud generale, quod sciri posit, ultra ea quæ tradita sunt, quoniam ultra quatuor diuersa genera nisi posit reduci, ad pauciora, uel per diuisionem, uel radicem, aut per mutationem, aut regulam propriâ uel deprimendo, aut ob originem, aut per demonstrationem Geometricam, cum in singulis sint magnæ inæqualitates, quę uix possunt intelligi in quatuor quantitatibus, nec in eis potuerit inuenire perfectio quanto minus in illis. De his ergo, si sint quatuor usque ad cubum, iam doctus es reducere ad tres quantitates, & capita trium quantitatum omnia ad cubum æqualem rebus & numero: si igitur ostendero hoc nõ posse esse generale, etiam in parte ignota liquet propositum.

Assumamus igitur primam regulam capitulorum imperfectorum specialium, in qua 1 cu. æqualis est 20 rebus p:32, & est rei æstimatio ℞ 17 p:1 binomium quintum. Et similiter in Arte magna ui-sum est, quod duæ æstimationes capituli cubi & numeri æqualium rebus conficiunt æstimationem cubi æqualis totidem rebus, & eidem numero. Ex quibus liquet, quod oportet æstimationem generalem posse communicari numero, & quinto binomio, & quia simile quinto binomio est numerus, non quintum binomium oportet, ut sit in creatione eiusmodi. Quintum autem binomium hoc modo transit ad æquationem, ut pote ℞ 3 p:1 sic fiat cubus, erit ℞ 108 p:10, hic igitur æquatur 6 rebus necessario, quia ℞ 108 continet ℞ 3 sexies, & quia sex res non sunt nisi ℞ 108 p:6, igitur cubus æquatur sex rebus p:4. Ergo cum illud quod potest esse ex ea natura, uel est ℞ cubica cubi consimilis, uel quadrata quadrati, uel quadrata cubica quadrati cubi, uel differentia duorum, uel aggregatum necessarium est, ut talis ęstimatio simpliciter sit una huiusmodi, si debet esse generalis, ut quandoque posit illi æquari, si occurrat quadratum, igitur ℞ 3 p:1 est, ut uides in margine differentiæ autẽ, & aggregata sunt infinitorum modorum, nam sit a b quæuis quantitas, & c b ipsa æstimatio,

Cap. 2 Art. mag.

Cap. 13. fine Cor. secundo.

Res	℞ 3 p:1
Quad.	℞ 9 p:℞ 12 p:1
Cub.	℞ 27 p:1 p:℞ 81 p:℞ 27
Cub. quad.	208 p:℞ 43200
Quad. quad.	28 p:℞ 768.

a c b

matio, si igitur detracta b c ex a b relinquitur a c, igitur detracta a c ex a b, relinquetur b c æstimatio. Et similiter posita a b æstimatione, potes a b illa detrahere a c modo minor sit, ut relinquetur b c, igitur ex a c & b c iunctis fiet æstimatio. Iam ergo habes quod poterit esse radix quadrata trinomij, cuius una pars sit numerus & cubica quadrinomij, cuius una pars sit numerus & ℞ ℞ binomij, aut quadrinomij, cuius una pars sit numerus, & ℞ cu. quadrata multinomij, scilicet tredecim partium aut pauciorum, quæ sint ℞ quadratæ, ita ut in eis una sit numerus.

Pro aggregatis autem ac differentijs tradendis, uolo tibi dare exemplum ex Arte magna, dixi quod ℞ v: $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{35}{64}$ p: $1\frac{3}{4}$ m: ℞ $2\frac{5}{16}$ est æquale 3. Deducito partes ex partibus, ut uideas si sit uerum, & habebis $2\frac{1}{4}$ p: ℞ $2\frac{5}{16}$ æqualia ℞ v: $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{64}$. Duc igitur utranque in se, & habebis idem ex utraque parte, id est $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{64}$, nam $2\frac{1}{4}$ m: se facit $5\frac{1}{16}$ cui addit $2\frac{5}{16}$ fit 7 & $\frac{3}{8}$ & ℞ $5\frac{1}{16}$ in ℞ $2\frac{5}{16}$ fiunt $\frac{2997}{256}$, quæ duplicata faciunt $\frac{2997}{64}$ & sunt $46\frac{53}{64}$, cuius radix addita ad $7\frac{3}{8}$ facit $7\frac{3}{8}$ p: ℞ $46\frac{53}{64}$. Vnde in alijs eodem modo operaberis, dico ergo quod non potest esse ℞ quadrata trinomij habentis duas ℞ quad. & numerum unum, nam ℞ quadrata ℞ 6 p: ℞ 2 p: 1, si posset esse ex genere binomij tertij uel sexti non possit satisfacere, ut demonstrandum est, neque si una pars sit numerus, & alia ℞ nam eius quadratum erit binomium, & non trinomium. Proponamus ergo ℞ ℞ 6 p: 1, & erit eius quadratum 1 p: ℞ 6 ℞ ℞ 96: nam si capiamus ℞ ℞ 4 p: 1 fiet ℞ 4 p: 1 p: ℞ ℞ 64, id est 3 p: ℞ 8, si ergo capiamus

Per quartam secundi El. Euclid.

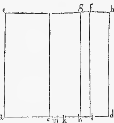
℞ ℞ 12 p: ℞ 3 p: 1
4 p: ℞ 48 p: ℞ ℞ 192 p: ℞ ℞ 1728
160 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 248832 p: ℞ ℞ 442368

℞ ℞ 4 p: ℞ 3 p: 1 licet resoluatur in 160 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 442 368 p: ℞ ℞ 248832, hæ tamen non sunt commensæ, sed in proportione ℞ ℞ 256 ad ℞ ℞ 144, id est 4 ad 12, licet sit ualde propinqua, nam ℞ 432 est duodecupla ℞ 3 & ℞ ℞ 248832, est duodecupla ℞ ℞ 12, & est mirum adeo quod si ℞ ℞ 442368 esset numerus, haberemus intentum. Cum ergo hoc trinomium non posset reduci ad pauciora multo minus reliqua, quare ℞ cub. 460 p: ℞ 432 p: ℞ ℞ 442368 p: ℞ ℞ 248832 non potest esse æquatio quæsita, igitur oportet ut sit differentia duarum quantitatum, & fundamentum erit in prima regula dicta in Arte magna superius.

Sit cubus a b æqualis 29 rebus a d, & erit superficies b c 29, & c e 42 numeris, & erit corpus, & iuxta altitudinem a d. Et cum ex 29 possint fieri partes, ut uides a latere ex quibus una ducta in alterius radicem fit numerus, poterit numerus rerum datus cum 28, 50, 66, 52 &

52 & 20 equari cubo, dico modo quod etiam poterunt fieri aliæ partes non integræ, utpote 18 p:℞ 72, & 11 m:℞ 72, & ex 18 p:℞ 72 in 3 m:℞ 2, radicem 11 m:℞ 72, fit 42 alius numerus. Ex quo liquet q̃d oportet 11 m:℞ 72, esse binomiũ primum aut recisum, ut & etiã. Proponatur ergo e f 18 p:℞ 72, & c g 18, erit ergo h f p:℞ 72, igitur alia pars erit f d denominata per d g, scilicet 11 m:f h ℞ 72, ita ut diuisio uera b c, scilicet 29, fit uerè in f, nam c f est 18, id est c g p:℞ 72, id est f h & d f 11, id est d g m:℞ 72, id est f h. Diuisio autem iuxta nomen in g, quoniam c g est 18, & g d 11. Et quia proportio c b corporis ad c e est ueluti c d ad c a, erit c d ad c a, uelut 29 pos. ad 42, igitur uelut 1 pos ad $1\frac{13}{29}$, uel $\frac{29}{42}$ pos. ad 1 numerum. Rursus quia ex regula prima capituli c f in ℞ f d, fit c e corpus, & sit latus d f, d k erit a d ad d k, ueluti c f superficiei ad c e, superficiem quare ueluti c l ad c a. Atque iterum cum l g fiat ex duplo partium d k, proponatur denominata per p:& m:& fit quod est p:d m, & quod est m:k m duplum, igitur m k in m d producit h f. Vt in exemplo, cum ergo c g proponatur numerus 18, & g l ℞ 72, & proportio partium d k ut denominatæ, id est ut d m, quę est numerus m: m k, & eadem proportioni c g ad g l, sequamur ergo primum argumentum rei. Erit a d ℞ v: $20\frac{3}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$ p: $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{2}$. Ex regula prima. Hæc igitur est uera æstimatio rei, & eadem est 6, & fit experimentum, quia detracta $\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{2}$, ex 6 fit $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{1}{2}$, & hoc est æquale ℞ v: $20\frac{3}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$ quod patet quia quadrata utriusque sunt $20\frac{3}{4}$ p: ℞ $40\frac{1}{2}$. Igitur hoc genus æstimationis est generale, quia potest æquari numero, &

25 Art. mag.



18.1.1.28
25.4.2.50
20.9.3.60
13.10.4.52
4.25.5.20
18 p:℞ 72. 11 m:℞ 72. 3 m:℞ 2/42.

c f 18 p:℞ 72
c g 18
h f ℞ 72
f d 11 m: ℞ 72
d g 11
c d ad c a ut 1 pos. $1\frac{13}{29}$
d k ℞ v 11 m: ℞ 72
a d ad d k, ut c l ad c a
m k in m d, pd. dim. f h ℞ 18
d m 3
m k ℞ 2
d k 3 m: ℞ 2
c g ad g l, ut d m ad m k.

non æquari, & posset æquari binomio, quia detractis partibus alligatis remaneret binomium aut recisum necessariò, & tunc posset poni ℞ v: radix binomij aut recisi primi.

Rursus proponatur b c 20 numerus rerum c e corpus 32, proponatur c f c b f d 4 ex e f in ℞ f d, quæ est 2, fit 32. Sit iterum c d ad c a ut 20 pos. a d 32, scilicet ut 1 pos. ad $1\frac{3}{5}$, & quia est iterum a d ad d k, ut c f ad c e, quare ut c l ad c a. Et quia a d ex regula prima est ℞ 17 p: 1, & d k est 2, erit a k ℞ 17 m: 1 & c e ℞ 68 m: 2.

De examine tertiæ regulæ capituli XXV. Artis magnæ.
CAP. XXV.

PRoponamus quod cubus sit æqualis 18, rebus p: 108, tūc si fecero ex 18 numero rerum duas partes, ex quarum ductu unius in ℞ alterius mutuò fiat 54 dimidium 108. Et manifestum est quòd res est 6. Et per regulam generalem est ℞ v: cub. 54 p: ℞ 2700 p: ℞ v: cu. 54 m, ℞ 2700, & hæc uerè est 3 p: ℞ 3 p: 3 m: ℞ 3, quod est 6 ut prius. Diuisio autem non est secundum eum modum, sed ℞ partium 18 sunt 3 & 3, & partes 9 & 9, & producta mutuo sic erunt 54. Et similiter assumptis 21 rebus, & 90 numero, faciemus iuxta capitulum generale ex 90 duas partes, ex quarum ductu unius in alterum fiat 343, cubus 7, tertiæ partis 21 numeri rerum, & habebimus partes ℞ v: cu. 45 p: ℞ 1682, p: ℞ v: cu. 45 m: ℞ 1682, & est 3 p: ℞ 2 p: 3 m: ℞ 26 ut prius, & ita augendo numerum rerum eximus extra capitulum, sed minuendo numerum rerum nimis non licet uti regula ut pote 1 cu. æqualis 15, rebus p: 126, non licet diuidere 15 in duas partes, ex quarum ductu unius in ℞ alterius mutuo, fiat 63 dimidium 126. Quia maximum in quo diuidi posit, est quando diuiditur in partes æquales, ut demonstratum est. Ergo tres sunt partes in hoc capitulo, prima quæ seruit regulæ speciali non generali, cum numerus rerum est magnus in comparatione numeri æquationis. Secunda quæ seruit regulæ generali non speciali cum numerus ęquationis est magnus comparatione numeri rerum. Tertia quæ seruit utrique, ut in exemplo non potest regula generalis attingere ad 1 cub. ęqualem 22 rebus p: 84, quia 21 quarta pars 84, non facit quadratum, neque maius neque æquale cubo $7\frac{1}{3}$ tertiæ partis rerum. Similiter regula specialis non attingit ad 1 cub. æqualem 17, rebus p: 114, quoniam $8\frac{1}{2}$ ductum in ℞ $8\frac{1}{2}$, producit ℞ $614\frac{1}{8}$, quæ est minor $28\frac{1}{2}$, quarta parte 114 numeri propositi, ut mutua illa non posint componere 57 dimidium numeri propositi. Traducenda est ergo in toto illo spacio, in quo conueniunt una ad aliam faciendo ex re iam inuenta duas partes, ex quarum ductu

Per 209. lib. de Proport.

unius

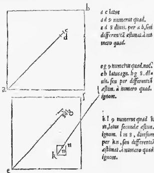
unius in quadratum alterius mutuo, fiat dimidium numeri propositi, & illæ erunt partes. Istud autẽ facile fiet diuidendo numeri propositi, dimidium per rem inde diuidendo rem in duas partes producentes id quod prouenit. Exemplum, cubus æquatur 6 rebus p: 6, rei æstimatio est ℞ cub. 4, p: ℞ cub. 2, cum hoc diuidemus 3 dimidium numeri æquationis, exit ℞ cub. 2 m: 1, p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$, ducam dimidium ℞ cu. 4, p: ℞ cu. 2, in se fit 1 p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. $\frac{1}{16}$, à quo detraho ℞ cu. 2 m: 1 p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$, relinquitur 2 m: ℞ cub. $\frac{1}{4}$, m: ℞ cu. $\frac{1}{16}$, cuius ℞ v: addita & detracta à dimidio prioris ostendit partes ut uides. Et modum etiam cum demonstratione superius docui. Quadrata

℞ cu. $\frac{1}{2}$ p ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: 2 m: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{16}$
℞ cu. $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ v: 2 m: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{16}$

ergo horum iuncta sunt 6, & mutuo producta iuncta sunt 3, quod patet experienti. Et est pulchra operatio.

De propositione cubi æqualis quadratis, & numero ad cubum cum numero æqualem quadratis. CAP. XXVI.

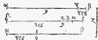
Si cubus sit æqualis quadratis & numero, alius uerò cubus cum eodẽ numero sit æqualis, aliquot quadratis erit proportio differentiæ numeri quadratorum à sua æstimatione, dum cubus & numerus est æqualis quadratis ad differentiam æstimationis à numero quadratorum, dum cubus est æqualis quadratis, & numero sicut æstimationis cubi æqualis quadratis & numero ad æstimationem cubi & numeri æqualiũ quadratis duplicata.



Cum ex a b in c d, & ex e f in g h, & ex k n in l m, fiat idẽ numerus, erit proportio c d ad g h, & c d ad l m, & g h ad l m, uelut e f ad a b, & k n ad a b, & k n ad e f, quare ut e h ad a c, & k m ad a c, & k m ad g h duplicata. Veluti ponatur e h ℞ 24 p: 4, & k m 1 in 1 cub. p: 8 æquali 9 quad. Cum ergo nota e g g h h e nota fiat sub eisdem terminis k m & m l ex capite

cubi & numeri æqualium quadratis, igitur nota a d d c, & paribus alijs erit nota c h & h g. Discrimen solum est, quòd in cubo æquali rebus & numero differẽtia est lateris, quod superat numerum quadratorum, in sequentibus figuris numerus quadratorum superat æstimationem rei seu latus quad. liquet ergo quod inter e h & k m intercedunt quatuor conditiones: prima quod e h & k m sunt ambæ æstimationes capituli propositi cubi & 8 numeri æqualium 9 quad. Secunda quod e h & k m sunt in proportione, in qua est l m ad h g uicissim, sed hæc est duplicata. Tertia quod k m est composita ex tetragonali g h in e p, posita o h dimidio h g, & ipsa p h dimidio o h. Quarta quam diximus deesse comparando a c & c d ad e h & b g, est quòd e h & k m æstimationes sunt minores e g seu k l numero quadratorum. Cum ergo ex tertia conditione, quod fit ex g h in p e sit notum, quia g h & o e notæ sunt, & g o nota, quia dimidium g h erit k m composita ex eis nota. Deducitur ergo primum problema ad hoc, detrahe ex k l quantitatem, quæ se habeat in proportione duplicata ad h g, in qua e h ad k m. Cum e g & k l sint idem seu æquales. At secundum problema est, diuide k l, quę est eadem uel æqualis a d, ita ut proportio m l ad c d sit duplicata ei, quæ est a c ad k m. In utroque autem pariter deducitur res ad cubum & numerum æqualem numero rerum, igitur æstimatio pariter ignota ex nota pendebit.

Sumantur ergo rursus αγ, δε, ηθ, nouem singulæ & æquales, & sit tota res, & in reliquis dum cubus, & 8 æquantur 9 quad. res sit δζ & ηι. Si ergo posuerimus δζ ℞ 24 p:4, erit ζε 5 m:℞ 24. Ponamus ergo ιθ 1 quad. & sit medio in proportione inter ιθ & ζε, κ erit κ pos. ℞ v:5 m:℞ 24, igitur cum sit proportio κ ad ζε, ut δζ ad ηι, ducemus δζ, id est ℞ 24 p:4 in ζε, quæ est 5 m:℞ 24, fit ℞ 24 m:4, quam diuido per κ, id est pos. 5 m:℞ 24, & exeunt pos. ℞ $\frac{24 ℞ 4}{1 pol.}$, & hæc est ηι. Igitur tota ηθ quæ est 9, est 1 quad. p:℞ $\frac{24 ℞ 4}{1 pos.}$, quare 1 cub. p:℞ 24 p:4, æquatur 9 pos. & quia notum est hoc ex capitulo iam dicto: & assumo eodem modo αγ & γβ, notas ut sit γβ 6 m:℞ v: cub. 31 p:℞ 934 p:℞ v: cub. 31 m:℞ 934, & dicamus quod sit $\frac{121}{100}$, nam est propè, & ponamus quod 10, ut prius sit 1 quad. erit κ pos. $\frac{11}{10}$, duc ergo $\frac{11}{10}$ βγ in αβ, id est $\frac{121}{100}$ in $\frac{779}{100}$, & quia est diuidendum productum per $\frac{11}{10}$, ideo sufficiet ducere per $\frac{11}{10}$, & fit $\frac{8569}{1000}$, seu $8\frac{569}{1000}$, diuidendum per ipsos, nam κ fuit $\frac{11}{10}$ pos. quia fuit latus $\frac{121}{100}$ quadratum, habemus ergo ut prius $8\frac{569}{1000}$, diuidendum



per

per 1 pos p: quadrata æqualia 9, igitur 1 cub. p: $8\frac{569}{1000}$ æqualia 9 pos.

Videtur ergo propior modus demonstrationi, ut supponamus ad rei æstimationem, in qua a b numerus quadratorum, & b d numerus æstimationis, diuisus per quadratum a b. Et rursus a b numerus, id est quadratorum, & e b numerus æstimationis, idem cum priore, & diuisus per quadratum a c uel a e, quia habet duas æstimationes, sed tunc æquatio erit diuersa, quam oportebit inuenire. Dico ergo quod si cubus p: 200, est æqualis 100, erit a e res & a b 100, ponamus ergo ad æstimationem cubi æqualis 100 quad. p: 200, erit ergo a d nota, & a b est 100 numerus quadratorum, igitur b d differentia nota, & quia demonstratum est, quod proportio c b ad b d est duplicata ei quæ est a d ad a c, igitur proportio mediæ inter e b ad b d est ut a d ad a c, sit ergo b d 2, pro exemplo ut intelligas pones e $6\frac{1}{2}$ quad. & si b d esset 3, poneres e $6\frac{1}{3}$ quad. & si b d esset 4, poneres e $6\frac{1}{4}$ quad. ad hoc ut media sit 1 pos. quæ ducta in a e, producit quantum a d in d b, productum autem a d in d b est notum, quia a d & d b notæ sunt, & hoc est æquale mediæ ductæ in a e, quæ est numerus quadratorum communis, detracta e b quæ est pars illa, quæ prouenit diuisa monade per b d, & est nota, & est pars cubi. Sequitur igitur ex constructione, ut reducendo ad 1 cub. ut habeas cubum cum numero æqualem numero rerum. Et ut numerus rerum sit semper productum ex b d in a d: & numerus æquationis compositus ex producto quadrati a b in a d, & cubo ipsius b d, ueluti si ponatur (ut dixi) a b 100, & b d 2, erit 1 cub. p: 408, æqualis 200 rebus, fit autem 200 ex 2, quæ est b d in 100, quæ est a b numerus quadratorũ 408 autem componitur ex 400, producto 4 quadrati 2, & est b d in 100, quæ est a b, & 8 cubo 2 b d. & ita si b d esset 3, esset 1 cub. p: 927, æqualis 300 rebus, & eodem modo si b d esset 9, esset cubus cum 8829 æqualis 900 rebus, numerus enim rerum semper est productus ex æstimationis differentia à numero quadratorum in ipsum numerum quadratorum. Numerus autem æquationis scilicet 8829 est compositus ex 8100 producto quadrati 9, id est 81 in 100 numerum quadratorum, & 729 cubo b d, quæ est 9. Cum igitur hoc capitulum sit speciale, & circumscriptum habebit æstimationem notam, ut reliqua capitula specialia cubi & numeri æqualium rebus, & hæc æquiualebit generali cubi & numeri æqualium quadratis.

Ergo proposita quæstione cubi & numeri æqualium quadratis erit nota æstimatio cubi æqualis totidem quadratis, & eidem numero, quare a d nota, & quia a b numerus quadratorum est notus,

erit

erit nota b d, ducemusq́ b d in a b & habebimus numerum rerum, ducemus etiam b d ad quadratum inde in a b, & producto addemus cubum d b, & habebimus numerum æquationis cum regula, ergo speciali inueniemus æstimationem eius, & hæc erit prima æquatio, scilicet mediæ quantitatis inter e b & b d. hanc igitur ducemus in se, & diuidemus per b d, & exibit quantitas b e secunda æquatio, quam detrahemus ex a b numero quadratorum proposito, & habebimus a e æquationē tertiam quæsitam. Vnde patet quàm difficilis sit hæc inuentio, & quàm absurdum genus quãtitatis proueniat per decem difficultates. Prima est inuentio ad quæ solet esse trinomium compositum cubicum, & ex radicibus uniuersalibus, quia pendet ex capitulo generali. Secunda est residuum b d detracta a b. Tertia est productum ex a b in b d. Quarta est quadratum b d. Quintæ productum, ex eodem quadrato in a b. Sexta cubus b d. Septima est æstimationis inuentio cum operationibus capituli specialis. Octaua est deductio inuentæ æstimationis ad quadratum nona est diuisio producti per quantitatem b d. Decima est detractio prouentus à numero quadratorum. Ex his facillimæ sunt tres, scilicet secunda, quinta & decima, penè impossibiles duę, scilicet septima & nona, reliquæ ualde difficiles.

De æstimatione data, ut inueniatur numerus æquationis. CAP. XXVII.

ET cum in capitulis maioribus 1. cubi tum etiam in alijs ex tribus inueniatur quartum, utpote ex cubo æquali quadratis & numero datis inuenimus æstimationem. Ita æstimatione & cubo & quadratis inueniemus numerum, aut ex eadem & cubo & numero inueniemus quadrata, nam de cubo non est, ut quæramus ipsum per quadrata & numerum datum cum sola æstimatio doceat, cum ergo sint sex capitula & duobus modis in singulis contingat inueniri, quarum erunt duodecim capitula. Sit
1 ergo primum data a c æstimatio rei, & numerus quadratorum a b datus, qui cum numero aliquo æquatur cubo a c: igitur quia a c data est, erit cubus a c, datus & quadrata sub numero a b, data residuum ergo ad cubum est, quod fit ex b c in quadratum a c, & hoc est notum, quia a c & a b notæ & quadratum a c, igitur numerus æquationis. Detrahe igitur numerum quadratorum ex æstimatione data, & quod relinquitur duc in quadratum æstimationis, productum est numerus æquationis. Exemplum æstimatio est 10, cubi æqualis 6 quadratis & numero cuipiam, detrahe 6 ex 10, relinquitur

quitur 4, duc in 100 quadratum 10, fit 400, igitur cubus æquatur 6
quad.p:400.

Sit modo numerus ęquationis scilicet productum ex b c in qua- 2
dratum a c, & diuidam illum per quadratum a c, prodibit b c, detra
ho ex a c, relinquitur a b numerus quadratorum.

Sit cubus a b & quadrata b c, data & æstimatio nota, erit ergo 3
cubus notus, & b c ducta in quadratum a b etiam nota, iungendo
utrunq; habebis numerum æquationis.

Et sit cubus & a b data sit & numerus æquationis datus, igitur 4
detraham cubum a b datum ex æquationis numero dato, resi-
duum diuidam per quadratum a b datum, quia a b data est, quod
prodit est b c numerus quadratorum.

Et sit a c numerus quadratorum datus, & a b æstimatio rei, & 5
quadrata illa sint æqualia cubo & numero. Quia ergo a b data est,
erit quadratum eius, & cubus eius datus, ideò etiam productum ex
a c in quadratum a b, à quo detracto cubo a b, relinquitur numerus
æquationis. Exemplum a c sit 6 numerus quadratorum, a b autem
4 cubus eius est 64, quadratum 16, igitur sex quadratum sunt 96,
detrahe 64 cubum ęstimationis, relinquitur 32 numerus æquatio-
nis, igitur 1 cu.p:32, æquatur 6 quad. quando æstimatio rei est 4. Et
in huiusmodi cum æstimatio media æquatur extremis, caue ne ca-
sus sit impossibilis.

Et sit modo numerus æquationis & æstimationis notus, & ue- 6
lim numerum quadratorum æqualium cubo & dicto numero æ-
quationis. Quia ergo a b nota est æstimatio, erit cubus eius notus:
huic addam numerum æquationis iam notum, habebo totum nu-
merum notum quem diuidam per quadratum a b, iam, notum pro-
dibit a c numerus quadratorum.

Sit etiam ęstimatio nota cubi & rerum æqualium numero, liquet 7
quod cubus & res erunt notæ quæ iunctę faciunt numerum ęqua-
tionis notum.

Et rursus si à numero æquationis noto detrahas cubum æstima- 8
tionis notæ residuum erit notum, quod diuisum per æstimationem
ostendit numerum rerum.

Rursus si cubus æquatur rebus & numero, & res fint notæ, & æ- 9
stimatio, ducemus æstimationem in numerum rerum, & detrahe-
mus à cubo rei & residuum erit numerus æquationis.

Et ita si à cubo iam noto æquationis numerus detrahatur resi- 10
duum diuisum per æstimationem ostendit numerum rerum. Caue
tamen ne casum proponas impossibilem, uelut cubum æqualem
rebus, & 10 numero & æstimatio 2, nam oportet æstimationem sem

per esse maiorem ℞ cu. numeri æquationis, id est 10, & ita in alijs.

11 Sit etiam cubus p: 12 æqualis rebus, & sit æstimatio 2, tunc cubus 2 est 8, adde ad 12, fit 20, diuide per 2, prodibit 10 numerus rerum.

12 Et iterum sit cubus cum numero æqualis 10 rebus & æstimatio 2, duco 2 in 10, fit 20, detraho 8 cubum, relinquitur 12 numerus æquationis qui cum cubo 2 iunctus æquatur decuplo 2. Et quia in capitulis quadratorum uel rerum æqualium numero & cubo est duplex rei æstimatio, dico quod proposita quauis earũ, sequitur idem. Veluti cubus p: 24 est æqualis quadratis & æstimatio una est 2, alia ℞ 21 p: 3, duco 2 ad cubum, fit 8, addo ad 24, fit 32, diuido per 4 quadratum 2, exit 8 numerus quadratorum. Similiter duco ℞ 21 p: 3 ad cubum, fit ℞ 48384 p: 216, adde 24, fit 240 p: ℞ 48384, diuide per 30 p: ℞ 758 quadratum ℞ 21 p: 3, exit 8.

Quòd in proposito capituli XXVI. peruenitur ad cubum, & res æqualia numero. CAP. XXVIII.



Vm uerò iam conclusum sit, quòd si quis posset inuenire regulam specialem cubi & numeri æqualium rebus, quando numerus rerum sit ex ductu duorum numerorum inuicem, & numerus æquationis ex ductu quadrati unius in aggregatum amborum, quod habebit æstimatio cubi & numeri æqualium quadratis: dico quod hęc specialis regula est difficilis inuentu, quia æquipollet uni generali, quoniam conuenit omnibus casibus, in quibus cubus & numerus æquantur rebus. Exemplum, si dico cubus & 6 æquantur octo rebus, dico quòd hæc erit sub regula illa speciali quia ponam⁰ quod una pars sit 1 pos. alia $\frac{8}{1 pos.}$, duco igitur 1 pos. in se fit 1 quad. duco 1 quad. in aggregatũ 1 pos. p: $\frac{8}{1 pos.}$, fit cu. p: 8 pos. æqualia 6, at hoc habet capitulum generale, igitur regula illa non est propriè specialis.

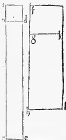
De comparatione capitulorum cubi, & rerum æqualium numero, & cubi & numeri æqualium totidem rebus. CAP. XXIX.



T proponatur cubus a d cum rebus numero 10, æquales 12, & erit superficies b c 10, corpus autem a e 12. Dico primum quòd si sumatur f k cubus, qui cum 12 numero, & sit g l corpus iuxta altitudinem f g, æqualia 10 rebus, erit ergo superficies f l ex supposito, & habebit duas æstimationes, quod singulæ illarum erũt in mutua proportione hoc modo b c ad f h, ut f g ad a b, & iterum a e ad g h, ut f g ad a b. Quare proportio a c ad g h, duplicata e c, quæ est b c ad f h. liquet etiam quod utraque æstimatio f g

est

est maior a b, quia cum æqualiter sumatur est æqualis g l numero, qui est æqualis toti a c, & ultra etiam cubo f k per communem animi sententiam. Ex quo sequitur, quod a c sit maior g h, igitur cum sit duplicata ei quæ est b c ad f h, erit b e maior f h. Et etiam clare per se patet cũ sit mutua, ut f g ad a b. Et quia 10 res f h æquantur cubo f k & g l numero æquationis, & g l est æqualis cubo a d & b c rebus, erit f h numerus rerum æqualis cubis f k a d, & rebus b c, detractis igitur rebus b c ex rebus f h, quæ sunt numero æquales, erũt decem differentiæ f g & a b, æquales cubis a b & f g pariter acceptis.



Rursus proponantur duæ quantitates a b & b c, ut tota a c sit 2, gratia exempli, ut sit differentia illarum d b, & decuplum d b sit æquale cubis a b & b c, diuidemus a c 2 in 1 p:1 pos. & 1 m:1 pos. & cubi erunt 6 quad. p:2, & hoc est æquale 20 rebus, id est decuplo d b, quæ est differentia, igitur 1 quad. p:$\frac{1}{3}$ æquatur $3\frac{1}{3}$, rebus & rei æstimatio est $1\frac{2}{3}$, p:R2 $2\frac{4}{9}$ uel $1\frac{2}{3}$ m:R2 $2\frac{4}{9}$.

a d b c

Qualis æqualitas cuborum partium lineæ diuisæ.
CAP. XXX.



Sit a b diuisa in c quadrata eius c d, c e, dico quod cubi a c c b sunt æquales parallelipedo ex a b in aggregatum quadratorum c d c e dempta superficie a c in c b, nam quod fit ex a b in aggregatum quadratorum c d, c e est æquale ei quod fit ex a c in c d, c e & ex b c in c e, c d, quare duobus cubis a c & c b, & eis quæ fiunt mutuo parallelipedis a c in c e, & c b in c d, at a c in c e, quantum ex b c in superficiem a c in c b, & ex c b in c d, quantum ex a d in superficiem a c in c b: quod igitur fit ex a b in c d, & c e est æquale cubis a c c b, & ei quod fit ex a d in superficiem a c in c b, & ex b c in eandem, quod autem fit ex a d in superficiem a c in c b, cum eo quod fit ex b c, in eandem est æquale ei quod fit ex tota a b in superficiem a c in c b, eo quod a d est æqualis a c & b c, æqualis b c igitur quod fit ex a b in c d, c e est æquale ei quod fit ex a b in superficiem a c in c b, cum cubis a c & c b, igitur detracto eo quod fit ex a b in superficiem a c in c b, ex eo quod fit ex a b in c d, c e & est

idem quod detrahere superficiem a c in c b ex quadratis a c, c b erit parallelipedum ex a b in c d, c e detracta superficie a c in c b æquale cubis a c, c b quod erat demonstrandum.

De æstimatione generali cubi æqualis rebus, & numero solida uocata & operationibus eius. CAP. XXXI.

IT postquam non quærimus in æstimatione nisi demonstrationem operationem & propinquitatem, dico quòd æstimatio cubi æqualis rebus & numero generalis in parte quæ non habetur est nota secundum tres modos propositos in solidis, per primam & tertiam regulam cap. 25 Artis magnæ: & approprinquatio non est minor quàm in reliquis radicibus quadratis aut cubicis, operationem autem nunc docebimus. Verùm in tertia regula ob præcedentem uidetur maior æqualitas atque notitia. Si quis ergo dixerit cubus est æqualis 13 rebus p: 60, igitur dicemus ex tertia regula, quod res est ℞ solida 13 in 30, qui est dimidium 60, id est, ut ita diuidatur 13, ut ex partibus in radices suas mutuò ductis fiat 30. Dico ergo quod si uolueris hanc ℞ sol. ducere gratia exempli in ℞ duas duces ℞ 2, in se fit 2, duc in 13, fit 26, inde duc ℞ 2 ad cubum, fit ℞ 8, duc ℞ 8 in 30, fit ℞ 7200, igitur ℞ producta erit ℞ sol. 26 in ℞ 7200. Et ita si uolueris eandem diuidere per ℞ 2, duc ℞ in se, fit 2, diuide 13 per 2, exit $6\frac{1}{2}$, deinde diuide 30 per ℞ 8 cub. ℞ 2, exit ℞ $112\frac{1}{2}$, & erit quod prouenit ℞ sol. $6\frac{1}{2}$ in $112\frac{1}{2}$. Hæc autem facile demonstrati possunt, in additione quoque similium uelut ℞ sol. 13, in 30 cu. ℞ sol. 52 in 240, diuides singulos per suas correspondentes, & exibunt diuiso 52 per 134, & diuiso 240 per 30, 8 & ℞ cu. 8, est eadem cum ℞ quadrata 4, quia iam supponuntur similes partes, addam igitur ad 2 monadem, fiet 3, duc ad quadratum fit 9, duc in 13 fit 117, duc & 3 ad cubum fit 27, duc in 30 fit 810, erit ergo ℞ coniuncta sol 117 in 810. Idem dico de subtractione. Diuidendo singulas partes per suas similis eius, quod prouenit capiendo ℞ quad. uel cu. quæ erit una à qua detrahe, & residuum reducito ad quadratum & cubum, & duc in suas partes quæ ei respondent. In dissimilibus autem adijciemus aut detrahemus simpliciter, quòd etiam facimus in ℞ uniuersalibus & anomalis. Possent & aliqua in huiusmodi subtiliora inueniri, sed satis sit si aliquis dicat, habui cubum æqualem 6 rebus p: 1, dices igitur æstimatio rei est ℞ sol 6 in $\frac{1}{2}$, id est aggregatum duarum radicum quadratorum partium 6, ex quarum mutua multiplicatione in ipsas partes producatur $\frac{1}{2}$.

Et pro appropinquatione celeri ac breui duces ad integras per numerum partes habentem, ducendo puta per 4, & habebis ℞ sol

sol 96 in 32, igitur pars una erit $95\frac{8}{9}$, & alia $\frac{1}{9}$. Et hoc est maius, minus autem $95\frac{9}{10}$ & $\frac{1}{10}$, igitur propinqua una erit $95\frac{17}{19}$ alia $\frac{2}{19}$, huius ergo accipiemus quartam partem, & erunt numeri $5\frac{151}{152}$ & $\frac{1}{152}$.

In inæqualibus autem iungendis, detrahendis, multiplicandis ac diuidendis eadem facimus quæ in ℞ diuersis, neque enim licet eas aliter iungere quam per p: & subtrahere quam per m: uelut ℞ cu. 10 cum ℞ quadrata 8. dicemus ℞ 8 p: ℞ cu. 10, uel detrahendo ℞ 8 m: ℞ cu. 10. Et si quis dicat quòd possumus etiam iungere hoc modo ℞ v: 8 p: ℞ cu. 100 p: ℞ ℞ cu. ℞ 3276800, dico quòd est hæc longior & difficilior. De longitudine patet sensu: de difficultate in ultima parte cogeris intelligere ℞ quadratam & ℞ cu. ut in alia & præter id etiam ℞ cub. 100, inde totius aggregati ℞ uniuersalem, licet forsan quod ad propinquitatem attinet, forsan redderetur aliquanto exactior, quia esset una tantum & minoris aggregati, unde notandum, quòd si quis uelit ℞ cu. 10 p: ℞ 8. Et ℞ v: ℞ cu. 10 p: ℞ 8, quòd prima sub eadem additione erit proxima $2\frac{17}{20}$ & $2\frac{3}{20}$, quod totum est 5, ut manifestum, sed ℞ v: $2\frac{17}{20}$ & $2\frac{3}{20}$ est $2\frac{59}{225}$. Et hoc manifestè est proximius radici ueræ ℞ cub. 10 p: ℞ 8 quam 5, quia ℞ ℞ 10 est proximior ℞ ℞ 101, quam ℞ 10 ℞ ℞ 101, & multo magis quam 10 ipsum ℞ 101 differt m: penè per $\frac{1}{20}$, & ℞ 10 differt eo modo sumpta à ℞ ℞ 101 per $\frac{1}{67}$, quod est multo minus quam $\frac{1}{20}$ in $\frac{1}{28}$ ferme. Sed tamen hoc contingit per se non habita proportionis ratione. Forsan in multiplicatione & diuisione aliter dicendum esset, quoniam partes redduntur pauciores: sed tamen cum incommensæ fuerint, remanet numerus aggregati, ut ℞ 6 p: ℞ 5, in ℞ 3 m: ℞ 2, producit ℞ 18 p: ℞ 15 m: ℞ 12 m: ℞ 10, quid ergo refert si dicam ℞ 18 p: ℞ 15 m: ℞ 12 m: ℞ 10, & ℞ 6 p: p: ℞ 5 in ℞ 9 m: ℞ 2, cum enim oportebit illas addere, duplicare, diuidere, diuidam unamquamque seorsum, & pòst iungam eodem modò aut detraham. Sint ergo dissimiles ℞ sol 13 in 30, & ℞ sol 5 in 6, sic multiplicabo ℞ sol 13 in 30, produc. in ℞ sol 5 in 6, sic diuidam ℞ sol 13 in 30, & ita addam ℞ sol 13 in 30 p: ℞ sol 5 in 6, & ita detraham ℞ sol 13 in 30, ℞ sol 5 in 6 m: ℞ sol 5 in 6. Et accipiam ℞ v: hoc modo ℞ v: ℞ sol 13 in 30, & est ℞ 5, & ita accipiam ℞ cu. hoc modo ℞ v: cu. ℞ sol 13 in 30. Et in solidis radici cuicunque debet adijci v: id est nota uniuersalis cum sit unum totum.

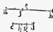
Et nota quod ℞ sol: dicitur non tota sed comparatiuè, uelut cum dico ℞ v: ℞ 9 p: ℞ cu. 27 uult dicere, accipi ℞ 9 quæ est 3, & ℞ cub. 27 quæ est etiam 3, iunge, fiunt 6, igitur ℞ v: 9 p: ℞ cu. 27 est ℞ 6. Sed non est sic de ℞ v: ℞ sol 13 in 30, neque enim cum ℞ 13 quadratorum aggregati sit 5, & ℞ 30 ut parallelipeda sit rursus ℞ v: est ℞ 8 aggregati 5 & 5, sed est ℞ simpliciter unius partis tantum, id est 5. Et ideo

nota quod semper sunt æquales, igitur ducendo, diuidendo ℞ solidæ partes sunt æquales.

Et nota quòd licet producti ex aggregato duorum quadratorum in aggregatum duorum quadratorum producant, semper aggregatum ex duobus quadratis, ut 5 in 5, & 5 in 13, & 5 in 8, & 5 in 18, & 13 in 25, & 13 in 8, & 8 in 25, & 8 in 50, & ita de alijs, tamen illæ partes non seruant proportionem, uelut 5 in 13, efficit 65, qui componitur ex 64 & 1 quadratis, qui nihil habent cum 15, qui uerè producitur ex 5 ℞ solida 13 in 30 in 3 ℞ sol 5 in 6, nec etiam diuiso 65 in 49 & 16, nam radices sunt 7 & 4, quæ iunctæ faciunt 11, qui etiam est diuersus à 15. Ideò aliunde petenda est ratio cur componantur, constat enim esse longè plures qui non componuntur: ut usque ad 20 sunt 2.5.8.10.13.17.18.20. Sunt ergo duodecim qui non componuntur, & octo tantum qui componuntur. Et à 20 ad 40. Sunt 25.26.29. 32.34.37.40. adhuc pauciores à 40 ad 60. sunt 41.45.50.52.53.58. pauciores.

De comparatione duarum quantitatum iuxta proportionem partium. CAP. XXXII.





ET sumantur duæ quantitates a b maior, c d minor, dico quod poterunt diuidi ita ut sit proportio unius partis ad aliam maioris inæqualitatis, & residui ad residuum usque in infinitum, nam ablata a e æquali c d erit b e ad residuum infinita, ergo ex regula dialectica semper licebit diuidendo residuũ, utpote facta a f æquali c g, diuidendo e f & d g per æqualia erit proportio residui usq; ad b, ad residuum usq; ad g perpetuò maior: & ita usq; in infinitum diuidendo uersus d, & assumendo aliquid maius in a b erit, ut procedatur usque in infinitum in proportione residuorum.

Dico præterea quòd non poterunt ambæ proportiones esse minores proportione totius ad totum: quia si detrahatur minor proportio ut a e ad c g, quam a b ad c d fiat a e ad c h, æqualis a b ad c d,
Per 10 quinti Elem.
igitur a e ad c g minor quam a e ad c h, igitur c h minor c g: b e ergo
Per 19 quinti Elem.
ad h d, ut a b ad c d, igitur b e ad g d maior quam a b ad c d.

Per 8 quinti eiusdem.
Manifestum est ergo quod sub minima proportione ambæ partes erunt cum fuerint quantitates diuisæ secundum proportionem totius ad totum: hoc etiam infinitis modis, sed non fit uarietas.

Dico modo quòd non poterũt in proportionem reduplicatam maiorem quam totius ad totum æqualem, nec minorem quam sit proportio media, uoco proportionem reduplicatam cum fuerit

proportio partium ut residuorum duplicata, uelut si proportio a b ad c d nonupla dico quòd non potest diuidi a b & c d, ut sit proportio maior, nec æqualis nonuplæ, nec æqualis aut minor tripla. nam si sit a e ad c f nonupla, igitur e b ad f d nonupla, ergo nonupla nonuplæ duplicata erit quod esse non potest, & si maior nonupla ergo ex demonstratis e b ad f d minor nonupla, ergo non duplicata ad illam.

Nec potest diuidi a b & c d ita ut sit minor quam tripla: nam si sit tripla b e ad f d, cum sit per demonstrata a e ad c f maior nonupla eo quod e b ad f d est minor, quam a b ad c d, igitur a e ad c f maior duplicata e b ad f d, non ergo duplicata. Multo minus si sit proportio e b ad f d minor tripla poterit esse residui ad residuum duplicata.

Cum ergo quis dixerit diuide 18 & 2, ita ut proportio partium sit reduplicata quadruplæ, tunc cum quadrupla sit minor nonupla, & maior tripla, duc 4 numerum proportionis in se fit 16, duc in 2 minorem qualitatem fit 32, aufer maiorem scilicet 18, relinquitur 14, hunc diuide per differentiam proportionis à suo quadrato, id est 12, qui est differentia quadrati 4, & ipsius 4, & exit $1\frac{1}{6}$: aufer ex 2 relinquitur $\frac{5}{6}$, aufer quadruplum $1\frac{1}{6}$, quod est $4\frac{2}{3}$ ex 18, relinquitur $13\frac{1}{3}$ quod est sexdecuplum ad $\frac{5}{6}$.

Ex hoc etiam patet, quòd seu maior maioris, ut hic seu minor habuerit rationem residui, id est partis quæ habet proportionem duplicatam, semper habebit ad minorem portionem minoris lineæ nunquam ad maiorem.

De duplici ordine quatuor quantitatum omologarum eiusdem proportionis ad duas alias. CAP. XXXIII.

Int a b c d & e f g h omologe, & in eadem proportione, & sint duæ aliæ k & l eiusdem generis, & ex differentia a & d in m producatur differentia productorum b in k & d in l, dico quòd differentia productorum f in k & h in l, producetur ex differentia e & h in eandem m. Et est generalis in similibus semper seruando rationem assumptorum. Nam quia b ad d ut f ad h erit b ad f ut d ad h permutando, quare productorum ex b & f in k inuicem, ut productorum d & h in l inuicem, utraque enim ut b ad f & d ad h, quæ se habent eodem modo: permutando igitur

Per 11 quinti Elem. igitur productorum b in k & d in l, ut f in k & h in l: quare & differentiarum ueluti b ad f: at ut b ad f, ita differentiæ a d, ad differen-
Per 19 quinti Elem. tiam e h. igitur diuisa differentia f in k & h in l per differentiam l h exibit m.

Detriplici diuisione duarum quantitatum in mutuam reduplicatam. CAP. XXXIIII.


Vmq; propositæ fuerunt duæ lineæ a & b possumus imaginari, ut diuidamus utramq;, ut fit proportio mutua reduplicata: nam de recta superius locuti sumus. Et potest istud fieri per additionem eiusdem quantitatis ad utranq; quantitatem, sed ut fiat media proportio, & potest fieri ut eadem quantitas addatur & detrahatur ab utraq;, & residuorum proportio sit duplicata proportioni aggregatorũ: & hęc tria hic docebimus demonstrantes primum solum: nam reliquorum sufficiet docere operationem. Quartum autem est de quo posterius agetur quod est difficillimum. Volo ergo diuidere a & b, ut sit proportio secundæ partis, b ad secundam partem, aut primæ partis, a ad primam partem, b duplicata iuxta proportionem datam inter c & d statuo e fin continua proportione cum c d, & duco d in a & f in b, & fiant superficies a & b, & detraho b ex a, & relinquatur g, & detraho f ex e & relinquatur k, & fiat superficies super k æqualis g, cuius latus sit l, & iuxta proportionem f e d e statuo l m n o, & duco l in b, & n in a, & fiant superficies a n, b l. Et rursus detraho b l ex a n, & sit p, cuius residuum sit superficies q, aufero etiam l ex o, & relinquatur r, & super r statuo superficiem æqualem q, cuius secundum latus constat esse, rursus l per præcedentem: aufero l ex b, & relinquatur f & m aufero ex a, & relinquatur t. dico ergo quod cum proportio m ad l sit ut c ad d, quod proportio f ad t est duplicata ei quæ est m ad l, seu c ad d. Nam ex demonstratis p fit ex l in b, & q ex l in r, igitur a n ex l in b r, igitur n ad l, ut b r ad a, sed n ad l, ut m ad l duplicata, igitur b r ad a, ut m ad l duplicata. Et ut c ad d pariter duplicata, constat autem b r ex l, f, r. r autem cum l facit o ex supposito, nam r fuit differentia o & l, igitur b r sunt æquales ex communi animi sententia o f, igitur o f ad a, ut c ad d duplicata. At o ad m ut c ad d duplicata, quia sunt in continua proportione, igitur residui f ad residuum

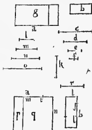
Cap. 3 1.

Per 12 sexti Element.

Per 44 primi Element.

Per 1 secundi Element.
Per 16 sexti Element.

Per 19 quinti Element.



residuum t, ut c ad d duplicata, quod propositum erat. Operatio autem breuis est, ponamus ut in exemplo c 24, d 12, e 6, f 3, a si 10, b 8. Duco d in a fit 120, duco f in b fit 24, detrahe 24 ex 120, relinquitur 96, diuide 96 per 21 differentiam c & f, exit $4\frac{4}{7}$ quantitas l, igitur ducendo l per e fit $36\frac{4}{7}$, diuide per f exit $9\frac{1}{7}$, quantitas m quæ est dupla ad l, ut c ad d, detrahe ergo $4\frac{4}{7}$ ex 8, relinquitur $3\frac{3}{7}$, detrahe $9\frac{1}{7}$ ex 10, relinquuntur $\frac{6}{7}$, proportio $3\frac{3}{7}$ ad $\frac{6}{7}$ est quadrupla, & duplicata ei quæ est c ad d.

24		
12		10
6		
3		8

Propositis ergo duabus lineis rursus a & b, quibus uolo addere communem c, & detrahere rursus ut sit proportio residuorum duplicata ei quæ est aggregatorum. Duc differentiam quadratorum in se, & eius cape trigesimam sextam partem, cui adde tertiam partem producti unius in alteram, & à radice totius aggregati, detrahe sextam partem differentiæ dictorum quadratorum, residuum est quęsita tertia quantitas, uelut capio 5 & 4, differentia quadratorum est 9, eius quadratum 81, cuius $\frac{1}{36}$ est $2\frac{1}{4}$, cui adde $\frac{1}{3}$ producti 5 in 4, & est $6\frac{2}{3}$, qui est tertia pars 20, & fit $8\frac{11}{12}$, cuius à radice detrahe $\frac{1}{6}$, differentiæ quadratorum, id est $1\frac{1}{2}$, & relinquitur res quæsita ℞ $8\frac{11}{12}$ m: $1\frac{1}{2}$. Igitur partes erunt $6\frac{1}{2}$ m: ℞ $8\frac{11}{12}$, & $5\frac{1}{2}$ m: ℞ $8\frac{11}{12}$ residua scilicet: aggregata autem $3\frac{1}{2}$ p: ℞ $8\frac{11}{12}$, & ℞ $8\frac{11}{12}$ p: $2\frac{1}{2}$.

Rursus sint propositæ duæ lineæ, & sit una 4, alia 3, uolo addere communem quantitatem utrique quod sit proportio aggregati media seu radix proportionis propositarum quantitatum: & est quasi conuersa præcedentis. duco 4 in 3 fit 12 huius ℞ addo utrique, & habeo intentum, proportio enim ℞ 12 ad 3, est uelut 4 p: ℞ 12 ad ℞ 12 p: 3, nam 3 in 4 p: ℞ 12 producit 12 p: ℞ 108, & ℞ 12 in ℞ 12 p: 3 non minus producit idem 12 p: ℞ 108.

Ex hoc sequitur quod proportio binomij ad aliud binomium alterius speciei potest esse quantitas potentia tantum rhete, uelut si duco ℞ 3 in ℞ 12 p: 2, fit 6 p: ℞ 12, igitur 6 p: ℞ 12, est in proportione ℞ 3 ad ℞ 12 p: 2. Et ita de recisis 6 m: ℞ 12, est in proportione ℞ 3 ad ℞ 12 m: 2, et hoc propter commutationem, quia ℞ est media inter duos numeros, & numerus inter duas ℞.

SCHOLIVM.

Dico modo quòd si partes binomiorum non sint commensæ secundum eandem proportionem, quòd si binomiorum binomio esset commensum, aut recisum reciso, numerus esset commensus potentia tantum rhete seu longitudine alogæ. Et sint gratia exempli ab tripla de & bc dupla ef, dico quòd si tota ac esset commensa toti df, essent partes ab, bc inuicem commensæ

a b 8 b ℞ 48 c

d z e ℞ 12 f

itemq́ d e & e f. Nam ut demonstrauimus suprà, quia non est eadem omnium proportio, igitur unius par ad partem una maior altera minor, sit ergo minor b c ad e f, quam a c ad d f, & hæc minor quam a b ad d e fiat, ut a c ad d f, ita a g ad d e, commensum est igitur a g de, & fuit etiam a b commensum d e, igitur a g g b commensæ. Similiter b c commensa fuit e f & g e eidem, quia in proportione a e ad d f, g e igitur commensa b e, quare g b ipsi b c fuerat etiam b a, igitur a b b c commensæ sunt, quare etiam d e & e f. Non est autem necessarium (ut dixi) quòd si partes sint commensæ, ut totum sit toti commensum ut dixi: neque etiam si totum toti & pars parti, ut reliqua pars reliquæ parti, uelut 10 & 9 sunt commensa, & R 20 & R 5 commensa, non tamen 10 p: R 20 est commensum 9 p: R 5, aliter sequeretur quod 10 & R 20 essent commensa, quod est absurdum.

Ex hoc sequitur quod binomio non commensa non possunt esse in proportione numeri, possunt tamen esse in proportione unius simplicis quantitatis.

De sex proportionibus mutuis reduplicatis, quæ oriuntur ex additione unius quantitatis ad unam aliam, & duabus inutilibus. CAP. XXXV.



Cum proposita fuerit una quantitas, putà 2, possum addere illi aliam quantitatem, octo q́ modi proportionis reduplicatæ consurgent, quorum duo sunt inutiles: modi ergo sunt, ut quãtitas addita ad propositum habeat duplicatam proportionem quam aggregatum ad additam secundus conuersus, ut aggregatum ad a d additam habeat duplicatam ad eam quæ est additæ ad propositum. Et ideò ponam eos ordinatim in tabula. Prima igitur utilium duc 2 numerũ propositũ ad quadratum fit 4, & ad cubum fit, & habebis 1 cub. æqualem 4 rebus p: 8.

1	Aggreg. ad add. dup. add. ad prop.
2	Add. ad prop. dup. aggreg. ad add.
3	Aggreg. ad add. dup. prop. ad add.
	Propos. ad add. dup. aggreg. ad add. inu
4	Aggreg. ad propos. dup. propos. ad add.
5	Propos. ad add. dup. aggreg. ad propos.
6	Aggreg. ad prop. dup. add. ad propos.
	Addit ad prop. dup. aggreg. ad prop. inu.

Secũda, duc 2 ad cubum, fit 8, accipe R quæ est R 8, & accipe R 2, & ita habebis 1 cu. æqualem quadrat. R 2 & R 8, & quadratum æstimationis est res quæsita.

Tertia habet quadratum p: 2 pos. numero proposito æqualia 4 quadrato numeri propositi.

Quarta habebimus cub. p: quad. 2 numeri propositi æqualia 8 cubo numeri propositi. Quinta

Quinta, duc 2 ad cubum fit 8, & habebis 1 cub. p: rebus numero proposito, scilicet 2 æqualia ℞ 8, & quadratum æstimationis est quantitas quæsita.

Sexta habebimus quadratum æquale rebus numero proposito, id est 2, & numero quadrato numeri propositi, id est 4, ut sit 1 quad. æquale 2 pos. p: 4.

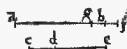
Dico demum quod proportio confusa aggregati primę & quartæ quantitatum omiologarum ad aggregatum secundæ & tertiæ earundem est ueluti quadrati p: 1, detracta proportione ad ipsam proportionem, ut aliàs demonstraui. Ex quo habetur confusa quarumlibet quatuor quantitatum rectè intelligenti.

De diuidendis duabus lineis æqualibus secundum proportionem mutuam reduplicatam datam. CAP. XXXVI.

Istud docemus in Arte magna. Sed ibi adnotanda sunt illa uerba, ex quibus [illegible] negocium pendet: Rursus quod fit ex a b & a d in a b, & e f est æquale ei quod fit ex e f & e g in aggregatum a b & e f, quia ex supposito e f & e g, æquantur a b & a d, constat ergo a b quantitatem, & e f bis assumi, & cum hoc supponi a b & a d æquales esse e f & e g, ut primum potest supponi pro arbitrio, sed secundum non ita: eo tandem uenitur ut duæ & duæ quantitates sint in eadem proportione cum tertia. Et quod tertia illa scilicet a b & e f componitur ex secundis a b & e f. At duabus quibuslibet constitutis proportionibus, & manentibus duabus quantitatibus, licebit constituere communem illam quantitatem, & reliquas duas inuenire. Exemplum, sint datæ duæ quantitates a 6, b 3, & aliæ duæ c d subiungo e ad a b in continua proportione, & facio f ad e, ut d ad c, & g ad f similiter, eritque g ad a, ut f ad b duplicata. Eo igitur peruenire oportet cum proportione data loco æqualitatis. Constat etiam quòd si proportio a ad c sit duplicata ei quæ est b ad d, quod hæ quatuor qualitates copulabuntur ad unam.

De sex comparationibus quatuor quantitatum reduplicatæ proportionis. CAP. XXXVII.

Et sint quatuor quantitates in reduplicata mutua proportione a b prima, c d secunda, d e tertia, b f quarta, dico quòd duabus ex his notis fiunt, ut liquet sex coniugationes, & duæ harum neque cum aggregatis per se notis notæ sunt, sci



licet nota prima & quarta, uel secunda & tertia notis a f & c e: at reliquæ quatuor notam faciunt quantitatem modo aggregatum omnium notum sit. Sit ergo primum a b & c d nota, utpote a b 24, c d 6 aggregatum a f & c e 47, tunc tu scis quod proportio d e ad b f est, ut a b ad c d duplicata, igitur ut 16 ad 1, igitur d e & b f ad b f, ut 17 ad 1, at d e & b f sunt 17, igitur diuiso 17 per 17, habebis b f unum & d e sexdecim, nam d e & b f sunt 30, ut dixi, quia a b & c d sunt 30, & a f & c e 47, igitur residuum quod est d e & b f est 17.

Sit rursus b f 1, d e 16, aggregatum a f & c e, 47, igitur a b & c d sunt 30, & proportio a b ad c d, ut 4 ad 1 & ab cd ad c d, ut 5 ad 1, diuide 30 per 5 exit 6, & tanta erit c d & a b 24.

Proponatur modo a b & d e notæ 40 totum, ut prius 47, & sit primo nota b f, & sit 1, & c d 6, ponam a b 1 pos. erit tertia in proportione $\frac{1}{6}$ quad. duc in b f, fit $\frac{1}{6}$ quad. diuide per c d, exit $\frac{1}{36}$ quad. igitur $\frac{1}{36}$ quad. p: 1 pos. æquantur 40, & 1 quad. p: 36 pos. æquantur 1440, & ita rei æstimatio est 24, cuius quadratum est 567, & eius pars trigesima sexta 16, seu detracto 24 à 40, relinquitur idem 16. Supponatur modo ab nota 24 de 16 totum 47 erit, reliquum aggregatum c d & b f 7, ponatur c d 1 pos. erit tertia in proportione $\frac{1}{24}$ quad. duc $\frac{1}{24}$ quad. in 16, fit $\frac{2}{3}$ quad. diuide per a b, id est 24, exit $\frac{1}{36}$ quad. æquantur igitur $\frac{1}{36}$ quad. p: 1 pos. ad 7. Igitur 1 quad. p: 36 pos. æqualia 252, & res est 6, & est c d residuum est 1 b f. At modo si ponatur c e 22, nota ita ut c d sit b & d e 16 & a f 25. Ponemus ut in tertio casu a b 1 pos. erit tertia in proport. $\frac{1}{6}$ quad. Igitur si $\frac{1}{6}$ quad. producit 6, quid producet d e quæ est 16, duc 6 in 16 fit 96, diuide p: $\frac{1}{6}$ quad. exit $\frac{576}{1\ quad.}$ hoc ergo cum 1 pos. iunctum efficit 25, igitur 25 quad. æqualia 1 cub. p: 576.

Et hoc non continetur in capitulo. Sed quia in hoc casu supponimus numerum quadratorum esse 22, quia c e & æstimatio est c d 6, cuius cubus 216, qui cum 576 efficit 792, & hoc est æquale 22 quadratis, nam 22 in 36 efficit 792. Et supponimus a g numerum quadratorum, id est 22, & a b rei æstimationem, & quod ex b g in quadratum a b fiat 576, habebimus 1 cub. æqualem 22 quad. p: 576. Et hoc habet capitulum. Sed res non redit ad idem, nam æstimatio rei est minor 24, quia esset 24 cubus, esset æqualis 24 quadratis, igitur 22 quadratis & duplo unius quadrati, at unum quadratum est 57 igitur erit æqualis 22 quadratis, & 1152 non ergo 22 quadr…

576 folum. Et similiter notis a b & b f, & noto aggregato c e incidimus in eiusdem difficultates.

De confusa quantitatum mutuarum in proportione reduplicata comparatione.

CAP. XXXVIII.

UT ponamus ut sint duæ lineæ a b & c d, diuisę in e & f, & sit proportio f d ad c b, uelut a e ad c f duplicata, & sint e f secunda & c b quarta æquales & notæ, & totum aggregatum erit etiam notum. nam in hoc casu proportio aggregati primæ & quartæ, id est a b ad aggregatum secundæ & tertiæ, id est, c d est ut quadrati proportionis p: 1, ad proportionem ipsam itidem p: 1, uelut sit a b 15, c d 9, diuido 15 per 9, exit $1\frac{2}{3}$, & hoc est quadratum proportionis p: 1 in comparatione ad 1 pos. p: 1, quare cum 1 pos. p: 1, hic habeat locum unius, erit ut ponamus 1 p: 1 pos. & ducamus p: $1\frac{2}{3}$, fit $1\frac{2}{3}$ pos. p: $1\frac{2}{3}$ æqualia 1 quad p: 1, igitur 1 quad. æquatur $1\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{2}{3}$ ergo res est R: $\frac{49}{36}$ p: $\frac{5}{6}$, quod est 2, & proportio erit dupla, pone igitur 1 pos, detrahe ex 9, fit 9 m: 1 pos. & ita etiã quia secunda est æqualis quartæ, erit 15 m: 1 pos. erit 15 m: 1 pos. dupla etiam 9 m: 1 pos. & 18 m: 2 pos. æqualia 15 m: 1 pos. & 15 p: 2 pos. æqualia 18 p: 1 pos. igitur res est 3. Ideò in hoc casu tres quantitates necessariò sunt in continua proportione.

De diuidendis duabus lineis notis secundum proportionem mutuam reduplicatam iuxta partes datas.

CAP. XXXIX.

HOc capitulum est pars duorum superiorum: & ex eo habetur capitulum generale cubi & numeri æqualium quadratis: nam propositis, gratia exempli, 1 cu. p: 16 æqualibus 9 quadratis, proponam lineam a e 9, & quæram æstimationem 1 cu. æqualis 9 quad. p: 16 quæ sit a b, igitur nota b e, addam b g æqualem, b e ergo a e, a b, a g, e b, b g, e g, c d æqualis a e omnes notæ. Propositum igitur est diuidere c d in f, ut ut sit f d ad b g duplicata ei, quæ est a b ad c f, qua inuenta cum cubus c f, additis 16 ex supposito sit æqualis corpori ex c d in quadra- Cap. 26 & 27.

tum

tum c f, quoniam totum eſt ęquale ſuis partibus: & d e ſit 9, & quod fit ex d f in quadratum c f 16, nam tantum fit ex b g in quadratum a b: igitur 9 quadrata e f æquantur cubo p: 19. Vt ergo diuidamus c d iuxta hoc nóſcere oportet ordinem eorum quę dicta ſunt ſupra, ſcilicet quòd quantitates a b, c f, f d & b colloſcantur hoc ordine, ut ſunt mutuæ reduplicatæ: alio ut ſunt in continua proportione cum una & eadem, ſcilicet a b prima, f d ſecunda, c f tertia, b g quarta, prima & quarta manent in utroq; ordine, ſed ſecunda & tertia mutantur, nam c f eſt in reduplicata ſecunda, & f d tertia, in recta f d eſt ſecunda, e f tertia.

Proponantur rurſus notæ h, a b & c d, & ſint partes conſtitutæ e a, e b, f c, f d, quarum una ſi nota eſſet palam, eſt ob continuam proportionem quòd eſſent omnes notæ, ſed ſi ſolæ h, a b, & c d, palam eſt quòd erunt notæ partes per Artem magnam deueniendo ad capitulum cubi rerum & quadratorum æqualium numero.

Cap. 29 regula ſecunda.

Ex qua peruenies ad cognitionem partium propoſitarum: ut ſi h ponatur 4 a b 6 m: R 12 c d R 12 m: 1. Et partes ſe habebunt, ut uides. Eſt autem proportio 1 ad 4 m: R 12 duplicata ei quæ eſt 2 ad R 12 m: 2, & caue ne te confundas. Dico etiã quod ſi cubus & 24 ſint æquales 8 q̃d. & ſit c d numerus quadratorum ſcilicet 8, ut ſit a e æqualis c d, ſciemus c b & b g, & erunt poſita c b 1 quad. & b g, 1 cu. p: 8 poſ. æqualia R 24 numeri propoſiti, & tam c b quam b g erunt quadrata æſtimationis. Quia ergo notæ c b, b g, & per duo ſuppoſita nota: ſcilicet quantitatem c d ſeu a e, & numerum æquationis, id eſt 24. & hic producitur ex ſuppoſito ex f d in quadratum f c & f d & f e habent neceſsitatem ſaltem alternam, quia dum c d & a e ſunt 8, & numerus qui producitur 24, uariatur ut ſit 20 aut 22 aut 25, tunc uariatur quantitas rei, & quadratum eius c b, b g, igitur propoſita quantitate c d uel a e quantitates c b ſeu b g habent connexionem cum c f & f d: & quia ſi non ſupponeretur numerus 24, haberetur ex partibus c f & f d, ducendo f d in quadratum f c, fiet ut inuenta e b contraria ratione neceſſaria ſit cognitio diuiſionis c d in f. Nam cum propoſuerimus c f, f d cognitas per duo conſequentia ad illa quæ ſunt aggregatum earum, & productum d f in quadratum f c, conſequimur duas alias a e & c b ſeu b g, igitur per a e, c b ſeu b g, & duo conſequentia & ſunt a b, b g & productum g b in quadratum a b cum uno ex tribus c f, f d, c d, inueniemus reliqua duo. At c d nota eſt ſemper ex ſuppoſito cum ſit æqualis a e igitur c f & f d. Si ergo ponatur productum g b in quadratum a b 20, & c f duo erit f d 5, diuiſo 20 per 4 quadratum 2, & ſi

4
2 R 12 m: 2
1 4 m: R 12

f d ponatur

f d ponatur 5 erit c f ℞ 4, id est 2, nam diuiso 20 per 5 exit 4, manifestum est ergo quòd c f, f d & c d habent consequentiã ad a b seu a c & c b seu b g. Concludo quòd supposita cognitione a b, b g, quæ semper habeñ necessaria, est connexio cum c f & f d, quia c d est differentia a b b g quæ non esset, si c d nõ esset illa differentia, sed solum 1 cub. p: 24 æquaretur 8 quadratis, & esset nota a b, & b g, ex quarum ducta b g in quadratum a b, fieret 24, sed c d non esset 8, nec æqualis differentiæ a b & b g. Proponatur ergo linea a d nota, & est rei æstimatio cubi æqualis quadratis numero a c, & numero æstimationis proposito qui fit ex c d in quadratum a d, & nota est ex hoc c d. item nota est quia est differentia a d & a c numeri quadratorum atq; notarum, iam uerò a d diuisa est bifariam in a c, c d notas, & a b et b d ignotas, quęrendum est igitur an ex notis a c, c d (quia habent connexionem) haberi possint a b & b d, & ita erit quęsitum notum. Secundo an data diuisione in b magnitudo c d constituatur itemq; a c. Et differt à pręcedente quoniam per a c, c d in præcedente, & positionem quærimus quantitatem b d, & ea habita cognoscimus c d, b c & ita a b & quæsitum. In hoc autem secundo constitutis a b, b d & habetur quantitas a d etiam & est res & eius quadratum etiam notum erit, ex quibus quærimus quantitatem a c id est numeri quadratorum & quod fit ex c d in quadratũ a b & est numerus ęstimationis qui cum quadratis numero a c æquatur cubo a d. Tertiò quæritur quàm ratonem habet incrementum c d in comparatione a d b c quia b c a d c d est duplicata ei quę est a d ad a b ex supposito. si ergo c d certa & data quantitas statuaĩ quo minor erit a b eo maior erit b c residuum, supponitur autẽ minor c d quàm a b, maiorem aũt oportet esse proportionem b c ad c d quam a d ad a b, quia duplicatam, igitur incrementum a b an semper augeat proportionem b c ad c d supra proportionem a d ad a b an minuat; nam de æqualitate certum est quod non; & an uarietur hæc ratio mutata quantitate c d. hoc igitur & quomodo fiat certè est considerandum, loquamur igitur de secundo, quia est facillimum cum enim data sit a d & a b, data erit tertia linea quæ sit data, igitur proportio partium a d, ad d e diuise a e, et data b d in diuisa, ergo poterit, diuidi ut a d ad d e, seu ad e, & diuisio illa cadet in c, cum igitur proportio a d ad e data sit, erit & b c ad c d, data est autem b d data ex supposito. igitur utraque earum b c, c d data quod erat demonstrandum. nam data b c cum sit data a b, erit data a c numerus quadratorum. Cumq; sit data a d, erit illius quadratum datum: & quia c d data erit productum c d in quadratum a d datum, is autem

a b e h f c d

e

Per 11 sexti Elem.

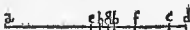
Per 10 sexti Elem.

est

est numerus æstimationis quæsitus. Inueniamus etiam primum ut facilius & proponamus a d 10 d c 1, erit ergo numerus 100, & sit b d 1 pos. & a b 10 m: 1 pos. cuius quadratum est 1 quad. p: 100 m: 20 pos. quod diuisum per a d relinquit $\frac{1}{10}$ quad. p: 10 m: 2 pos. hæc est tertiæ quantitas quæ ducta in b c, producit quãtum a d prima in c d quartam quod productum est 10. Quia ergo b d est 1 pos. & c d 1, erit b c 1 pos. m: 1. igitur productum tertiæ quantitatis est $\frac{1}{10}$ cu. p: 10 pos. m: 2 quad. m: $\frac{1}{10}$ quad. m: 10 p: 2 pos. & hoc totum est æquale 10. Quare reddendo uicissim fient $2\frac{1}{10}$ quad. p: 20 æqualia $\frac{1}{10}$ cu. p: 12 pos. & 1 cu. p: 120 pos. æqualia 21 quad. p: 200. & erit cu. æqualis 27 rebus p: 46. & ideo est in parte non nota. Pro tertio oportet præsupponere primum quod si a d sit diuidenda, sicut proportio ipsius a d a b sit ut

Ex 5 secundi Elem. b c ad b d, erit c a, cum maxima fuerit æqualis radici octupli quadrati a d dempto duplo a d. & tunc si a e est minima, erit c d maxima. Et rursus cum fuerit proportio b c ad c d, ut quadrati ad quadratum a b non poterit esse c d maior in comparatione ad a d, quam ut statuatur tertia pars a c æstimatio cubi p: unius rei æqualis quartæ parti quadrati a d. Et hoc pendet ex demonstratis in libro de Proportionibus.

Propos. 135 Exemplum constituta a d 10, erit tertia pars a c æstimatio cubi & rei æqualis 25, qui est quarta pars 100, quadrati 10, erit ergo tertia pars a c ℞ v: cu. ℞ $256\frac{17}{64}$ p: $12\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. $256\frac{17}{64}$ m: $12\frac{1}{2}$, unde tota a c erit ℞ v: cu. $113917\frac{41}{64}$ p: $337\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. 113917 m: $337\frac{1}{2}$, & c d erit residuum. Considerandum est ergo quod supposita c d minore problema potest componi, quia primum proportio quadrati a d ad quadratum a b, quanto minor est a b, tanto maior est in comparatione ad proportionem b c ad c d, tum quia a d est maior b c, tum quia sumimus proportionem quadratorum in primis, & linearum in secundis. Et ideo cum augetur a b minor fit differentia proportionis quadrati a d ad quadratum a b ad proportionem b c ad c d. Et quia rursus necesse est, ut proportio quadrati a d ad quadratum a b sit maior proportione b c ad c d: quia b c poterit esse minor c d, quia c d data est, quadratum autem a d semper est maius quadrato a b, cum sit totum a d partem comparatum: crescit ergo proportio b c ad c d in comparatione quadrati a d ad quadratum a b, donec fiat ei æqualis, inde fit maior, & rursus ut dixi minor, ergo rursus fiet æqualis, & hæc est causa duarum æstimationum, oportet igitur inuenire maximam proportionem b c ad c d in comparatione quadrati a d ad quadratum a b: Quia ergo maximum parallelipedum a e fit ex b c in quadratum a b, cum a b fuerit dupla b c, igitur tunc maxima erit proportio eius ad parallelipedum c d in quadratum a b, quare tum minima proportio quadrati a d ad quadratum a b in compa-

comparatione b c ad c d. Et ita si sumantur duo puncta e & f, ita ut c e in quadratum e a uel c f in quadratum f a efficiant parallelipeda singula æqualia parallelipedo c d in quadratum a d, tunc punctum b erit inter e & f, sed non æqualiter distabit. Sed quia hoc est generale seu a e sit differentia a d & c d, seu quæuis alia quantitas: Ideo oportet hoc inuenire ex proprietate differentiæ coniunctæ cum generali ratione dicta: & ratione secundæ æstimationis inuenta per primam sæpius dictã, sit ergo a d, d e


data & pũctum in a c maxima proportionis b c ad c d in comparatione a d quadrati ad quadratum a b. b. & sit c e in quadratum e a datum, ut sit æquale c d in quadratum d a, & sit æstimatio data c e in quadratum a e, ut dixi necessariò e a, dico quòd data est a f similiter, & quod b est inter e & f, hoc enim est demonstratum. tertiò dico quod b f est minor b e, ita ut semper f sit proximius b quam ipsum e. Cum igitur ex ratione inuentionis secundæ æstimationis per primam ex tota a c numero quadratorum oporteat detrahere a e primo inuentam æstimationem & residuũ scilicet e c, ducere in a e cum quarta parte e c, quæ sit e g, ut ducatur e c in a g, & sumptum fuerit latus potens in illam superficiem, id est media inter e c & a g, & ei addita dimidia c e quæ sit f h, & conflabitur a f ex supposito, igitur h a est media inter e c & a g, ex his quæ dicta sunt, dico igitur quod f non poterit esse in a b, quia si esset inter e & b productum esset maius producto e c in quadratum a e, & si esset inter a & e esset minus. Similiter si supponerentur c b & b f æquales, minus esset productum c f in quadratum f a quàm c e in quadratum e a, ergo cum, ut demonstratum, quãto c prior est b, tanto productum c e in quadratum e a est maius, igitur si debet minus quia in æquali distantia erat maius, necesse est ut e b sit maior b f, quod erat demonstrandum. Dico modo quòd tota consideratio est in hoc, quia c d quæ assumpta est, uariatur iuxta productum c f in quadratum f a, gratia exempli, & est numerus æstimationis, sed non sumitur à partibus c a, ucrùm à tota solum, & ideo sumitur c a pro indiuisa. Si autem sumeretur pro diuisa uelut in e, uel b, uel f, non sumitur e a, ut differentia c d & d a. Et iuxta hoc si dicam proposi-


tã, a b, uolo eam diuidere sic ut cubus a c sit æqualis ei quod sit ex a b in quadratum b c: deuenies ad cubum & res æqualia numero. Et eodem modo si posita a b, b c uelis diuidere a c in d, ut cubus a d sit æqualis ductui seu parallelipedo a b, b c, c d peruenies ad 1 cu. & res æquales numero & in ambobus supponitur quòd latus cubi sit

differentia laterum parallelipedi, adeò ut hic haberemus intentum, sed hic deficit unum, scilicet ut fit parallelipedum & non cubus.

Similiter notum est quod cum fuerit proposita a b, quam uelim diuidere in c, ut mutua parallelipeda sint decem, gratia exempli, possum inuenire parallelipedum ex b c in quadratum c a: quia diuisis decem per a b exit productum a c in c b notum: quare partes a c, c b, igitur productum c b in quadratum a c notum erit. Et ponatur quod sit ℞ cub. 10, mutuum & a b sit 10, gratia exempli, erit productum a c in c b ℞ cu. 100, quare a c 5 p: ℞ v: 25 m: ℞ cu. 100, & c b 5 m: ℞ v: 25 m: ℞ cu. 100. Inde habebis productum ut dixi. Et demonstratum est etiam quod eiusmodi producta sunt in proportione partium a c ad c b.

Per 5 secundi Elem.

Et rursus, quia demonstratum est quòd diuisa quauis linea putà a b quomodolibet in c proportio parallelipedorũ mutuorum est ut partium: & differentia illorum est parallelipedum a c in c b in differentiam a c & c b, sit igitur medium a b punctum e, erit ergo solidum a c in quadratum c b maius solido b c in quadratum a c solido dupli c e in superficiem c h. sit k b æqualis, a c erit ergo solidum a c in quadratum c b ęquale solidis cubo b k, & a c in quadratum c k, & parallelipedo a e in duplũ c k in k b, quare cum a e sit æqualis k b, erit solidum a c in quadratum c b æquale solidis duobus uni quod constat ex a k, k c in quadratum k b alteri quod constat ex a c in quadratum c k, solidum uerò c b in quadratũ a e seu k b est commune, ei quod fit ex b c in quadratum a c, quoniam a c est æqualis k b, & a k æqualis b c, igitur solidum a c in quadratum c b excedit solidum b c in quadratum a c, in eo quod fit ex c k, in quadratum c a & a c in quadratum c k. hoc autem est æquale ei quod fit ex duplo c e in superficiem c h. Quod enim fit ex a c in quadratum c k, et c k in quadratum a c, est æquale ei quod fit ex a k id quod fit ex a e in k. Dico ergo quod hoc est æquale ei quod fit ex duplo c e in c h. Id est ut proportio c h ad c m sit uelut a k ad duplum c e. nam c h ad c m est ut c b ad c k: c k autem est duplum c e, & a k æqualis c b, quia a c est æqualis k b, igitur per demonstrata ab Euclide proportio c b ad c k, ut a k ad c e, quod fuit propositum.



...43 Pro... lib. de ...or. ...sexti ...7 ...tiam Elem.

Ex quo patet maximum futurum discrimen parallelipedi a c in quadratum c b ad parallelipedũ b c in quadratum c a, quoties proportio c e differentiæ ad d e, differentia fuerit maxima in comparatione tetragoni partium rectanguli d g ad tetragonum re...

lum c h. Quo fit ut tale parallelipedum sit maximum, cum proportio c k ad a c facit maxima in comparatione quadrati a e ad c h, at Ex 18 diff.
proportio quadrati a e ad c h est ut quadrati a c ad quadratum a e lib. de Pro
detracta proportione confusa quadrati a e ad quadratum c e. hæc port.
autem duplicata ei quæ est a e ad c e. Maxima igitur differentia parallelipedorum, quoties proportio differentiæ partium ad dimidium quantitatis fuerit maximè propinqua proportioni quadrati dimidij ad seipsum detracta duplicata eiusdem dimidij ad dimidium illius differentiæ, nunquam autem potest esse ei æqualis. Et deducta ad numerum si a b ponatur 12, erit a e 6, & a c 6 m: 1 pos. c b 6 p: 1 pos. & 1 cu. p: 108 æqualis 36 pos. & hoc esse non potest, igitur non potest æquari proportio. ut ergo inueniamus maximum quod potest produci oportet, ut inueniamus numerum quem producit 24 in ℞ 12 tertiæ partis, & producitur ℞ 6912. Et hic est numerus maximus: ideo quod res ℞ 12, scilicet tertiæ partis 36: igitur a c est 6 m: ℞ 12, & b c 6 p: ℞ 12, & parallelipedum ℞ 27648, & est fermè 166, & partes quasi $9\frac{1}{2}$ & $2\frac{1}{2}$, & ideò in proportione, 24 diuisi in 19 & 5. Et hoc non est mirum, sed quod mirum est, est quod cum parallelipedum c k in c h non sit annexum alteri aliorum, nam possum scire quoduis illorum ignorato parallelipedo c k in c h, & scire c k in c h, incognito utroque aliorum sicut etiam de parallelipedo a b in c h, hoc tamen fit notum aliud autem non. Et ideò id accidit, quia a b supponitur nota, sed c h præsupponitur incognita, est tamen magnum problema.

Iam uerò habemus secundum modum principalem inuentionis capituli cubi & numeri æqualium numero rerum. Posito enim quòd uelim scire 1 cub. p: 64 æquandum 36 rebus, ponam a b duplum ℞ 36, & erit 12, & duplicabo 64 fit 128, & quæram diuisionem a b in c, ut ex a b in c h fiat 128, igitur diuiso 128 per a b, quæ est 12, exibit c h $10\frac{2}{3}$, quare a c erit 6 m: ℞ $25\frac{1}{3}$, & c b 6 p: ℞ $25\frac{1}{3}$. Est autem diuisa b a Per 5 secūdi
in c per æqualia & propositum est diuidere eam rursus in d per in- Elem.
æqualia, ut sit proportio a e dimidij a b ad, d e dimidium differentiæ d b & d a, uelut d g ad c h, tunc enim erit parallelipedum ex d e in d g 64, & duplum d e in d g 128, quemadmodum propositum est. Et ita proposito quouis numero qui possit produci ex 36, diuiso in duas partes, ita ut ex una in duplum ℞ alterius fiat ille numerus: seu simpliciter in ℞ alterius producatur dimidium numeri propositi. Et ita habebimus capitulum generale. constat autem in hoc casu quod a d erit 4, d b 2, & d g 32, & cum d e sit 2, erit duplum d e, quod est 4, in d g 128 parallelipedum sensu inuentum, sed hoc oportet inuenire ratione. habemus ergo datam a b diuisam per æqualia

in c, & per inæqualia in e cognitas partes, & uolumus diuidere eam in d, ut sit proportio d a ad c a, ad eam quæ est c b ad b d in proportione a e ad e d.

De tribus necessarijs quæ præmittere oportet ad intentionem. CAP. XL.



I ergo d e supponitur res, non potest esse numerus, & a d radix, quia esset a b tota ℞, & non numerus propositus, neq; radix, quia a d esset recisum b d binomium, & produceretur numerus simplex aut compositus cum radice per m: uel p: igitur ductus in d e ℞ fieret binomium aut recisum aut ℞, igitur numerus æquationis non esset numerus. Pari ratione non potest d e esse binomium aut recisum tertiæ nec sextæ speciei, qua non potest esse ℞ simplex. Rursus proponatur d e binomium, & sit d c numerus, & e f æqualis, e c & e g æqualis, e d, erit ergo f g numerus, & c f ℞, ex a d ergo reciso in d b binomium

oportet ut fiat recisum simile binomio d g, ut ex eo in productum d g fiat numerus. idem erit si c e ponatur numerus & d c ℞. Interest hoc solum an ℞ sit maior numero an minor. Et in hac constitutione non potest d e esse recisum, quia oporteret assumere quantitatem maiorem d e, & ita essemus extra casum regulę & problematis. Semper ergo d e est binomium. Et ponamus d e 3 p:℞ 5, & erunt res 32 æquales cubo p: 24: & a e ℞ 32, & similiter si d e sit 3 m: ℞ 5, sed non erit 3 contentum in d e. Idem dico cum 1 cu. p: 12 æquatur 34 rebus, & est æstimatio 3 p:℞ 7, & 3 m:℞ 7, nam non potest uerari nisi in binomio: sed est aliud cum 1 cub. p: 8 æquatur 18 pos. nam res est ℞ 6 m: 2, & non potest contingere in binomio: igitur prima duo exempla sunt idonea. Et quia in his addere oportet aliquem numerum qui ductus in ℞ totius producat numerum æquationis, & manifestum est, quod non potest esse ℞ neq; binomium neq; recisum, non enim conficeret numerum, ideo oportet ut sit numerus, nos autem iam supponimus hic esse quadratum. Proponamus ergo a e 8, & quadratum illius sit 64 numerus rerum: & sit ut addendo 17, fiat alius quadratus, scilicet 81 cuius ℞ quæ est 9, ducta in 17 additum faciat 153, erit igitur 1 cu. p: 153 æqualis 64 rebus, & rei æstimatio $4\frac{1}{2}$ p:℞ $3\frac{1}{4}$, id est dimidium ℞ totius p: ℞ differentiæ numeri æquationis, & $\frac{3}{4}$ numeri aggregati. Erit ergo posita c e ℞ $3\frac{1}{4}$, & c d $4\frac{1}{2}$ ad $3\frac{1}{2}$ m:℞ $3\frac{1}{4}$, & d b $12\frac{1}{2}$ p: ℞ $3\frac{1}{4}$, & d g 9 p:℞ 13. Et productum a d in d b $40\frac{1}{2}$ m: ℞ $263\frac{1}{4}$, hoc ergo ductum in d e scilicet $4\frac{1}{2}$ p: ℞ $3\frac{1}{4}$ fit 153. Possumus ergo diuidere etiam 64 in duas partes, ex quarum una in ℞ alterius

Vide supra cap. 5.

℞ alterius fiat 153, & quia ℞ illa est res, & est d e, ducemus d e in se, & fit $23\frac{1}{2}$ p: ℞ $263\frac{1}{4}$, igitur reliqua pars est $40\frac{1}{2}$ m: ℞ $263\frac{1}{4}$, ecce quod res redit ad idem. Ex d g igitur in productum a d in d b fit 306, quod diuisum per 16, exit $19\frac{1}{8}$, igitur partes erunt 8 p: ℞ $44\frac{7}{8}$, & 8 m: ℞ $44\frac{7}{8}$. Reducuntur ergo hi duo modi ad unum, uelut si sit numerus rerum propositus a b, & g numerus æquationis, & seu diuiseris a b in quadratum b c, ut latus eius b d in superficiem d a faciat g, seu addideris b c superficiem ad a b, ut tota a f fiet quadrata & latus eius a e in additam b e producat g, fient notæ æstimationes in prima quidem latus b d in secunda dimidium a e addito aut detracto latere differentiæ dodrantis a f, & superficiei a b propositæ. At quoniam a e in c b est æquale g, & b d in d a æquale eidem g, erit a e in c b æquale c d in d a, e a igitur ad c d, ut a d ad c b, at a e maior est c d, ergo a d maior c b, cumque b c & a f quadratæ sint, erit a d æqualis d f, igitur d f maior c b, quod esse non potest: non potest igitur diuisio una esse.

Oportet igitur ut sit superficies a b æqualis numero rerum eiusmodi, ut b c pars quadrata sit, cuius latus e k in k a sit æquale g numero æquationis, & rursus sit c d æqualis a b, cui desit ad complendum quadratum superficies h d, ita ut ex c h rursus in h d fiat idem g, & b erit in utroque casu nota res: scilicet in primo e k, in secundo dimidium c h cum e a quæ potest in superficiem ſl posita l c, dodrante l c. Quia ergo h c ad e k est ut a k ad d h, erit h c ad e k duplicata ad proportionem mediæ a e e k ad mediam inter h c & h f. Sit igitur m media inter h c & e k, igitur h c ad m, ut mediæ inter a e e k, quæ sit n ad mediam inter h e h f, quæ sit o, igitur h c ad m, ut n ad o. Et erunt tres ordines coniuncti ad duo extrema e k, n, e a, e k, m, h c, & h c, o, h f.

Et rursus cum dixerit quis diuisi a b in c, & fuit c d differentia partium, ex qua in c e mediam inter partes producitur f: dico quod habebo 1 quad. quad. p: quarta parte quadrati f æqualia quadratis numero, quadrati dimidij a b, & ideo f nō potest excedere quadratum dimidij a b, seu quartam partem quadrati a b, uelut si a b sit 8, e b, f

b,b a,b c,b o,1 quad.quad.p:9,æqualia 16 (quadrato 4 dimidij a b) quadratis scilicet: quare res erit ℞ v:8 m:℞ 55 & duplum eius, id est ℞ v:32 m:℞ 880, erit quantitas c d differentię partium. Et ideò problema est ut cum sciam quantitatem a b, et modum inueniendi productum ex c d in c e, ut sit æquale f, si inuenerò modum ut ex c d in productum b c in a c, quod est quadratum c e, fiat idem f, inuentum erit capitulum. Sed uariantur partes scilicet c d & c e in uno & altero problemate.

Rursus cum ex c d differentia partium in productum a c in a b fit f, & b c sit æqualis a d erit ut ex a c in a d, & pòst producto in c d fiat f. ergo si c d esset media proportione inter a c & a d, esset a c diuisa in d secundum proportionem habentem medium & duo extrema: & si productum sic esset, esset c d ℞ cu.f: & quoniam productum a c in a d, est semper in aliqua proportione cum quadrato c d, uel maioris uel minoris, & ea sumitur in æquali proportione semper a b 1 quad. p:numero rerum lineæ diuisæ æqualibus quadrato eiusdem: aut 1 quad. p:quadrato numeri lineæ diuisæ æqualibus rebus in triplo numeri rerum. ut si linea diuisa sit 10, habebo 1 quad. p: 10 rebus æqualia 100, uel 1 quad. p: 100, æqualia 30 rebus, & æstimatio semper erit eadem. Et si quadratum c d sit duplum aut triplum producto a c in a d habebimus, id est quad. p:multiplic. eiusdem numeri rerum æqualia multiplici quadrati eiusdem numeri, aut 1 quad. p:quadrato numeri eiusdem lineæ diuisæ æqualia rebus ductis per conuersum proportionis p:2. Exemplum in quadrupla proportione antea fuit 1 quad. p:10 rebus æqualia 100, uel 1 quad. p:100 æqualia 30 rebus, hic habebo 1 quad. p:40 rebus æqualia 400, uel 1 quad. p : 100, æqualia 60 rebus, qui numerus producitur ex 4 numero proportionis, & 2 assumpto ex regula. Et res seu æstimatio est eadem, uel si productum fuerit multiplex quadrato, assumemus contrario modo, uel 1 quad. cum rebus sumptis secundum illam partem æqualia parti eidem quadrati lineæ diuisæ; uel 1 quad. p : quadrato eiusdem lineæ diuisæ æqualia rebus duplo p:portione eadem lineæ diuisæ: & res redit ad idem. Et exemplum est clarum.

Ex quo tandem patet quòd assumpta a b, ut in pręsenti capitulo, quæ sit 12, & ex c d differentia in productum a c in c b fiat 8, habemus 1 cu.p:4, æqualia 36 pos. hoc enim demonstratum est: Ergo a c erit diuisa in d, eo modo ut ex a c in a d inde in d c fiat 8, & rei æstimatio erit dimidium c d : ergo c d duplum æstimationis, & residui dimidium a d uel b c, si ergo c d esset ℞ cu. 8, id est 2, erit d a ℞ 5 m: & c a ℞ 5 p:1, & ideò tota a b ℞ 20. Si quis ergo dicat fac ex ℞ 20 duas partes, ex quarum ductu rectanguli earum in differentiam fiūt 8, habebis

bebis partes b c ℞ 5 m:1 c a ℞ 5 p:1 productum, quarum est 4, quod ductum in c d, quę est differentia, & est 2, producit 8. Et habebimus 1 cu.p:4 æqualia 5 rebus. Et fundamentum a b est potentia tantum rethe. Si ergo 1 cu.p:6 æquatur 7 rebus res potest esse 1 & 2, ut palam est, Ergo si c d ponatur 2 habebimus posita d a 1 pos.2 quad p:4 pos. productum a c in a d, & in e d æqualia 6, & erit a d 1. Et si ponatur c d 1, habebis 1 quad.p:1 pos. æqualia 6, igitur a d est 2, quando ergo c d est 2, d a est 1, & quando c d est 1, d a est 2. Sed supposita prima ratione quod ex a c, c d, d a in continua proportione fiat 8, & c d sit ℞ cu.8, scilicet 2, si ergo c d quadratum esset quadruplum rectangulo a c in a d hoc habet rationem, hoc modo quod enim fit ex a c in a d est æquale ei quod fit ex c d, d a in a d assumatur d e dupla d a, & d f quadrupla eidem quadratũ,

b c f e d a

igitur d f est æquale quadruplo quadrati d a, & quadratum c d est æquale quadratis c e, e d & duplo c e in e d, igitur duplum d c in e c, & est d f in c e cum quadrato e c est æquale quadruplo c d in d a, id est ei quod fit ex f d in d c semel, hoc autem est æquale ei quod fit ex f d in c e & e d, detracto igitur communi eo quod fit ex f d in c e relinquetur quadratum c e æquale ei quod fit ex f d in d e, est autem f d quadrupla d a & e dupla eidem d a, igitur c e potest in octuplum d a. Ponatur ergo e a qualiscunque numerus puta 10, cum e a sit triplum d a et c e ℞ octupli quadrati d a erit tota c a 3 p: ℞ 8 in numero rerum, & hoc æquatur 10, igitur res scilicet d a est diuiso 10 per 3 p: ℞ 830, m: ℞ 800, ergo c d residuum erit ℞ 810, m: 20, ex tota igitur a c in d a fit 300, m: ℞ 80000, & hoc est quarta pars quadrati c d, scilicet 1200, m: ℞ 320000 sicut proponebatur.

Rursus dicamus quod quadratum c d ad sexcuplum ei quod ex c a in a

b c f g e d a

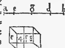
d assumam d f sexcuplam, ut in priori quadruplam d a, & similiter d e mediam inter d f & d a, nam & in priori cõstitutione d e fuit media inter f d & d a, & assumam g e æqualem c d, sicut in priore, sed e g fuit ibi ipsa e f, hic autem est minor eo quod proportio est maior quadrupla, & tunc quadratum d e est sexcuplum quadrato d a, quia est ęquales ei quod est ex f d in d a, igitur ex supposito quod fit ex d g in c e cum quadrato c e est sexcuplum c d in d a, seu æquale ei quod fit ex c d in d f, seu quadrato d f cum eo quod fit ex d f in f e diuidamus ergo utranq;, & fient partes (ut uides) auferantur utrinq; quadrata e f & duplum d e in e f, relinquentur d f in f e, & quadratum e d æqualia quadrato c f, duplo c f in f e, & duplo c f in d e, at d f in f e

in f e est æquale ei quod fit ex e f in f e, & d e semel eo quod d f est æqualis f e & e d, iunctis igitur quadratum e d est æquale ei quod fit ex e f in f e in f e, & e d, & est tota e d. Quadratum autem e d est æquale sexcuplo quadrati d a, igitur quod fit ex e f in c d est sexcuplum quadrati d a. Ponatur ergo d a 1 pos. d fecit 6 pos. tota f a 7 pos. si igitur ponatur c a 10, ut prius erit e f 10 m: 7 pos. c d autem 10 m: 1 pos. duc inuicem

d f in f e	★
Quad. e f	✠
Quad. e d	
Duplum d e in e f	★
Quadratum e f	✠
Quadratum c f	
Duplum c f in f e	★
Duplum d e in e f	✠
Duplum c f in d e	★

fient 100 m: 80 pos. p: 7 quad: æqualia 6 quad. & ita uides quod res reducitur in quouis casu a d 1 quad. cum quadrato numeri propositi, & numerus rerum semper fit ex numero proposito, utpote 10 in numerum proportionis p: 2, proportio fuit sexcupla, & ideo addito 2 fiet 8, & positiones 80; ergo reducetur ad regulam de modo sic. Proponitur linea a c 10, & proportio sexcupla adde 2, fit 8, duc in 10 fit 80, accipe dimidium & est 40, duc in se fit 1600, aufer 100 quadratum 10 relinquitur 1500, cuius ℞ detracta à 40, efficit 40 m: ℞ 1500 quantitatem d a. Ergo ut ad rem deueniam si quis dicat 1 cu. p: 4 æquatur 12 rebus, capiam a b duplum ℞ 12, & est ℞ 48, & f corpus duplum 4, & est 8, & diuidam a b per æqualia in ℞ 12, & addam & minuam 1 pos. & fiat e b ℞ 12 p: 1 pos. & ℞ a e ℞ 12 m: 1 pos. & productum erit 12 m: 1 quad. ducamque illud in e d differentiã a e & e b, facta d b æquali a e, & fient 24 pos. p: 2 cub. æqualia 8, igitur 1 cub. p: 4 æqualis 12 pos. cum ergo dimidium e d sit rei æstimatio, & tota a b numerus aut potentia rhete. Erit primum ut a g sit numerus aut potentia rhete. Inde ut cum ex e b in b d & in d e, fiat ut dixi f supposita b d numero utpote 1 erunt quadrata, & res æqualia 8, hoc enim est suppositum, & habebimus 1 quad. p: 2 pos. æqualia 2.

a e g d b



Cor^m. Constat autem quod proportio cubi c b ad parallelipedum c b, b d, d c est semper ueluti quadrati c b ad rectangulum ex c d in d b, quare c b ad latus parallelipedi eiusdẽ subtriplicata ei quæ est quadrati c b ad rectangulũ c d in d b, at c b ad mediam inter c d, d b subduplicata ei quæ est quadrati c b ad rectangulum c d in d b, lateris igitur solidi c b, c d, d b, ad latus rectanguli c d in d b, est ut ℞ quad. $4\frac{1}{2}$ ad ℞ cu. $4\frac{1}{2}$.

Cum uolueris diuidere b a ut proportio eiusdem ad rectangulum a d in d b, sit uiginti quadrupla, gratia exempli, diuide quadratum b a per 24, & quod exit detrahe ex quadrato dimidii b a, & ℞ residui

residui addita & detracta à dimidio ostendit partes, ut si a b sit 10, ducam in se fit 100, diuido per 24, exit $4\frac{1}{6}$, detraho ex 25 quadrato a g relinquitur $20\frac{5}{6}$, cuius ℞ addita 5, dimidio 10, & detracta ostendit partes ut pote a d, d b, & habetur ex Euclide. Iam uerò constituatur a b quadratum 7, & a c 1, & a d 4, erit ergo a e ℞ 7, a f 1, a g 2, & sit e h dupla e a, & erit ℞ 28, & sit numerus k b, sit ergo cubus a c p: 6 æqualis 7 rebus, & item cubus a g p: eodem numero 6, æqualis 7 rebus. Quia ergo a b est 7, erit corpus a b posita a f altitudine & re. 7 res, hoc autem corpus æquale est 1 cu. id est cubo a f cum b, est autem i gnomo l c b f iuxta altitudinem a f, & similiter corpus ex a b in a g est æquale gnomoni l d b g in a g, cum cubo a g, quare gnomo l d b g in a g est 6. Igitur diuisa erit bifariam a b superficies, ut ex latere unius partis in reliquam fiat seu b. Et item diuisa erit bifariam e h in a per æqualia, ut ex a f & a g, ductis in quadratum a e, seu productum a h in a e fiant 7 res: quia a b iam supponitur 7, & a f & a g res. Et rursus diuisa erit c h bifariam in f & in g, ut productum b f in f e sit æquale gnomoni l c b f & in g, ut productum l g in g e, sit æquale gnomoni l d b g. unde unumquodque horum per primam partem huius ductum per differentiam à medietate, id est h f in f e per f a, & h g in g e per g a, producit eundem numerum k seu b. Iam uerò sit cubus & 8 æqualis 8 rebus res 2, erit ut ducas 1. dimidium 2 in se fit 1, triplica fit 3, deducito numero rerum, relinquitur cuius ℞ m: 1 dimidio prioris æstimationis ℞ 5 m: 1 est secunda æstimatio. Ponam ergo f numerum 8, & a b 2 primam æstimationem, & b d ℞ 5 m: 1 secundam æstimationem, & ideo posita, b c erit c d ℞ 20, dupla ipsi c d, & a e ℞ 5 m: 1, æqualis b d, ponam ergo a d ℞ 5 p: 1 pos. a e ℞ 5 m: 1 pos. ductæ inuicem producunt 5 m: 1 quad. duco in a b fiunt 10 pos. m: 2 cu. æqualia 8, igitur 1 cu. p: 4, æqualia 5. & res est eadem 2, & ℞ 5 m: 1, ergo sub eisdem æstimationibus fit transitus, sed non sine cognitione prioris æstimationis per quam deuenio ad scientiam d e, quæ est ℞ 20. Dictum est etiam supra quod si capiam duplum ℞ numeri rerum, & est ℞ 32, & diuidam in ℞ 8 p: 1 pos. & ℞ 8 m: 1 pos. fiet 8 m: 1 quad. & ducto in 2 pos. fient 16 pos. m: 2 cu. æqualia 16, & redibit a d 1 cu. p: 8 æqualia 8 rebus. In hac igitur per non nota inuenitur aliquid nouum in illo per nota inuenitur aliquid, sed est idem, nam c d supponitur in priore ℞ 32, hic ℞ 20.

5 secundi Elem.



Per demonstrat. 5 secundi Elem.

Per 13 Cap. Art. mag.



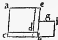
f. num. 8

Rursus proponantur duæ superficies æquales rectangulæ a b c d & c e f g, & sint æquales numero rerum, & sint quadrata in eis c h k d & c e l m, ita ut ex latere illorum in reliquum suæ superficiei fiat numerus idem, qui sit. n. constat igitur tam c e quam c a esse re[illegible]æstimationem, cumque ex c e in l g fiat n, & ex c h in h b, idem enim fient etiam ex g m in m e, & ex a h in h d, quare g m ad a h duplicata ei quæ est h c ad c e: igitur posita g m prima, a h quarta, c h secunda, c e tertia, erit ergo quod fit ex prima & tertia in tertiã, scilicet superficies e g, æqualis ei quod fit ex secunda & quarta in secundam, scilicet superficies a d. Et rursus quod fit ex prima in quadratũ tertiæ æquale ei quod fit ex quarta in quadratum secundæ. Constituetur igitur problema sic: Sunt quatuor quantitates ordinatim a b c d, quarum proportio a ad d est duplicata ei quæ est b ad c: & quod fit ex a c in c est æquale ei quod ex d b in b, & quod fit ex a in quadratum c est æquale ei quod fit ex d b in b. Ex quibus sequitur quartum, quòd proportio eius quod fit ex a in quadratum c, ad id quod fit ex a c in c, est ueluti eius quod fit ex d in quadratum b ad id quod fit ex d b in b. Et permutando etiam, sed illud est perspicuum cum sit proportio æqualis ad æquale.



a
b
c
d

Dico præterea quòd regula Artis magnæ quæ docet assumere radicem aggregati ex numero rerum, & numero æquationis diuiso per illam ℞, sola est generalis illi capitulo, & est demonstrata ibi. Et est origo eius ex triangulo orthogonio, nam si sit cubus b c æqualis rebus iuxta numerum a d, & numero g erit, ergo ex communi animi sententia g ex b c in gnomonem c d e, fiat ergo b f quadratum ęquale c d e gnomoni, eritque cubus b c, æqualis b c in a d & b f, sed quadratum b c, quod est a b, æquale est a d & b f, igitur latera a d & b f continent rectum contensum b c. Hæc igitur æstimatio satisfacit in omni æquatione seu numerus rerum sit paruus seu magnus.



De difficillimo problemate quod facillimum uidetur. CAP. XLI.

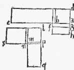
Ihil est admirabilius quam cum sub facili quæstione latet difficillimus scrupulus, huiusmodi est hic: quadratum a b cum latere b c est 10, & quadratum b c cum latere b d est 8, quæritur

quæritur quantum sit unum horum seu latus seu quadratum: Quia ergo a b c est 10, & a b 1 quad. erit b c 10 m: 1 quad. igitur b c 100 m: 20 quad. p: 1 quad. quad. igitur c b d erit 100 m: 20 quad. p: 1 pos. p: 1 quad. quad. & hoc est æquale 8, quare 1 quad. quad. p: 92, æquatur 20 quad. m: 1 pos. adde 19 quad. utrinque fient 1 quad. quad. p: 19, quadrat. p: 92, æqualia 39 quad. m: 1 pos. detrahe $1\frac{3}{4}$, erunt 1 quad. quad. p: 19 quad. p: $90\frac{1}{4}$ æqualia 39 quad. m: 1 pos. m: $1\frac{3}{4}$, inde adde 2 pos. p: 1 quad. utrinque ut in Arte magna, & uidebis difficillimam quæstionem.



De duplici æquatione comparanda in capitulo cubi & numeri æqualium rebus. CAP. XLII.

IT proponatur cubus & 4 æquales 6 rebus, & rei æstimatio est 2, & altera R 3 m: 1, & rursus ponatur cubus, & 10 æqualia 9 rebus, & æstimatio est idem 2, altera R 6 m: 1, & manifestum quod prior æstimatio, scilicet maior satisfacit diuersis, imo infinitis problematibus. At in reliqua fieri nullo modo potest, ut neque in una cum neutra fuerit numerus uelut pro 1 cu. p: 12 æqualibus 34 rebus 3 p: R 7, neque 3 m: R 7, nam posita re ut pote 3 m: R 7 cubus est semper 90 m: R 8092, ergo R non potest continere R nisi 34 uicibus, igitur cubus ille cum numero non potest æquari alteri numero rerum quam 34. & hoc est ualde admiratione dignum.



1 cu. p: 4 æqualis 6 pos. & numer 4 | a | b e | c g | d f

1 cu. p: 10 æqualis 9 pos. & num. 10

Dispositis ergo f d & n l æqualibus, scilicet 4 quadrato 2, & a b R 3 m: 1, & m o R 6 m: 1, ponam a æqualem g d, b æqualem b c, c æqualem g h, d æqualem a b, e æqualem a q, f æqualem m o, g æqualem n s. Ex his sequuntur quinque principalia.

Si quadratum a auferatur ex numero rerum, & cum residuo diuidatur numerus æquationis prodibit ipsum a communis æstimatio, ueluti 1 cu. p: 4 æquatur 6 rebus, & 1 cu. p: 10 æquatur 9 rebus, & communis æstimatio quæ est a est 2, duco o in se fit 4, detraho ex 6 & 9 numeris rerum, relinquuntur 2 & 5, diuido 4 numerum æquationis primæ per 2 & 10 numerum æquationis secundæ per 5, exit 2 in utroque scilicet ipsum a. Cor^m. 1

Corm. 2 Sequitur etiam quod cum ex dictis fiant, ex g & c in quadratum a k, & k numeri æquationis, ut sit g ad c, ut q ad ℞: & quia quod fit ex c in quadratum a, est æquale ei quod fit ex b in quadratum d, & ex g in quadratum a æquale ei quod fit ex e in quadratũ f, erit quod fit ex b in quadratum d, ad id quod fit ex e in quadratum f, uelut c ad g. Et est probatum exemplum ex 7 m: ℞ 24, quod est quadratum f in $3\frac{4}{5}$ p: ℞ $3\frac{21}{25}$ fit 10.

Ex fine 40 cap.

4 p: ℞ 12	1	℞ 3 m: 1
2 b	c	d
a e	g	f
		℞ 6 m: 1

Corm. 3 Per eandem. Rursus quia quod fit ex c & a, in a est æquale ei quod fit ex b d in d, & ex g a in a, ei quod ex e f in f, erit quod fit ex b d in d ad id quod ex e f in f, uelut c ad g, fit enim ex b d in d ℞ 12, & ex e f in f ℞ 75, & est proportio ut 1 ad $2\frac{1}{2}$.

Corm. 4 Cumq́ æstimatio (ut dixi) non potuerit esse communis pluribus numeris rerum, & numeris æquationis commutabitur necessariò, si fuerit binomium in suum recisum, & ita habebis & secundam æquationem & numerum communem qui erit idem, uelut 1 cu. p. 12 æqualis 34 rebus: non se offert primò illa pars quæ ducta in ℞ alterius, efficit 12, sed est tamen 18 p: ℞ 252, alia est 16 m: ℞ 252, cuius ℞ est 3 m: ℞, cum ergo habes 3 m: ℞, duc in se & fit 16 m: ℞ 252, & quia ℞ 7 est sexta pars ℞ 252, ideo oportet assumere numerum sexcuplum ad 3, & est 18 cum ℞ 252 per p: & addere ad 16 m: ℞ 252, habes 34 ad unguem. Et uicissim si habueris 3 p: ℞ 7 habebis quadratum 16 p: ℞ 252, & ita reliquus erit sexcuplus ad 3 p: ℞ 7, sed ℞ erit m: ideoq́ 18 m: ℞ 252. & ita uicissim inuenies ex æstimatione partes, una erit quadratum, alia erit multiplex ut ℞ radicis, sed contrario modo binomium pro reciso, & recisum pro binomio.

Corm. 5 Iam ergo habes duos ordines æstimationum: primus cum eadem æstimatio est communis alijs numeris rerum & æquationum, & inuenire licet illos ducendo in se, detrahendoq́ à quouis numero, & cum residuo diuidere alium numerum, ut prodeat eadem æstimatio: ut in primo corrolario. Secundus, cum æstimatio est binomium uel recisum, & ducitur in se, & detrahitur à numero aliquo, ita ut residuum habeat eandem proportionem ad partem, quæ est numerus, quam ℞ quæ est pars quadrati ad ℞, quæ est pars æstimationis: & illa proportio est duplum numeri æstimationis semper, ideo numerus ille est semper duplum quadrati numeri æstimationis, ut in quarto seu præcedenti corrolario: uelut si numerus æstimationis fuerit 2, erit talis numerus 8, si 3 18, si 4 32, & ita deinceps, reliquus autem numerus erit compositus ex quadratis partium æstimationis, ut si partes sint 3 p: ℞ 7: uel m: ℞ 7, erit 16, igitur totus numerus erit 34. Ergo tertius modus qui quæritur erit diuersus ab his, & non erit per uiam recisi & binomij, neque ut eadem æstima-

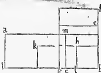
tio

tio feruiat pluribus, uelut in margine uides, quod singulis sunt duæ æstimationes in 1 cu.p: 20, æquali 15 pos. neutrum contingit non primum, quia 2 est minus, & 3 est maius, nec potest esse pars numeri. Nec secundum, quia oporteret ut addito 1 uel 10 ad 15 ℞ 16 uel 25, diuidendo 20, produceret idem 1 uel 10 & non fit, nã exeunt 4 uel 5.

1 cu.p:4	2	6 pos.℞ 3 m:1
1 cu.p:6	2	7 pos. 1
1 cu.p:8	2	8 pos.℞ 5 m:1
1 cu.p:12		34 pos.
3 p:℞ 7		
3 m:℞ 7		
1 cu. p:20		15 pos.

De comparatione numeri æquationis ad partes numeri rerum. CAP. XLIII.

Sit a b superius 12, & ex b c latere tertiæ partis in c a fit 16, maximum quod esse potest. Sit ergo b f æqualis a b, & quadrata superficies g e, ex cuius latere in residuum e f fiat 8, & hæc diuisio est quam quærimus. Sit ergo b k, cuius tertia pars sit quadratum b h, ex cuius latere in residuum esset, fiat 8, erit ergo b l ℞ cu.4, b h ℞ cu.16, l k ℞ cub.128, qua ducta in b l fit ℞ cu.512 scilicet 8. Igitur tota b k est cu.432. Habemus ergo duo nota b c in c a, sed productum non est 8



b l in l k, quorum productum est 8, sed b k non est 12, & b g in e f, & est 8, & b f 12, sed non est nota diuisio facta in e. Proportio ergo a c ad k l, est ut quadrati b c ad quadratum b l, quare ut b c ad b l duplicata: cum uerò proportio solidi b c in c a, sit dupla ad solidum ex b l in l k, erit c a ad l k uelut quadrati proportionis ad ℞ cub.quad.quad. proportionis, & b c ad b l, ut proportionis ad ℞ cu. quad. proportionis. Proportio autem k l ad e f, est ut c b ad b l, quare b e ad b l duplicata ei quæ est k l tetragonici ad e f tetragonicum. Habet ergo diuisio b k per l h proportionem notam in omnibus partibus, ut liquet cum b a diuisa in c: & habet etiam proportionem notam cum b f diuisa in e, quia ut dixi proportio k l ad e f, ut e b ad b l, est autem e g ad b h duplicata ei quæ est e b ad b l. Si ergo coniungantur hæ proportiones, quoniam extremorum componitur ex intermedijs, & maximè quod differentia e g & a c est æqualis differentiæ quadrati b c & e f, seu gnomo e m g æqualis differentiæ a c & f e. Per 34 unedecimi El.

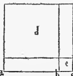
LL 3 Quomodo

Quomodo diuidatur data linea secundum proportionem habentem medium, & duo extrema in corporibus. CAP. XLIIII.


It data a b diuisa in c, ut ex a b in quadratum a c fiat cubus b c, igitur b c posita 1 quad. & ponamus a b 4, erit 1 cu. quad. æqualis 64 m:32 q̃d.p:4 quad. quad. igitur ℞ radici 1 cu. p:2 quad. æqualis 8, cuius æstimatione habita quadratum est quantitas b c quæ quærebatur.

Quomodo partes diuisæ lineæ corporibus & quadratis inuicem comparentur. CAP. XLV.


T sint d e quadrata 26, & d e cubi 126, & compleatur superficies quadrata, & erit cubus p:252, duplo 126, semper æqualis 78 rebus triplo numeri æqualis quadratis deiunctis: Et hoc ex regula posita a c 1 pos. fient enim partes $\frac{1}{2}$ pos. p:℞ v:13 m:$\frac{1}{4}$ quad. & $\frac{1}{2}$ pos. m: ℞ v:13 m:$\frac{1}{4}$ quad. quę deductæ ad cubos ostendunt quod dixi. Et rursus si ponantur d e quadrata 26, & corpora ex d in b c bis, & b in a b bis, 60 erit 1 cu. æqualis 26 rebus numero quadratorum, & 60 duplo producti mutui, & res est in capitulo. Iam ergo ex hoc supposito sciemus quanta sit a c, quæ est b, & partes & æstimationem cubi p:252, ęqualium 78 rebus, quo proposito accipiemus $\frac{1}{3}$ 78 & $\frac{1}{2}$ de 252, & cõuerteť quæsitũ in



duo quadrata quæ iuncta faciunt 26, & duo cubi qui sunt 126. Et quia propositum est quod productum unius in alterum mutuo est 30, si hoc sciremus manifestum esset capitulum. Sunt ergo quatuor quantitas a c, & est 6 quantitas d e, & est 26. quãtitas corporum mutuorum, & est 30 quantitas cuborum, & est 126. Illud accedit quod si dicam quadrata sint 25, & cubi non poterunt esse maiores 125 cubo 5 ℞ 25, igitur cum neq; possint esse minores ℞ 7812$\frac{1}{2}$ duplo, scilicet cubi ℞ medietatis 25, quæ est ℞ 12$\frac{1}{2}$, ut sit circumscripta inter 88, qui est ℞ fermè 7812$\frac{1}{2}$ & 125, & præter id cum dico 1 cub. æquatur 6 rebus p:9, manifestum est quod numerus 9 datur cubis non parallelipedis, ut etiam hic, ideò erit nota pars huius capituli cubi & numeri æqualium rebus. Et est ualdè dignum consideratione; nam ut statuantur cubi æquales 126, & quadrata 26, ut dictum est, poterimus

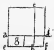
loco

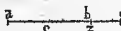
loco 26,assumere quemcunque numerum minorem pro quadratis usque ad 14,ut dicamus,quadrata d e sint 14 uel 15 uel 16,& ita ad 25 usque & cubi sint 126,igitur ex regula præsenti cubus p: 252,æquabitur 42 rebus uel 45 uel 48,& ita usque ad 78,& ita in intermedijs eadem ratione scilicet 43,44,46,47 rebus, & ita de singulis. & uariato numero 252, habebimus alios ergo habita hac regula,habebimus capitulum perfectum.Et tamē (ut dixi) in supposito habemus partem regulæ notam.

Et sane hoc est (ut in exemplo maneamus) iam notum quod si quis dicat cubi a b,b c sunt 126 quadrata 26,quod numerus tribuitur cubis,& si 26 esset numerus rerum,aut numerus mutuorum solidorum,iam omnia essent nota.Et rursus,si dico quod 30 est numerus solidorum & 26 rerum iam habeo 1 cu.æqualem 26 rebus p: 60, & res est nota.Et si dico quadrata sunt 26,& parallelipeda 30,deuenimus ad 1 cub.quad. p: 2028 quad. p: 3120 pos. æqualia 104 quad. quadrat.p: 3600,& hac uia non habemus capitulum. Et mirum est quod cum assumimus 26 pro numero rerum,& 60 pro solidis; aut 30,hic numerus transeat in cubos, quamuis sit mutuorum solidorum:& cum accipitur numerus pro cubis,& quadrata pro alio numero,hęc transeant in res,& numerus cuborum in residuum rerum detracto cubo,quasi numerus rerum componatur ex tribus cubis.

Quomodo proposito rectangulo,& cubis laterum eius habeamus totum cubum. CAP. XLVI.

T proponatur rectangulum a b puta 4, & cubi laterum a c, b d 20 dico cubum notum esse,quia enim cubi a c, b d sunt 20, oportet facere ex 20 duas partes, quarum ℞ cu.ductę inuicem faciant 4,superficiem a b.igitur cubi inuicem ducti facient cubū 4,qui est 64.partes igitur,id est cubi a c,b d sunt 16 & 4 & ℞ cu.earum sunt latera a b igitur cubus totus est 20 p: ℞ cu. 27648 p: ℞ cu. 6912. Et si ponantur a c b d nota ut quantitas rerum & corpora a b c d iuxta altitudinem, erunt duo tantum,quia sub numero rerum a c b d ut potes continentur duo mutua & reliqua quatuor sub a b & c d,id est sub 60. igitur a c & b d numerus rerū si fuerit paruus, erit capitulum per se notum ex regula Artis magnæ: si autem fuerit magnus uelut cu. 24 rebus p: 5,tunc ex præsenti problemate si possit reduci ad hoc,ut separentur mutua, erit propositum necessarium,scilicet ut accepto dimidio 5, & est $2\frac{1}{2}$ inuenias duos numeros qui producant $2\frac{1}{2}$, diuisum per rem , & eorum





eorum cubi faciant 24 m: $2\frac{1}{2}$, id est $21\frac{1}{2}$, nam ut dixi in 24 continentur cubi ambo a c b d & duo mutua. Istud ergo non est per se notum: inuenias numerum qui diuisus producat 6, tanquam superficiem a b, & ipse sit æqualis cubis a b & c d duobusque mutuis, aut quatuor, nam posito uno 1 pos. altero $\frac{6}{1\ pos}$ erunt 1 cu p: $\frac{216}{1\ cu}$ cum 6 pos. p: $\frac{36}{1\ pos}$ uel cum 12 pos. p: $\frac{72}{1\ pos.}$ æqualia 65. gratia exēpli, igitur 1 cu. q̃d. p: 6 quad. quad. p: 36 quad. p: 216, uel 1 cu. quad. p: 12 quad. quad. p: 72 quad. p: 216 æqualia sunt 65 cu. hoc ergo ualde est obscurum, & opporteret ut haberet ℞ cu. Verum quia ponitur 65 cu. a c & b d, & duo mutua & æquantur duo cubi cum duobus mutuis a c & b d in e f, ut nuper dixi, igitur e f quæ est res in a c, & b d est 65, at e f in a b est 6 res ex supposito, & in c d 6 res, quoniam a b & c d sunt æquales, quia sunt supplemēta circa diametrum, igitur e f in a b, c d sunt 12 res, & e f in a c, b d 65, & e f in a c, b d, a b, c d complet cubum e f, igitur cubus e f æquatur 12 rebus p: 65 & res est nota, putà 5, ex qua habetur estimatio illa, fac de 5 duas partes quæ producant 6, & erunt 3 & 2, erit ergo res $2\frac{1}{2}$ p: ℞ $\frac{1}{4}$ uel $2\frac{1}{2}$ m: ℞ $\frac{1}{4}$, & hæc erit æstimatio 65 cuborum æqualium 1 cu. quad. p: 6 quad. quad. p: 36 quad. p: 216, nam 65 cu. sunt in una 1755, in alia 520, & tantundem sunt illæ quantitates. proba & inuenies.

Corr. Ex hoc habetur quod cum 1 cu. quad. p: quad. quad. p: quad. p: numero in continua proportione fuerint æqualia cubis: tunc habebis 1 cu. æqualem rebus duplo numeri quad. quad. cum numero cuborum: & inuenta æstimatione fac duas partes, quæ producant numerum quad. quad. & partes utrique erunt æstimationes 1 cu. quad. p: quad. quad. p: quad. p: numero æqualibus numero cuborum. Velut si dicas 1 cu. quad. p: 9 quad. quad. p: 81 quad. p: 729, sunt æqualia 100 cu. Dices ergo 1 cu. æqualis est 18 pos. p: 100, & rei æstimatio est ℞ v: cu. 50 p: ℞ 2284 p: ℞ v: cu. 50 m: ℞ 2284, Ex hac facito duas partes quæ inuicem ductæ producant 9, & quælibet illarum partium est æstimatio quinomij illius propositi. Et proponatur rursus 1 cu. quad. p: 12 quad. quad. p: 72 quad. p: 216 æqualia 95 cu. & superficies a b sit b ut prius, & sit 95 æquale duobus cubis, & quatuor mutuis corporibus quæ fiunt ex e f in superficiem a c d b, adeò ut ex e f in eam fiat 95, igitur ad complendum cubum deest quod fit ex e f in a b, & a b est 6, ideò & a b est 6, igitur quod fit ex e f in a b est 6, res igitur 1 cu. æquatur 6 rebus p: 95, & res est 5, ut prius fac de 5 duas partes, ex quarum ductu unius in alteram fiat 6, dimidium 12 numeri quadratorum, & erunt partes 3 & 2, & ita 1 cub. quad. p: 12 quad. quad. p: 72 quad. p: 216 æqualia 95 cub. & res est 3 uel 2. experiare & inuenies.

Et

Et eodem modo dicemus si corpus illud sit ex duobus cubis, & quatuor mutuis, & tertia parte duorum mutuorum, & sit gratia exempli 105 totum illud, & quia ex c b in b f fit a b quod est 6 erit e g 4, igitur e g in e f 4 res, ergo 1 cub. æqualis 4 rebus p:105, & res est 5, quia ducendo per primam uiam peruenimus ad 1 cu. quad. p: 14, quad. quad. p: 84 quad. p: 216 æqualia 105 cu. Ideo faciemus ex 5 re duas partes, ex quarum ductu producãtur 6, qui 6 habẽtur ex 14, diuidendo per $2\frac{1}{3}$ numerum mutuorum corporum duorum, uel ex 216, quia semper erit ℞ cu. eius, uel etiam diuiso numero quadratorum scilicet 84 per numerum quad. quad. qui est 14, & ita si numeri erunt dispositi hoc modo, ut secundus sit talis pars tertij, ut sit ℞ cu. quarti, erit regula generalis, sed ita ut quantitas e g uarietur, ut oporteat problema ita construere: sunt duæ quantitates ex quarum ductu producitur 6, & aggregatum cuborum cum duplo & sexta parte mutuorum est 100, tunc inueniemus superficiem e g 5, & erit cubus æqualis 5 rebus p:100, & ita habebimus e f, & partes producentes a b, & hic est primus modus & facilis. Sed si proponatur prius 1 cu. quad. p: 13 quad. quad. p: 78 quad. p: 216, equalia 100, tunc quia tu nescis 100, quibus partibus æquetur, sed solum habes 6, ℞ cu. 3, seu quod prouenit diuiso 78 per 13, & diuiso 13 per 6, exit $2\frac{1}{6}$ abijce igitur relinquetur $\frac{1}{6}$ sume $\frac{1}{6}$, de 6 relinquetur 5, & habebis 1 cu. æqualem 5 rebus p:100, ut prius, unde nota erit e f. Et ita si dixeris 1 cu. quad. p: 15 quad. quad. p: 90 quad. p: 216, æquatur 120 cu. accipe ℞ cu. 216 quę est 6, seu diuiso 90 per 15, & diuide 15 per 6, exit $2\frac{1}{2}$, abijce 2 remanet $\frac{1}{2}$, sume dimidium 6 quod est 3, abijce 3 ex 6 relinquitur 3, dicemus ergo quod 1 cu. æquatur 3 pos. p: 120, igitur res erit ℞ cu. 60 p: 3599 p: ℞ cu. 60 m: ℞ 3599, hanc ita diuidemus ut producãt 6 numerum primo inuentum, ut infrà demonstrabimus.

Nota quòd in huiusmodi æstimatione non solum necessarium est, ut numerus putà 65 uel 95, uel 100, aut 120, sit magnus comparatione numeri rerum quæ assumuntur, sed oportet ut res inuenta possit in duas partes quæ producant ℞ cub. numeri æquationis quæ fuit in exemplis assumptis 6, aliter quæsitum est falsum & impossibile.

Quòd diuisa superficies seu corpus latera habet maiora latere totius. CAP. XLVII.


Sit quadratum a b c d seu cubus, & sit diuisum quomodolibet in e f, dico quòd latera c e & e d, seu cubica seu quadrata pariter iuncta sunt maiora a b, nam latus a f est medium inter a c & a e, igitur cum a c sit maior, a e erit latus, a f maius a e, & si-



militer latus d e medium inter b d & d f, igitur cum b d sit maior d f, erit latus d e maius e b, quare latera a f f b iuncta maiora a e, e b simul iunctis, & hoc est quod uolumus. Similiter in cubo, nam latera sunt media secundo ordine inter a c & c e, & inter b d & d f, ut demonstratum est ab Euclide in undecimo Elementorum, ideò erunt maiora a c & c b. Sed ex hoc sequitur quod in cubo æquali rebus & numero æstimatio rei est semper maior ℞ cu. numeri: & etiam quia talis æstimatio est ℞ cu. cubi qui est maior numero cum sit æqualis rebus ipsis etiam ultra numerum.

De quadratorum quantitate & mutuis corporibus cognitis. CAP. XLVIII.



Nimaduertendum quòd si duo quadrata a b b c sint nota ut pote 13, & mutua quatuor sint 60, & uelim efficere corpora solida ad altitudinem totius, illa erunt 13 res p: 60 æqualia cubo, & tunc 13 continebunt cubos a b b c, & insuper duo mutua: sed quia ex capitulo proprio supponitur quod 13 res contineant tria mutua, & 60 cubos, ideò in æstimatione quærenda fiet res ℞ v: cub. 30 p: ℞ $808\frac{7}{8}$ p: ℞ cub. 30 m: ℞ $808\frac{7}{8}$. Et ideo non erunt 3 & 2, tamen totum erit. cum autem dixero quod ex quadratorum a b b c, lateribus fiant mutua 30, tunc erit c d latus diuisum aliter, scilicet in 2 & 3. Ideo cum dicimus 1 cu. æquatur 13 rebus p: 60, istud seruit eisdem quæsitis, ut 60 comprehendat duos cubos tantum, uel duos cubos cum duobus mutuis, uel duos cubos cum quatuor mutuis, uel cum quatuor mutuis, & dimidio duorum reliquorum, & generaliter cum omni parte: sed ut dixi æquatio tamen capituli qua inuenitur quantitas c d sumitur a c, si numerus ut 60 æqualis sit solis cubis, & hoc seruit capitulo, quomodo proposito rectangulo & cubis laterum.



Si quis dicat 1 cu. p: 70 æquatur 39 rebus dices tu, igitur duo cubi sunt 35 dimidium 70, & duo quadrata 13, tertia pars 39, & ita ex hoc peruenies ad 1 cu. p: 70 æqualia 39 rebus per regulã de modo.

Iterum ergo si quis dicat duo cubi sunt 35 productum unius in quadratum alterius mutuo est 30, triplicabis 30 fit 90, adde 35 fit 125, res est 5, ℞ cu. 125.

Cap. 13. Et quoniam rursus ex dictis in Arte magna cum fuerit cubus p: 70 æqualis 39 rebus transmutatur in cubum æqualem totidem rebus & eidem numero, sed æstimatio prima habetur ducto dimidio secundæ æstimationis in se, & triplicato & deducto à numero

rerum

proportionem habens, haberemus quæsitum cum sit ex natura binomij cubici. Hoc uolui scribere ut intelligeres subtilitatem operationis: & quod æstimatio non est in quantitate cognita, nisi ut diuisum, scilicet uelut diuidendo quantitatem aliquam per uirgulam quæ non habet nomen, & ita est & non est: est tamen notior & magis habilis ad omnes operationes quantitate solida: imò est quasi media inter solidam & per se notam, in quo genere sunt omnes ℞ simplices & coniunctæ.

De modo omnium operationum in quantitatibus medio modo notis. CAP. LII.

Debes scire quod omnes operationes multiplicatio, diuisio, additio, detractio & ℞ inuentio in huiusmodi, est uelut in partibus numerorum, uelut uolo multiplicare,

$$\frac{3}{\text{℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 m: ℞ 2 m: 1}} \text{ per } \frac{\text{℞ cu. 7 m: ℞ cu. 2}}{\text{℞ cu. 5 m: ℞ cu. 3 p: ℞ 2}}$$

oportet ut ducas denominatores, simul & fiet hoc

$$\frac{\text{℞ cu 189 m: ℞ cu. 54}}{\text{℞ 12 p: ℞ 10 p: ℞ 6 m: 2 m: ℞ 2 p: ℞ cu. quad 5400 p: ℞ cu. quad. 3125 p: ℞ cu. quad. 675 m: ℞ cu.}}$$

$$\frac{\text{℞ cu 189 m: ℞ cu 54}}{\text{quad 200 m: ℞ cu. 5 m: ℞ cu. quad. 1944 m: ℞ cu. quad 1125 m: ℞ 243 p: ℞ cu. quad. 72 p: ℞ cu. 3.}}$$

Et similiter facies in diuisione additionib. ac detractionib. reducẽcẽdo ad idẽ genus q̃ntitates simplices, et similiter in capiẽdo radicẽ, uelut capio radicẽ

$$\frac{25}{\text{14 p: ℞ 120 p: ℞ 2 m: ℞ 48 m: ℞ 24 m: ℞ 10 m: ℞ 5}}$$

capio ℞ cu 25, & est 5, & capio radicem infra scripti denominatoris, & est ℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 2 m: 1, & habeo $\frac{5}{\text{℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 2 m: 1}}$ ductum hoc ad ueram quantitatem per sua contraria fiet diuisor, qui sit b, & qui diuiditur multorũm nominum a, & 5 diuisus c, & ℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 2: m: 1 dicatur d, & dicatur 25 numerator primus, & suus denominator septem nominum f. Quia ergo a ad b, ut c ad d & c ad f, ut c ad d, duplicata erit e ad f, ut a ad b duplicata: Igitur si ducantur a & b in fe, & producantur g & h, erit h numerus, & g h proportio nota, & est g ad h ut e ad f, igitur g ad f nota. Per 20 sexti Elem.

$\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$ $\frac{g}{h}$

Et hæc est sexta operatio propria quantitatibus medijs.

De

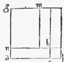
De diligenti consideratione quorundam superius dictorum cap. 7. CAP. LIII.



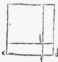
T iam dicamus quòd cubus æqualis sit 12 rebus p: 20, & rei æstimatio est ℞ cub. 16 p: ℞ cu. 4, & hæc potest tribui dando 20 numerum cubis similiter, & potest idem numerus dari ambobus cubis & duobus mutuis, & etiam ambobus cubis & quatuor mutuis parallelipedis, & ita trifariam: consideremus ergo postquam capituli inuentio, ac regula cum demonstratione sumpta fuit, per primum modum. Sumemus ergo cubum dimidij æstimationis, id est ℞ cu. 2 p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$, & est $2\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. 54 p: ℞ cu. $13\frac{1}{2}$, & duplū eius quod est minimum, quod possit produci ex diuisione æstimationis est 5 p: ℞ 432 p: ℞ cu. 108, liquet igitur non posse diuidi sic hanc ℞ propter numeri paruitatem, nam cubus totius esset 20 p: ℞ cu. 27648 p: ℞ cu. 6912. Sin autem capiamus 1 cu. æqualem 12 rebus p: 34, erit æstimatio ℞ cu. 32 p: ℞ cu. 2, & duplum cubi dimidij $8\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. 1024, p: ℞ cub. 54, & hoc totum est proximum $22\frac{1}{2}$, ideo duo mutua poterunt contineri in $11\frac{1}{2}$, diuides ergo 34 per ℞ cu. 32 p: ℞ cu. 2, exit ℞ cub. 1024 m: ℞ cu. 64, quod est 4 m: ℞ cub. 4, & hoc oportet esse æquale duobus quadratis, fac ergo ex ℞ cu 32 p: ℞ cu. 2 duas partes, quarum quadrata sint æqualia trinomio illi: accipe ergo dimidium trinomij, & est ℞ cu 128 m: 2 p: ℞ cub. $\frac{1}{2}$, a quo aufer quadratum dimidij diuidendi, id est quadratum ℞ cu. 4 p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$, & est ℞ cu. 16 p: 2 p: ℞ cu. $\frac{1}{16}$ detrahe, relinquetur ℞ cu. 54 m. 4 p: ℞ cu. $\frac{1}{108}$, huius igitur ℞ v addita & detracta ostendit partes hoc modo. Iam ergo uides quod cubus æquatur 34, ita quod 34 numerus est æqualis ambobus cubis cum duobus mutuis partium, & quia residuum est numerus rerum, & est duplum mutuorum diuiso eo per rem, exibit numerus rerum quem constat esse eundem.

℞ cu. 4 p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ p: ℞ v^{m} ℞ cu. 54 p: ℞ cu. $\frac{1}{16}$ m: 4
℞ cu 4 p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ m: ℞ v^{m} ℞ cu. 54 p: ℞ cu. $\frac{1}{16}$ m: 4

Proponatur ergo a b & c d : 4: & sint res: & sint earum quadrata b g, d k, sit autem a h diuisa in e, ut cubi g h, h b sint quadraginta, & erūt b res p: 40 æqualia toti cubo, & ideo auferatur m h æqualis a h, erunt igitur tres illæ superficies b, & iuxta altitudinem a b, b res, & ex a b in m n, & h b 40: & a c erit ℞ v: cu. 20 p: ℞ 392, & e b ℞ v: cu. 20 m: ℞ 392, & sit e f 3, & f d erit 1, & cubi k l & l d cum duobus mutuis corporibus, & hoc est quantum sit



tum fit ex c d in k l, l d iterum 40, & erunt superficies k l & l d 10, & æquales necessario superficiebus m n & h b, quia & ipsæ ductæ in a b, quæ est æqualis c d producit 40. Igitur quia uolo in prima superficie quod soli cubi æquales sint 40, & in secunda quod cubi cum duobus corporibus mutuis efficiant idem 40, & quod æstimatio sit eadem, igitur necesse est ut in secunda figura 1 cub. æquetur 6 rebus etiam p: 40,



sed diuisio in f est proximior medio quàm in prima figura in e, nec regula illa seruit huic æquationi sic intellectæ, ergo oporteret inuenire aliam ei propriam. Idem igitur dico de exemplo superiore, ponatur a b ℞ cu. 32 p: ℞ cu. 2, & sit diuisio binomij in e, & 1 cu. æqualis 12 rebus p: 34: & erunt n m & h b 12. In secunda autem figura erunt eadem k l, l d 12, sed diuisio erit, ut propositum est in f, nec licebit cum æquatione secu. æqualis 12 rebus p: 34, inuenire c d ut componitur est ex c f & f d, sed ex alia regula. sed inueniemus a b ut est diuisa in partes a e, e b e c postmodum si noluerimus a f, f d. Hoc tamen satis est ut intelligamus dari quantitatem mutuam, quæ possit eo modo ducta producere numerum. Si fuerint duę quantitates quod fit ex prima in quadratum secundæ, est æquale ei quod fit ducta secunda in ℞ primæ in se. Hoc autem cōmutandi causa. Sit prima a b quadratum, secunda c d, fiat ergo ex b c in c d, b f dico b f esse latus b a in c e. Quia enim ex a b in c d fit quantum ex b c in b f, eo quod utrobique ducitur c d in quadratū b c, erit proportio corporis c d in a b ad b f superficiem linea b c. Similiter proportio corporis ducti in b c a d a b est quadratū c d: igitur proportio ꝓducti a b in c e ad b f est ipsa b, igitur b f in se ducta, producit a b in c e.



32 p: lat. a

SCHOLIVM.

Ex uisis hic & superius apparet liquidò, quod omnes regulæ uigesimiquinti capituli Artis magnæ quas uocant speciales, sunt generales, & dicuntur speciales solum ratione generis æstimationis, & si quis dicat cu. æqualis est 20 rebus p: 32, dicemus quod æstimatio est 20 d. p. ℞. p. 32. id est diuisarum in partem & radicem producentes 32. Et similiter erit 32. p. 20 cum p 32. id est producentis 20 cum producente 32. Et similiter dicetur. Ag. ℞ p: 20 p: n: 16. id est aggregatum radicum partium 20, quæ mu

Cap. 25





Cap. 23. tuò ductæ producunt 16 dimidium 32. Dicemus etiam ex superius dictis hoc idem, ut res redigatur ad tres æstimationes, nam aliæ sunt confusæ. Ex quibus sequitur quòd istæ æstimationes inter se erunt æquales. Et similiter cum operatus fueris in illis, transibis ex uno in aliud capitulum, ut cum æstimatione. Et nota quod in figura a uariat magnitudinem iuxta singulas regulas.

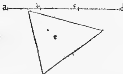
Vide supra cap. 31 & 40 in fine, & infra ca. 57.

20. d. p. R. p 32
32. p. 20 cu. 1. 32
Ag. R. p: 20. p. m. 16.

De perpetua additione quantitatum. CAP. LIIII.



Ico quod si capias duas quantitates a b, b c & iungas eas, & sit productibain a c, aggregatum à quadrato b c differentia superficies e, dico quod si addatur a c tanquam parti c d æqualis b c, quod differentia quadrati a c conuersa ratione à producto c d in a d, & hoc semper procedet, id est posita a d una parte addemus æqualem a c, & fiet a c in aggregatum a d & a c differentia à quadrato a d idem e. ostensa prima patēt reliquæ. Et semper fit commutatio, nam si in prima quadratum b c sit maius eo quod ex a b in a c erit in secunda quod fit ex c d in a d maius quadrato a c. Quod ergo fit ex c b in se cum eo quod fit ex c a, in se est æquale duplo quadrati c b in se, & duplo c b in a b, & quadrato a b: quod etiam fit ex a b in a c, & c d in d a est æquale eisdē quinque superficiebus. igitur quadrata c b & c a sunt æqualia duabus superficies a b in a c, & d c in d a, sint ergo quadrata b c, c á superficies f g, ita ut f sit æqualis quadrato a c, g quadrato b c, superficies autem h k æqualis a b in a c, & c d in d a, erit igitur ut demonstratum k h æqualis f g, sit autem h æqualis a b in a c: k autem æqualis c d in d a, quantum tum igitur h excedit g tantum f k: uel contra quantum g excedit h tantum k excedit f, sed differentia g & h ex supposito est e, igitur e est etiam diffe-





Per 4 secundi Elem.
Per 1 secundi Elem.



rentia f & k, sed f est æquale quadrato a c, & k producto ex c d in d a, igitur constat propositum.

Quæstio generalissima, per quam ex tribus conditionibus uniuersalibus ad unam deuenimus quantitatem specialem, & est admirabilis. CAP. LV.

ESt quantitas cuius latus ductum in residuum producti latus tanto maius est latere aggregati quanto residuum totius detractis duobus lateribus maius est hoc ipso latere. Quantitas est 1 quad. latus 1 pos. residuum 1 quad. m: 1 pos. latus igitur producti ℞ 1 cu. m: 1 quad. habemus igitur 1 pos. ℞ 1 cu. m: 1 quad. & 1 quad. m: ℞ 1 cu. m: 1 quad. & m: 1 pos. quę se æqualiter excedunt: igitur ut in proportionibus æqualibus multiplicatio, ita in excessibus coniunctio 1 quad. m: ℞ 1 cu. m: 1 quad. duplum erit ℞ 1 cu. m: 1 quad. Et ideò 1 quad. æquale triplo ℞ 1 cu. m: 1 quad. quod est ℞ 9 cu. m: 9 quad. Igitur 1 quad. quad. æquale 9 cu. m: 9 quad. & 1 quad. p: 9 æqualia 9 pos. igitur res est $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$. Aggregatum $31\frac{1}{2}$ m: ℞ $911\frac{1}{4}$ detrahe $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$. Relinquitur aggregatum secundæ & tertiæ 27 m: ℞ 720, hanc diuide ut æqualiter se excedant, detrahe duplum $4\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$ ex 27 m: ℞ 720, relinquuntur 18 m: ℞ 405, cuius sume tertiam partem quæ est 6 m: ℞ 45, adde primæ habebis $10\frac{1}{2}$ m: ℞ $101\frac{1}{4}$, tertia fiet simili ex additione $16\frac{1}{2}$ m: ℞ $281\frac{1}{4}$.

$4\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$
$10\frac{1}{2}$ m: ℞ $101\frac{1}{4}$
$16\frac{1}{2}$ m: ℞ $281\frac{1}{4}$

QVAESTIO. II.

Linea a b est decem diuisa in quatuor quantitates æqua proportione & differentiæ illarum, simul iunctæ sunt quinque. Sit igitur a c 1 & c d 1 pos. d e erit 1 quad. & e b 1 cu. Et quia ex regulis generalibus quantitatum differentiæ a c, c d, d e, e b, sunt æquales differentiæ a c & e b, in quotuis quantitatibus quolibet modo, & ordine sumptis erit differentia a c a b c b ad a b 1 cu. m: 1 ad 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1, igitur dupla, quare 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1 æqualia 2 cu. m: 2, & 1 cu. æqualis 1 quad. p: 1 pos. p: 3, & est in capitulo & clarum. Habebimus ergo aggregatum 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1. at nos uolebamus non illud, sed 10. dicemus ergo si a b aggregatum esset 10, quanta esset a c, duc 10 in 1 fit 10, diuide per aggregatum, exibit quãtitas a c in linea a b quæ est 10, & ea quantitas ducta per rem producet c d, eadem ducta in rem producet d e deductis a e, c d & d e ex a b, relinquetur nota etiam b e.



QVÆSTIO III.

Quod si dicat differentias a c & c d, itemq́ d e & e b esse quinque cum tota a b sit decem: ponemus ut prius, & erunt differentiæ c d & e a 1 pos. m: 1 & e b & e d 1 cu. m: 1 quad. igitur 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1 sunt dupla 1 cub. m: 1 quad. p: 1 pos. m: 1. Quia ergo 1 cub. p: 1 quad. se habet ad 1 pos. p: 1 ut 1 cu. m: 1 quad. ad 1 pos. m: 1. nam utriusque proportio est 1 pos. erit permutando 1 cu. p: 1 quad. ad 1 cu. m: 1 quad. ut 1 pos. p: 1 ad 1 pos. m: 1, igitur iungendo erit proportio 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1 ad 1 cu. m: 1 quad. p: 1 pos. m: 1 ut 1 pos. p: 1 ad 1 pos. m: 1. At illa proportio fuit dupla, duplum igitur est 1 pos. p: 1 ad 1 pos. m: 1 & 1 pos. p: 1 æqualis 2 pos. m: 2. igitur 1 pos. æqualis 3. proportio igitur quantitatum tripla est. Erunt igitur quantitates 1.3.9.27. tota igitur a b est 40. At nos supponimus eam esse decem, solum igitur cum 40, sit quadruplum ad 10 erunt a c, c d, d e, e b, quarta pars 1.3.9.27. Quare erunt $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{4}$. $2\frac{1}{4}$. $6\frac{3}{4}$. Et differentiæ $\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}$ & $2\frac{1}{4}$ & $6\frac{3}{4}$ sunt 5. 1. $1\frac{1}{2}$ & $4\frac{1}{2}$.

Cor^m. 1 Ideo nota quod aggregatum quatuor quantitatum, ad aggregatum illarum duarum differentiarum proportionem habet quam proportio ipsa monade, addita habet ad proportionem ipsam detracta unitate, ut ita liceat latinè loqui tamen. Velut 8. 12. 18. 27. aggregatum 65, aggregatum differentiarum 13 proportio quintupla, & est ut $2\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, est autem $2\frac{1}{2}$ 1 p: proportione sexquialtera, quæ scribitur $1\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ m: eadem proportione.

Cor^m. 2 Ex hoc etiam sequitur, quod cum proportio aggregati ad duas differentias primæ & secundæ, itemq́ tertiæ & quartæ fiat detracta & addita monade ad proportionem partium, & in omnibus quantitatibus eadem maneat, quòd si uoluero aliquam proportionem, utpote nonuplam inter aggregatum quantitatum & duarum differentiarum accipiam. 1. m: in proportione. 1. octuplam, & accipiam partem octauam 2, & est $\frac{1}{4}$ cui addam 1, & est $1\frac{1}{4}$, & hæc erit proportio scilicet sexquiquarta, et si uoluero decuplam aufero 1 fit nonupla, & capio nonam partem 2, quæ est $\frac{2}{9}$ & ei addo 1 fit $1\frac{2}{9}$ proportio 1. superbipartiens duas nonas, & si uoluero supertripartientem decimas. 1. $1\frac{3}{01}$ inter quantitates ut habeam proportionem aggregati ad aggregatum, ut 23 ad 3, & habebis quantitates ut uides, ideo detrahe 3 à 23 relinquitur 20, diuide 2 per 20 exit $\frac{1}{01}$ sumo triplum, & est $\frac{3}{01}$, cui addo 1 & fit $1\frac{3}{01}$, proportio partium quæsita & idem in alijs.

Quantit.	1000
	1300
	1690
	2197
Ag.q.	6187
Ag.d.	807
Propor.	23 ad 3

Cor^m. 3 Quantitatum proportiones ad aggregatum manent eadem dico, ad aggregatum differen-

tiarum

tiarum omnium, & primæ & tertiæ, & ad differentiam secundæ à tertia: Et tamen una est facillima inuentu, scilicet ad differentiam primæ & secundæ & tertiæ & quartę, alia difficillima, scilicet ad aggregatum omnium, ut uisum est in quæstione secunda, alia fermè impossibilis scilicet ad differentiam secundæ & tertiæ. Nam cum proportio ad aggregatum omnium sit ut uides, & similiter ad aggregatum duarum differentiarum detracta una ab alia, seu in prima positione relinquetur proportio aggregati ad differentiam secundæ & tertiæ ut 1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1 ad 1 quad. m: 1 pos. & ita fiet æquatio cubi rerum & numeri æqualium quadratis: quantum ad generalem modum.

1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1
1 cu. m: 1 quad. p: 1 pos. m: 1
1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1
1 cu. m: 1
1 cu. p: 1 quad. p: 1 pos. p: 1
1 quad. m: 1 pos.

Quia uerò proportiones se habent inuicem ut 1 pos. 1 quad. & 1 cu. proportionis, proportio enim secundæ ad primam est simplex & una, & tertiæ ad secundam ut quad. & quartæ ad tertiam ut cubus. Velut uides in exemplo, differentiæ uero sunt in eadem proportione: Ideo si quis dicat diuide 10 in quatuor quantitates, quarum proportio differentiarum extremarum sit tripla ad mediam facile inuenies, nam habebis 1 cu. m: 1 quad. p: 1 pos. m: 1 tripla ad 1 quad. m: 1 pos. diuide per 1 pos. m: 1 habebis 1 quad. p: 1 æqualem 3 pos. igitur res est $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $1\frac{1}{4}$, & hæc erit proportio quantitatum iuxta quam diuidemus postea 20, & semper differentia primæ à secunda & tertiæ à quarta, tripla erit differentiæ secundæ à tertia.

8. 12.	18.	27
$1\frac{1}{2}$.	$2\frac{1}{4}$.	$3\frac{3}{8}$
4	6	9

QVAESTIO IIII.

Iuxta quam faciemus quatuor quantitates in continua proportione quarum differentia secundæ à tertia sit 2, & primæ a secunda, & tertiæ à quarta 6. Erunt igitur illæ differentiæ in ea proportione, ut potè $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $1\frac{1}{4}$ | $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$ 9 m: ℞ 80. Sed media differentia non est 2, dic ergo si $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $1\frac{1}{4}$ esset 2 quid erit $1\frac{1}{2}$ m: ℞ $1\frac{1}{2}$ & 9 m: ℞ 80. Duc 2 in eas quantitates, fient ut uides: diuide eas per $3\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$, & est ut multiplices per binomium omnia fiet quod diuisor. 1. & est ac si non diuideres quantitates, ergo erunt ut uides, sed hę sunt differentiæ quantitatum. Pones ergo primam 1 pos. secundam 1 pos. p: 3 m: ℞ 5. tertiam 1 pos. p: 5. m: ℞ 5 quartam 1 pos. p: 8, duc primam in ultimam fiunt 1 quad. p: 8 pos. æqualia ductui secundæ in tertiam, qui est 1 quad. p: 8 pos. m: pos.

3 m: ℞ 5
18 m: ℞ 320
$3\frac{1}{2}$ m: ℞ $11\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$ p: ℞ $11\frac{1}{4}$

℞ 20 p: 20 numero m: ℞ 320. Igitur pos. ℞ 20 æquantur 120 m: ℞ 328, diuide numerum per numerum positionum, erit rei æstimatio ℞ 20 m: 4. Igitur quantitates erunt ut uides.

1
3 p: ℞ 5
2
3 m: ℞ 5

Et constat quod sunt in continua proportione: nam ex prima in tertiam fit 6 m: ℞ 20, quod est quadratum secundæ. Et differentia primæ à secunda est 3 m: ℞ 5, & tertiæ à quarta 3 p: ℞ 5, quæ iunctæ faciunt 6, & differentia secundæ à tertia est 2, ut propositum est.

℞ 5 m: 1	1 pos.
℞ 5 m: 1	1 pos. p: 3 m: ℞ 5
℞ 5 p: 1	1 pos. p: 5 m: ℞ 5
℞ 20 p: 4	1 pos. p: 8
℞ 180	

De duabus quæstionibus pulchris sed impertinentibus.

CAP. LVI.

Cum fuerint tres quantitates, & uolueris eas diuidere in duos ordines quantitatum eiusdem proportionis primum, diuides secundum pro arbitrio. 1. mediam, quia innumeris modis poterit solui quæstio, ut etiam sub certa proportione quantitatibus ut libet uariatis iuxta proportionis naturam, erunt ergo duo generales modi, scilicet quantitatis & proportionis. Sint ergo quantitates 5. 8. 13. Et proportionem assumamus duplam, erunt igitur 5 m: 1 pos. 8 m: 2 pos. 13 m: 4 pos. in continua proportione, quare ut uides extrema inuicem conueniunt ducta cum media in se, & abiecto numero quadratorum utrinque qui semper erit, idem erit 1 pos. æqualis 1. igitur quantitates erunt 1. 2. 4. & reliquæ 4. 6. 9. & hic modus est facilis. Etenim si posuisses in proportione quadrupla fuissent, ut uides. At si quantitates mediæ iam distinctæ supponantur. Velut in primo exemplo à latere uides. Duc 5 primum aggregatum in 4 quadratum mediæ minoris fit 20, diuide per 13 aggregatum maiorum exit $1\frac{7}{13}$, detrahe inde 4 quadratum mediæ minoris ex 36, quadrato mediæ maioris relinquitur 32, diuide per 13 exit $2\frac{6}{13}$ detrahe ex 5. minore aggregato relinquitur $2\frac{7}{13}$, cuius dimidio in se ducto cum

5 m: 1 pos.
8 m: 2 pos.
13 m: 4 pos.

65 p: ℞ quad. m: 33 pos.
64 p: 4 quad. m: 32 pos.

$\frac{1}{29}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{16}{29}$
$4\frac{28}{29}$	$7\frac{25}{29}$	$12\frac{13}{29}$

Aggreg. Prim.	Sec.	Agg. 2
5	2	13
20	$\frac{6}{4}$	
$\frac{13}{1\frac{7}{13}}$	36 | 32	$\frac{13}{2\frac{6}{13}}$
$2.\frac{7}{13}$		$1.\frac{415}{576}$
$1.\frac{7}{26}$		$1.\frac{1}{13}$
$\frac{7}{26}$		$\frac{20}{576}$

fit.

fiat $1\frac{45}{676}$, detrahes iam seruatum primum prouentum, & est $1\frac{7}{13}$ relinquetur $\frac{49}{676}$ cuius R: $\frac{7}{26}$ addita uel detracta ab $1\frac{7}{26}$, dimidio residui minoris aggregati ostendit partes 1 uel $1\frac{7}{13}$. Igitur partes erunt secundum primam æstimationem 1. 2. 4. & 4. 6. 9. & iuxta secundam. Quod si aggregata sint mutua 1, ut prima cum tertia coniungatur, erunt gratia exempli 8. & 2 & 6 & 10, peruenies ad notitiam eodem modo 4. 2. 1. & 4. 6. 9. & $\frac{4}{5}$ 2. 5. & $7\frac{1}{5}$. 6. 5. & ideo duplex ordo uidetur ex his haberi.

★	1	2	4
	4	6	9
	$\frac{20}{13}$	2.	$\frac{11}{5}$
	$\frac{45}{13}$	6.	$\frac{52}{5}$
5.	4 m: 1 pos.		13.
	4 p: 1 pos.		

REGVLA SECVNDA POMPONII

de Bolognetis.

Sint duæ lineæ a b & b c gnomo, qui est differentia quadratorum c g f d, & producatur b c æqualis b c, dico quod rectangulum ex a c differentia in a e aggregatum laterum est æquale gnomoni dicto. Nam ex Prima secundi Elementorum quod fit ex a c in a e, est æquale ei quod fit ex a c in se, & in c b & b c. Sed quod fit ex a c in seipsum est æquale quadrato g f, & quod fit ex a c in b e est æquale rectangulo c g ex diffinitione data in initio Secundi Elementorum: & quod fit ex a c in b e est æquale rectangulo d f, quia b e est æqualis c h, etenim supposita est æqualis b c & d f est æquale a b, ex his quæ dicta sunt in Primo Elementorum, igitur liquidò patet propositum.

Cum ergo soleamus inuenire ex basi orthogonij & altero latere reliquum latus hoc modo, sit latus recto oppositũ 1307, alterum 564 ducuntur in se, & fiunt 1708249 & 318096, detrahe unum ex altero fit 1390153 cuius R: est alterum latus. Sed ex præcedenti demonstratione longe breuius iunge 564 et 1307 fiunt 1871, detrahe etiam unum ex altero fit 743, duc 743 in 1871, fiunt ut suprà.

1307	564
1708249	318096
318096	
R: 1390153	1307

564
1871 Propos.
743
5613
7484
13097
1390153

975342
975342
1950684
3901368
2926026 40
4876701 40
6827394 00
8778078 160
951292016964
1600
951292018564

In hac operatione ingrediuntur figuræ 43, in priore autem figuræ 72. Maius etiam est discrimen & licentia errandi maior in maioribus numeris. At uerò ex demonstratione simili

poterimus

poterimus iungere latera, nam si magna sint ambo, ut pote 975342 & 975362, ducemus maiorem in se & duplicabimus, & ei addemus quadratum differentiæ, & habebimus quadratum lateris oppositi angulo recto. Fit ergo hęc operatio tota cum 75 figuris, at alio modo 120 figuris indiget. Præterea operationes addendi in hac sunt 16, in alia 34, quod si quantitas minor parua sit, & differentia magna erit, tunc ordinarium modum sequemur.

Modus multiplicandi noster ut 87 in 89, duc 90 in 90 proximum denarium fit 8100, duc defectum seu differentiam, in differentiam fit 3 totum 8103, iunge 3 & 1 fit 4, duc in 90 fit 360, detrahe ex 8103 relinquitur 7743, si uero uolueris ducere 87 in 93, duc 90 in 90 fit 8100, duc 3 se fit 9, detrahe ab 8100 relinquitur 8091. Duc tertio 88 in 94, duc 90 in 90 fit 8100, duc 2 minus in 4 excessum fit 8, detrahe ex 8100 relinquitur 8092, detrahe 2 minus à 4 plus fit 2, plus, duc in 90 fit 180, adde ad 8092 fit 8272. Duc demum 49 in 93, duc 50 in 90 fit 4500. Et 1 in 3 fit 3, detrahe, habes 4497, duc 1 in 90 fit 90, duc 3 in 50 fit 150, detraho 90 à 150, relinquitur 60, adde ad 4497, habes 4557. uel ducas 47 in 88. duc 90 in 50 fit 4500, d[illegible] in 2 fit 6, iunge fiunt 4506, duc 3 in 90 fit 270, &[illegible] in 50 fit 100, iunge fiunt 370, detrahe ex 4506 relinquuntur 4136, semper autem oportebit duo iungere tantum aut quatuor aut duo iungere & duo minuere. Et utilis est ad supputationem quæ mente sola fit.

De tractatione æstimationis generalis capituli cubi æqualis rebus & numero. CAP. LVII.

Cap. 40 in fine, & 53 in fine.



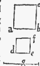
Am docui te quod æstimatio generalis capituli cubi æqualis rebus & numero non est habita, neque per regulam generalem neq; specialem, nisi per illam, ut inuenias quantitatem quæ ducta in secundam, producat numerum æquationis, & illa secunda quantitas gerit uicem gnomonis, & sit prima radix seu latus aggregati ex numero rerum, & secunda illa quantitate inuenta. Et est hoc secundum naturam (ut dixi) quia linea ponitur latus aggregati duarum superficierum quadratarum, & ideò erit opposita angulo recto à lateribus illorum duorum quadratorum contento. Et dixi iam quod hæc quantitas describitur, ut in exemplo cubi æqualis 20 rebus p:32, sic 32 p: 20. c. p. 32.1. producens 20 cum producente 32. seu melius ℞ 20 p: d.32. id est ℞ 20 p: diuiso 32 per ipsam radicem. Aliter ℞ 20 f.32. id est ℞ 20 cum fragmento 32 supple per eandem radicem diuisi. Fragmentum enim est quod ex diuisione prodit. Hoc igitur nomine utemur deinceps si cui aliorum aliquid arrideat, uel etiam nouum imponat, modo res constet

Per 47 primi Eucli.

stet

ſtet non grauabor. Igitur ℞ 20 f. 32 eſt æſtimatio cubi æqualis 20 rebus p:32 numero ut dictum eſt.

Dico ergo primum quòd hæc æſtimatio non poteſt eſſe, neque ex natura binomij, niſi ut mutantur neq; reciſi ſint a b c & d e f quadrata illa, & a c numerus rerum d f, quod prouenit diuiſo numero per g rem ipſam: quia ergo g ſi eſt binomium d e f eſt reciſum, igitur cum a b c ſit numerus, erit aggregatum ex a b c & d e f reciſum, igitur latus eius eſt reciſum: non ergo g fuit binomium, & ſi ponas quod g ſit reciſum, erit d e f binomium & aggregatum a b c, d e f binomium, igitur latus eius, binomium primum & non reciſum.



Ex 54 decimi Elem. & ſequent.

Cum igitur cubus æqualis rebus & numero, ut in exemplo præcedenti, ut ſupra uiſum eſt, habeat æſtimationem ℞ 17 p:1, & hoc eſt binomium, & neceſſe eſt ut ſit ℞ 20 f 32, diuido 32 per ℞ 17 p:1, & ſufficit ducere ℞ 17 m:1 in 2, fit ℞ 68 m:2, quod additum ad 20, efficit 18 p:℞ 68: & ita uides quod redit ad binomium, cuius ℞ eſt ℞ 17 p:1 rei æſtimatio, conſtat ergo quòd nullum reciſum poteſt eſſe eiuſmodi: neq; etiam binomium cuius prima pars ſit numerus, nam fragmentum erit neceſſariò cum ſecunda parte m: & ℞, igitur totum eſſet reciſum. Eſt igitur quærenda quantitas eius generis ut diuiſo numero per eam illius poſsit eſſe radix, & conſtat in binomio quinto (ut dixi) & in ſecundo ſit ℞ 12 p:3, ut ſuprà uolo inuenire cubum æqualem rebus & numero, fac ut in regula de modo, & uidebis quod ſolum conuenit ſecundo binomio & quinto. Regula ergo de modo duplica numerum æquationis ſeu æſtimationis habitæ, & duc utrunq; in ſe & differentiam adde quadrato ℞ æſtimationis, & habebis numerum rerum. Inde accipe ℞ quadrati rei & ab ea minue differentiam numeri rerum, & numeri quadrati rei, & hoc duc in rem ipſam, & producetur numerus æquationis. Exemplum proponitur ℞ 7 p:2 pro æſtimatione duplica 2 fit 4, duc 2 & 4 in ſe fiunt 16 & 4, quorum differentia eſt 12, adde 7 quadratum ℞ 7 fit 19 numerus rerum. Inde accipio ℞ 112 quadrati ℞ 7 p:2, & ab ea minue 8 differentiam 19 numeri rerum, & 11 numeri quadrati ℞ 7 p:2, nam ducta in ſe producit 11 p:℞ 112, igitur numerus illius quadrati eſt 11, hanc ergo differentiam minue à ℞ 112 iam ſeruatam, & eſt ℞ quadrati rei ſiet ℞ 112 m:8, duc in rem quæ eſt radix 7 p:2, habebis numerum 12, igitur 1 cu. æquatur 19 rebus p:12 numero. Conſtat uerò quod æſtimatio non poteſt augeri, nec minui ſtante numero rerum & æquationis eodem, nam ſi augeatur quod exit, minuitur igitur & ℞ aggregati quæ eſt res, & ſi minuitur quod exit, augetur igitur &

Cap. 25 Art. mag. Corn.

Cap. 4.

℞ aggregati quæ est res: & ita dum augetur minuitur, & dum minuitur augetur quod esse non potest. Constat etiam quod talis æstimatio est communis binomio cubico inuento in parte capituli, & binomio superficiali hic declarato & communis quantitas est æstimatio generalis.

De communi quantitate duabus incommensis quot modis dicatur. CAP. LVIII.

SVnt ergo iam notæ duæ æstimationes cubi æqualis rebus & numero, una in parte maiore numeri, & est binomij cubici, alia in parte minoris numeri binomij ex ℞ quadratis secundi uel quinti, & communis æstimatio quæ non potest esse incommensis, essent enim inter se commensæ, & quarta scilicet quæ intelligitur in parte minoris numeri, deficere igitur commune oportet, ut dicatur per coniunctionem. Sint igitur a b & b c incommensæ, & sint coniunctæ ita ut medium earum sit d, id est aggregati, ut gratia exempli, a b sit ℞ 8 p: 2, & b c ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 2. Postquàm igitur non potest esse communis æstimatio per commensum commune: ita enim essent eiusdem naturæ inter se, aut erunt ergo per uiam additionis & detractionis ut sit a d, igitur a d erit ℞ 2 p: 1 p: ℞ cu. $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{1}{4}$ quare b d erit ℞ 2 p: 1 m: ℞ cu. $\frac{1}{2}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{4}$, quam conuenit addere quadrinomio, & ita potuissemus ab initio inuenire a b & b c, sicut duo hæc quadrinomia eiusdem generis. Ponamus rursus quod primum inuentum. gratia exempli, sit a e quod addat super a b ℞ cu. 2, ut eam oporteat detrahere, aut sit minus e e in ℞ cu. 2, igitur oporteret inuenire a e & e e prius quæ sunt inæquales, & una est quantitas trinomia alia ℞ cu. simplex, hoc autem absurdum. ideò uia operationis nulla est. Necesse est igitur ut sit quantitas communis genere non a b nec b c: & hoc esse potest, nam animal est commune homini & asino & boui & equo, ita a b & b c continentur sub communi aliqua quantitate, quæ donec communis est omnibus habet solam eam proprietatem, quod cum diuiditur numerus simplex æquationis, per illam ipsam est ℞ numeri rerum cum eo quod prodit. Huic accidere potest ut sit numerus, ut binomium secundi & quinti generis: ut sit ℞ cu. binomia simplex, ut hic uel binomij cum suo reciso, uel ut sit alia quantitas semper cum illa proprietate. Diuidamus ergo 16 per ℞ 8 p: 2, exit ℞ 128 m: 8 addito ad 20 fit 12 p: ℞ 128, quadratum ℞ 8 p: 2, nam cubus fuit æqualis 20 rebus

a d b e c

℞ 8 p: 2 ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 2

2, exit ℞ cu. 16 m: 2 p: ℞ cu. 4, hoc adde ad 6 numerum rerum fit ℞ cu. 10 p: 4 p: ℞ cu. 4, & hoc est quadratum ℞ cu. 4 p: ℞ cu. 2. Commune est ergo ut uides in utraque diuisione prodire recisum, quod additum numero rerum, transeat in naturam similem quadrato rei: numerus igitur rerum mutat naturam eius, quod prouenit ex diuisione numeri æquationis per rem.

De ordine & exemplis in binomijs secundo & quinto.

CAP. LIX.



CVm semper incrementum numeri, & primus numerus incipiat à ℞ primi numeri rerum, & dimidium eius ℞ sit secunda pars binomij stabilis, quæ est numerus æstimationis & primæ partis quadratum incipit à quarta parte primi numeri rerum, & inde tam numerus rerum quam etiam incrementa quadratorum primæ partis binomij, quæ est ℞ augeantur per monades: quæ facilius patent in suppositis exemplis primis quatuor, cum quintum sit extra ordinem manente æstimatione, uelut in tertio exemplo primus numerus rerum est 9, cuius ℞ est 3, à quo incipit primus numerus æquationis, & eius dimidium est $1\frac{1}{2}$ pars secunda æquationis, quæ remanet immobilis, & prima quæ est ℞ $2\frac{1}{4}$ cuius q̃dratum est quarta pars primi numeri rerũ, id est 9. Et augent̃ talia quadrata postmodũ per monadem, seu unum, ut etiam numerus rerũ, ut in figura uides. Ex quibus sequunt̃ quatuor corrolaria.

Exemplum primum incrementi per 1.	*Exemplum secundum incrementi per 2.*
1 cu. 0 p: 1 pos. ℞ $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 0 p: 4 pos. ℞ 1 p: 1
1 cu. 1 p: 2 pos. ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 2 p: 5 pos. ℞ 2 p: 1
1 cu. 2 p: 3 pos. ℞ $2\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 4 p: 6 pos. ℞ 3 p: 1
1 cu. 3 p: 4 pos. ℞ $3\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 6 p: 7 pos. ℞ 4 p: 1
1 cu. 4 p: 5 pos. ℞ $4\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 8 p: 8 pos. ℞ 5 p: 1
1 cu. 5 p: 6 pos. ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 10 p: 9 pos. ℞ 6 p: 1
1 cu. 6 p: 7 pos. ℞ $6\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 12 p: 10 pos. ℞ 7 p: 1
1 cu. 7 p: 8 pos. ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 14 p: 11 pos. ℞ 8 p: 1
1 cu. 8 p: 9 pos. ℞ $8\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 16 p: 12 pos. ℞ 9 p: 1
1 cu. 9 p: 10 pos. ℞ $9\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 18 p: 13 pos. ℞ 10 p: 1
1 cu. 10 p: 11 pos. ℞ $10\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 20 p: 14 pos. ℞ 11 p: 1
1 cu. 11 p: 12 pos. ℞ $11\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 22 p: 15 pos. ℞ 12 p: 1
1 cu. 12 p: 13 pos. ℞ $12\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 24 p: 16 pos. ℞ 13 p: 1
1 cu. 13 p: 14 pos. ℞ $13\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 26 p: 17 pos. ℞ 14 p: 1
1 cu. 14 p: 15 pos. ℞ $14\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 28 p: 18 pos. ℞ 15 p: 1
1 cu. 15 p: 16 pos. ℞ $15\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 30 p: 19 pos. ℞ 16 p: 1
1 cu. 16 p: 17 pos. ℞ $16\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 32 p: 20 pos. ℞ 17 p: 1
1 cu. 17 p: 18 pos. ℞ $17\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	1 cu. 34 p: 21 pos. ℞ 18 p: 1

Exemplum tertium incrementi per 3.

1 cu.	0 p: 9 pos. ℞ $2\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	3 p: 10 pos. ℞ $3\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	6 p: 11 pos. ℞ $4\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	9 p: 12 pos. ℞ $5\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	12 p: 13 pos. ℞ $6\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	15 p: 14 pos. ℞ $7\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	18 p: 15 pos. ℞ $8\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	21 p: 16 pos. ℞ $9\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	24 p: 17 pos. ℞ $10\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	27 p: 18 pos. ℞ $11\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	30 p: 19 pos. ℞ $12\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	33 p: 20 pos. ℞ $13\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	36 p: 21 pos. ℞ $14\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	39 p: 22 pos. ℞ $15\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	42 p: 23 pos. ℞ $16\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	45 p: 24 pos. ℞ $17\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	48 p: 25 pos. ℞ $18\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$
1 cu.	51 p: 26 pos. ℞ $19\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$

Exemplum quartum incrementi per 4.

1 cu.	0 p: 16 pos. ℞ 4 p: 2
1 cu.	4 p: 17 pos. ℞ 5 p: 2
1 cu.	8 p: 18 pos. ℞ 6 p: 2
1 cu.	12 p: 19 pos. ℞ 7 p: 2
1 cu.	16 p: 20 pos. ℞ 8 p: 2
1 cu.	20 p: 21 pos. ℞ 9 p: 2
1 cu.	24 p: 22 pos. ℞ 10 p: 2
1 cu.	28 p: 23 pos. ℞ 11 p: 2
1 cu.	32 p: 24 pos. ℞ 12 p: 2
1 cu.	36 p: 25 pos. ℞ 13 p: 2
1 cu.	40 p: 26 pos. ℞ 14 p: 2
1 cu.	44 p: 27 pos. ℞ 15 p: 2
1 cu.	48 p: 28 pos. ℞ 16 p: 2
1 cu.	52 p: 29 pos. ℞ 17 p: 2
1 cu.	56 p: 30 pos. ℞ 18 p: 2
1 cu.	60 p: 31 pos. ℞ 19 p: 2
1 cu.	64 p: 32 pos. ℞ 20 p: 2

Exemplum quintum ubi res eadem est.

1 cu.	216 p: 0 pos. 6	1 cu.	162 p: 9 pos. 6
1 cu.	210 p: 1 pos. 6	1 cu.	156 p: 10 pos. 6
1 cu.	204 p: 2 pos. 6	1 cu.	150 p: 11 pos. 6
1 cu.	198 p: 3 pos. 6	1 cu.	144 p: 12 pos. 6
1 cu.	192 p: 4 pos. 6	1 cu.	138 p: 13 pos. 6
1 cu.	186 p: 5 pos. 6	1 cu.	132 p: 14 pos. 6
1 cu.	180 p: 6 pos. 6	1 cu.	126 p: 15 pos. 6
1 cu.	174 p: 7 pos. 6	1 cu.	120 p: 16 pos. 6
1 cu.	168 p: 8 pos. 6		

Cor^m. 1 Ex hoc igitur ordine habemus primum quod oportet, ut cum dimidium ℞ sit pars secunda æstimationis, & ℞ sit necessariò numerus par uel impar, ut secunda pars sit numerus integer, aut numeri dimidium.

Cor^m. 2 Secundò, sequitur quod capitulum nō potest esse generale, quia primus numerus necessariò est quadratus, nam si non sit cum incrementa fiant per radicem numeri, igitur uel primus numerus ut pote in tertio ordine erit integer & non quadratus, aut quadratus sed nō integer: si quadratus & non integer, igitur cum alij numeri rerum fiant per additionem continuam, unius erunt omnes numeri rerum fracti, igitur non seruiet capitulū cubo æquali rebus integris & numero

mero ulla ex parte quod est absurdum. Sin autem fuerit numerus & non q̃dratus, igitur cum incrementa fiant per ℞ illius, nunquam prodibit numerus uerus æquationis, & ita capitulum erit inutile. Per ultimam decimi Element.

Ex hoc sequitur etiam quòd nunquam numerus æquationis potest adeò augeri, ut quadratũ dimidij eius sit maius cubo tertię partis numeri rerum: nam tunc per primam regulam fieret ęstimatio binomium cubicum: & per hanc regulam binomium quadratum, & ita unum æquale esset alteri. quod licet esse posit, ut in hoc exemplo ℞ v: cu. 20 p: ℞ 329 p: ℞ v: cu. 20 m: ℞ 392, & est 2 p: ℞ 2 & 2 m: ℞ 2 quod est 4, non potest tamen continuari, & æstimatio resoluitur in numerum integrum. Corm. 3

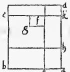
Ex hoc habetur æstimatio proposito numero rerum & ęquationis inuenias omnia quadrata contenta sub numero rerum, & suas ℞ cum quibus duces istas in differentiam numeri rerum, & numeri quadrati, & si producatur numerus æquationis, tunc differentiæ illius, & quartæ partis numeri quadrati inuenti ℞ est prima pars binomij, & dimidium ℞ illius inuentæ pars secunda binomij. Exemplum 1 cu. ęqualis est 30 p: 19 pos. sub 19 numero rerum continentur quadrati numeri, ut à latere uides: cũ uerò differentia 9 a singulis sit ducta in ℞ numeri bifariam producit 30 numerus æquationis. In posteriore accipiemus 1 quartam partem 4, & addemus ad 15 differentiam fit 16, cuius ℞ quæ est 4 addito: constituit ęstimationem 5. In priore addemus $2\frac{1}{4}$ quartam partem 9 ad 10 differentiam fit $12\frac{1}{4}$ cuius ℞ quæ est $3\frac{1}{2}$ addito $1\frac{1}{2}$ dimidio 3 ℞ 9 fit 5, ut prius rei æstimatio. Corm. 4

16	— 4	3	12
9	— 3	10	30
4	— 2	15	30
1	— 1	18	18

Demonstratio generalis capituli cubi æqualis rebus & numero. CAP. LX.



T cum sit regula hæc quòd ad æstimationem attinet specialis, ideò etiam non mirum est si sit etiam specialis in modo inueniendi, cum supponat numerum quadratum. Ergo ut generaliter consideretur proponamus rem ipsam a b & eius quadratum a c, quod constat ex aliquo numero diuiso per a b, & prouentu addito numero rerum. numerus igitur diuisus nunc ponatur superficies: ideo q̃ potest esse maior & minor, & æqualis ipsi a e proponatur primum quod sit æqualis: igitur quod prouenit erit b a latus: & hoc est notum: quippe numerus notus ideò nota. uelut 1 cub. æqualis 25 p: 20 rebus res est 5: & æqualis 36 p: 30 rebus res est 6.



Sit modo b d maior quadrato a c in d c, & sit a c unum, & quia e d erit quantū a d, & addita c d, constituit quadratum a c ex demōstratis, si ergo adderetur sola a f ut fieret a c esset numerus rerum ad unguem e c, sed quia additur d f plus cōstituatur f g æqualis f d, igitur superficies e g c, erit numerus rerum putà 8, & superficies b d est numerus ex supposito, & differentia earum erit 24, qui est dodrans 32, & triplum numeri rerum a b: & ideò e d fit ex c a, id est uno, in a d seu a k cum adiecta k d: igitur adiecto quadrato k d commune erit productum ex a b adiecta a d in k d monade addita æquale differentiæ numeri æquationis, & numeri rerū cum quadrato k d. Si uero proponatur b h numerus paruus, & qui exit a h, & monade ducta in a h fit e h superficies quæ adiecta numero rerum constituit quadratum a c, igitur numerus rerum est superficies h c e, & sit gratia exempli 18, & h b 8, igitur differentia erit 10, talis autem differentia est h c m: h e: h c fit ex h k in a b, h e ex h a in a e. Igitur est diuisa a k æqualis a b, ut ex tota in unam partem, altera detracta relinquatur 10.

Quando ergo superficies diuidenda, & est numerus æquationis fuerit magna, tunc in pluribus satisfaciet pars illa capituli iam inuenti per binomia ex ℞ cubicis: quandoq; etiam non. Sed quando superficies fuerit minor quadrato, non poterit. Postq; ergo supponimus monadē illa nota est: & quia supponimus a k potentia etiam alogam capiamus. gratia exempli, quod sit ℞ cu. 12 p: 2, cuius q̄dratum a c est ℞ cu. 144 p: ℞ cu. 768 p: 4. uolumus ergo diuidere ℞ cu. 12 p: 2, ut ducta in unam partem, & addita reliqua sit æqualis 3. gratia exempli & alteri parti: Sit ergo pars una 1 pos. & erunt partes 1 pos. & ℞ cu. 12 p: 2 m: 1 pos. duc ergo 1 pos. in ℞ cu. 12 p: 2 fiunt pos. ℞ cu. 12 p: 2, & hoc est æquale ℞ cu. 12 p: 5 m: 1 pos. quare pos. ℞ cu. 12 p: p: 3 æquabuntur ℞ cu 12 p: 5, diuide numerū æquationis per numerum pos. inueniendo recisum ℞ cu. 12 p: 3, seu ℞ cub. 27 p: ℞ cu. 12, & est ℞ cu. $3\frac{3}{8}$ m: ℞ cu. $1\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{2}{3}$, duc in ipsum fit $6\frac{1}{2}$, ducito ℞ cu. 12 p: 5 per $1\frac{1}{2}$ in ℞ cub. $1\frac{1}{2}$ p, ℞ cub. $\frac{2}{3}$.

$1\frac{1}{2}$ m: ℞ cu. $1\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{2}{3}$
5 p: ℞ cu. 12

$7\frac{1}{2}$ p: 2 p: ℞ cu. $83\frac{1}{3}$ p: ℞ cu. $40\frac{1}{2}$
m: ℞ cu. $187\frac{1}{2}$ m: ℞ cu. 18

seu $9\frac{1}{2}$ p: ℞ cu $5\frac{1}{3}$ m: ℞ cu. 12

Hoc igitur productū diuide per $6\frac{1}{2}$, exit res ipsa $1\frac{6}{13}$ p: ℞ cu. $\frac{128}{6591}$ m: ℞ cu. $\frac{96}{2197}$, Hæc est una pars, alia igitur erit $\frac{7}{13}$ p: ℞ cu. 12 p: ℞ cu. $\frac{96}{2197}$ m: ℞ cu. $\frac{128}{6591}$ ducta igitur ℞ cu. 12 p: 2 in $1\frac{6}{13}$ p: ℞ cu. $\frac{192}{6591}$ m: ℞ cu. $\frac{69}{2197}$, & à producto detrahendo $\frac{7}{13}$ p: ℞ cu $\frac{96}{2197}$ p: ℞ cu. 12 m: ℞ cu. $\frac{128}{6591}$, relinquetur 3 ad unguem. Nos autem quærimus simul quod ex ductu a b, id est ℞ 12 p: 2 in h a, id est residuum quod fuit $\frac{7}{13}$ p: ℞ cu. 12 p: ℞ cu. $\frac{96}{2197}$ m: ℞ cu. $\frac{128}{6591}$ fiat numerus. Et hæc erit quantitas.

Clarum

Clarum est igitur quod problema cõstruitur hoc modo, & componitur ex regula de modo & positione: Inuenias quantitatem quæ possit diuidi in duas partes, ut ductum totum in unam producat 3. gratia exempli, & in reliquam partẽ addito priore producat 8 pro exemplo. Quoniam ergo liquet quod genus æstimationis illius est quantitas ex genere, uel forma diuisæ ut $\frac{a}{b}$ superius. n. est demonstratum quod non licet diuidere nisi per quadrinomium in ℞ quadratis in cubicis per binomium aut trinomium analogũ, uel per regulam specialem, cum ergo in cæteris non liceat, dico quòd adeò sunt notæ hæ quantitates ut illę. Nam quod ad essentiam attinet ita aloga est ℞ 2 ut ℞ cu. 7 p: ℞ regula 3 m: ℞ ℞ 5, uel etiam totum hoc $\frac{\text{℞ cu. 7 p: ℞}^{R^2} \text{3 m: ℞ ℞ 5}}{\text{℞ cu. q̄d. 10 p: ℞}^{R^2} \text{3 m: ℞ 2}}$ Quòd ad propinquitatem attinet nihil refert cum perpetuo liceat appropinquare. Quo uerò ad operationes illę sunt notissimæ, ideò propono eas. Sit ergo ut uelim ℞ $\frac{a}{b}$, capio ℞ numeratoris & denominatoris, & est ℞ b & ℞ a, & superpono unam alteri eadem ordine, & habeo ℞ $\frac{a}{b}$ $\frac{\text{℞ a}}{\text{℞ b}}$ & similiter $\frac{\text{℞ cu. a}}{\text{℞ cu. b}}$ & ita ℞ cu. $\frac{10}{\text{℞ ℞ 5 p: ℞ cu. 2}}$ $\frac{\text{est ℞ cu. 10}}{\text{℞ V: cu. ℞ ℞ 5 p: ℞ cu. 2}}$ & ita uolo ducere $\frac{10}{\text{℞ ℞ 5 p: ℞ cu. 2}}$ in $\frac{\text{℞ 2}}{\text{℞}^{R^2}\text{5 m: ℞ ℞ ℞ 2}}$ fit $\frac{\text{℞ 200}}{\text{℞ ℞}^{R^2}\text{1953125 p: ℞ cu.}^{R^2}\text{4000}}$ $\frac{\text{℞ 200}}{\text{m: ℞ ℞ 10 m: ℞ ℞ ℞ cu. 128}}$ & ita diuidendo multiplicabimus crucis modũ, et habebimus $\frac{\text{℞}^{R^2}\text{500000 m: ℞ ℞ 20000}}{\text{℞ ℞ 20 p: ℞ cu. ℞ 32}}$

Et contrario modo contrario diuidendo. Et ita in additione $\frac{\text{℞}^{R^2}\text{500000 ℞ ℞ 20 p: ℞ cu. ℞ 32 m: ℞ ℞ 20000}}{\text{℞ ℞}^{R^2}\text{1953125 p: ℞ cu.}^{R^2}\text{40000 m: ℞ ℞ 10 m: ℞ ℞ cu. 128}}$ & in detractione pariter $\frac{\text{℞ ℞ 20 p: ℞ cu. ℞ 32 p: ℞ ℞ 20000 m: ℞}^{R^2}\text{500000}}{\text{℞ ℞}^{R^2}\text{1953125 p: ℞ cu.}^{R^2}\text{4000 m: ℞ ℞ 10 m: ℞ ℞ ℞ cu. 128}}$

Hæc igitur eousq; acta sint.

FINIS.

BASILEAE,

EX OFFICINA HENRICPETRINA, ANNO SALVTIS M. D. LXX. MENSE MARTIO.

